

# 2017 год

## 1 вариант

1. Какое число больше:  $\sqrt{\frac{6}{7} + 7 + \frac{7}{6}}$  или 3?

2. Известно, что  $a + b + c = 5$  и  $ab + bc + ac = 4$ . Найдите  $a^2 + b^2 + c^2$ ?

3. Решите уравнение  $\sin 7x + \sin 6x = \sin x$ .

4. Решите неравенство  $x^2 \log_7^2 x + 3 \log_6^2 x \leq x \log_7 x \cdot \log_6 x^4$ .

5. Через вершины  $A$  и  $B$  треугольник  $ABC$  проведена окружность, касающаяся прямых  $AC$  и  $BC$ . На этой окружности выбрана точка  $D$  (внутри треугольника), лежащая на расстоянии  $\sqrt{2}$  от прямой  $AB$  и на расстоянии  $\sqrt{5}$  от прямой  $BC$ . Найдите угол  $\angle DBC$ , если известно, что  $\angle ABD = \angle BCD$ .

6. Василий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта  $A$  нужно вниз по реке до пункта  $B$ , причем в их распоряжении есть два катера. считая себя самым ответственным, Василий вызвался самостоятельно доехать до пункта  $B$  на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта  $A$ . Однако, промчавшись восемь километров, Василий заметил на берегу машущего ему рукой Григория, который просил по старой дружбе довезти его до пункта  $C$ . И хоть пункт  $C$  Василий уже проехал, он согласился. По пути в пункт  $C$  Василий с Григорием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Василия, откуда те крикнули, что им до пункта  $B$  осталась треть пути и чтобы Василий нигде не задерживался. Доставив Григория в пункт  $C$ , Василий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами  $B$  и  $C$ , если известно, что оба катера пришли в пункт  $B$  одновременно, скорости катеров постоянны, а Василий, действительно, нигде не задерживался.

7. Из вершины  $D$  на плоскость основания пирамиды  $ABCD$  опущена высота  $DH$ . Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников  $\triangle HBC$ ,  $\triangle HAC$ ,  $\triangle HAB$  равны соответственно  $\frac{2}{9}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{4}{9}$ , и что все три плоских угла при вершине  $D$  прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{\cos(x^2 - y^2)} - y \cdot \operatorname{tg}(x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \frac{y}{\cos(x^2 - y^2)} - x \cdot \operatorname{tg}(x^2 - y^2) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

## 2 вариант

1. Решите неравенство  $\sqrt{\frac{7}{8} + 7 + \frac{8}{7}}$  или 3?

2. Известно, что  $a + b + c = 6$  и  $a^2 + b^2 + c^2 = 16$ . Найдите  $ab + bc + ac$ ?

3. Решите уравнение  $\cos 6x + \cos 5x = \sin x$ .

4. Решите неравенство  $x^2 \log_6^2 x + 6 \log_5^2 x \leq x \log_6 x \cdot \log_5 x^5$ .

5. Через вершины  $K$  и  $L$  треугольник  $KLM$  проведена окружность, касающаяся прямых  $KM$  и  $LM$ . На этой окружности выбрана точка  $S$  (внутри треугольника), лежащая на расстоянии 1 от прямой  $KL$ . Найдите расстояние от точки  $S$  до прямой  $LM$ , если известно, что  $\angle KLS = \angle LMS$  и что  $\angle SLM = 45^\circ$ .

6. Анатолий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта  $A$  нужно добраться вверх по реке до пункта  $B$ , причем, в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Анатолий вызвался самостоятельно доехать до пункта  $B$  на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта  $A$ . Однако, промчавшись 8 км, Анатолий заметил на берегу машущего ему рукой Бориса, который просил по старой дружбе довезти его до пункта  $C$ . И хоть пункт  $C$  Анатолий уже проехал, он согласился. По пути в пункт  $C$  Анатолий с Борисом встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Анатолия, откуда те крикнули, что пункт  $B$  уже совсем близко и чтобы Анатолий нигде не задерживался. Доставив Бориса в пункт  $C$ , Анатолий немедленно помчался догонять друзей. Определите, какую долю пути оставалось пройти друзьям Анатолия от момента встречи с ним и Борисом, если известно, что оба катера пришли в пункт  $B$  одновременно, расстояние между пунктами  $B$  и  $C$  равно 2 км, скорости катеров постоянны, а Анатолий, действительно, нигде не задерживался.

7. Из вершины  $S$  на плоскость основания  $KLM$  пирамиды  $KLMS$  опущена высота  $SH$ . Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников  $\triangle HLM$ ,  $\triangle HKM$ ,  $\triangle HKL$  равны соответственно  $\frac{2}{10}$ ,  $\frac{3}{10}$ ,  $\frac{1}{2}$ , и что все три плоских угла при вершине  $S$  прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{\sin(x^2 + y^2)} - y \cdot \operatorname{ctg}(x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \\ \frac{y}{\sin(x^2 + y^2)} + x \cdot \operatorname{ctg}(x^2 - y^2) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

### 3 вариант

1. Решите неравенство  $\sqrt{\frac{7}{9} + 7 + \frac{9}{7}}$  или 3?

2. Известно, что  $a + b + c = 4$  и  $ab + bc + ac = 5$ . Найдите  $a^2 + b^2 + c^2$ ?

3. Решите уравнение  $\sin 8x - \sin 7x = \sin x$ .

4. Решите неравенство  $x^2 \log_5^2 x + 5 \log_4^2 x \leq x \log_5 x \cdot \log_4 x^6$ .

5. Через вершины  $A$  и  $C$  треугольник  $ABC$  проведена окружность, касающаяся прямых  $AB$  и  $BC$ . На этой окружности выбрана точка  $D$  (внутри треугольника), лежащая на расстоянии 1 от прямой  $AC$  и на расстоянии  $\sqrt{7}$  от прямой  $AB$ . Найдите угол  $\angle DAB$ , если

известно, что  $\angle CAD = \angle ABD$ .

6. Григорий с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта  $A$  нужно добраться вниз по реке до пункта  $B$ , причем в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Григорий вызвался самостоятельно доехать до пункта  $B$  на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта  $A$ . Однако, промчавшись шесть километров, Григорий заметил на берегу машущего ему рукой Василия, который просил по старой дружбе довезти его до пункта  $C$ . И хоть пункт  $C$  Григорий уже проехал, он согласился. По пути в пункт  $C$  Григорий с Василием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Григория, откуда те крикнули, что им до пункта  $B$  осталась четверть пути и чтобы Григорий нигде не задерживался. Доставив Василия в пункт  $C$ , Григорий немедленно помчался догонять друзей. Найдите расстояние между пунктами  $B$  и  $C$ , если известно, что оба катера пришли в пункт  $B$  одновременно, скорости катеров постоянны, а Григорий, действительно, нигде не задерживался.

7. Из вершины  $D$  на плоскость основания  $ABC$  пирамиды  $ABCD$  опущена высота  $DH$ . Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников  $\triangle HBC$ ,  $\triangle HAC$ ,  $\triangle HAB$  равны соответственно  $\frac{2}{11}$ ,  $\frac{4}{11}$ ,  $\frac{5}{11}$ , и что все три плоских угла при вершине  $D$  прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{\cos(x^2 - y^2)} + y \cdot \operatorname{tg}(x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \frac{y}{\cos(x^2 - y^2)} + x \cdot \operatorname{tg}(x^2 - y^2) = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

#### 4 вариант

1. Решите неравенство  $\sqrt{\frac{8}{9} + 7 + \frac{9}{8}}$  или 3?

2. Известно, что  $a + b + c = 7$  и  $a^2 + b^2 + c^2 = 19$ . Найдите  $ab + bc + ac$ ?

3. Решите уравнение  $\cos 8x - \cos 9x = \sin x$ .

4. Решите неравенство  $x^2 \log_4^2 x + 10 \log_3^2 x \leq x \log_4 x \cdot \log_3 x^7$ .

5. Через вершины  $M$  и  $K$  треугольник  $KLM$  проведена окружность, касающаяся прямых  $ML$  и  $KL$ . На этой окружности выбрана точка  $S$  (внутри треугольника), лежащая на расстоянии  $\sqrt{2}$  от прямой  $MK$ . Найдите расстояние от точки  $S$  до прямой  $KL$ , если известно, что  $\angle MKS = \angle KLS$  и что  $\angle SKL = 60^\circ$ .

6. Борис с друзьями решили устроить пикник. Для этого им от пункта  $A$  нужно добраться вверх по реке до пункта  $B$ , причем, в их распоряжении есть два катера. Считая себя самым ответственным, Борис вызвался самостоятельно доехать до пункта  $B$  на более быстроходном катере и начать готовить место для пикника. Оба катера вышли одновременно из пункта  $A$ . Однако, промчавшись 10 км, Борис заметил на берегу машущего ему рукой Анатолия, который просил по старой дружбе довезти его до пункта  $C$ . И хоть пункт  $C$  Борис уже проехал,

он согласился. По пути в пункт  $C$  Борис с Анатолием встретили идущий навстречу второй катер с друзьями Бориса, откуда те крикнули, что пункт  $B$  уже совсем близко и чтобы Борис нигде не задерживался. Доставив Анатолия в пункт  $C$ , Борис немедленно помчался догонять друзей. Определите, какую долю пути оставалось пройти друзьям Бориса от момента встречи с ним и Анатолием, если известно, что оба катера пришли в пункт  $B$  одновременно, расстояние между пунктами  $B$  и  $C$  равно 2 км, скорости катеров постоянны, а Борис, действительно, нигде не задерживался.

7. Из вершины  $S$  на плоскость основания  $KLM$  пирамиды  $KLMS$  опущена высота  $SH$ . Найдите объем этой пирамиды, если известно, что площади треугольников  $\triangle HLM$ ,  $\triangle HKM$ ,  $\triangle HKL$  равны соответственно  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{3}{12}$ , и что все три плоских угла при вершине  $S$  прямые.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{\sin(x^2 - y^2)} - y \cdot \operatorname{ctg}(x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{5\pi}{6}} \\ \frac{y}{\sin(x^2 - y^2)} + x \cdot \operatorname{ctg}(x^2 - y^2) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

## 5 вариант (филиал)

1. Найдите все целые числа, которые лежат между числами  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{85}$  и  $\frac{14 - 1.7}{3 - 2.3}$

2. Решите уравнение:

$$|x^2 - 14x + 48| = 14x - 42 - x^2$$

3. В 9 коробках с номерами от 1 до 9 лежат только красные и синие шары. Число красных шаров во второй коробке в  $\frac{7}{6}$  раз больше чем в первой. Количество красных шаров в коробках образуют арифметическую прогрессию, а количества синих шаров в коробках образуют геометрическую прогрессию (в порядке номеров коробок). Количество синих шаров в первой коробке составляет 25%, а в третьей — 50% от числа всех шаров в данной коробке. Найдите отношение общего числа синих шаров к общему числу красных шаров.

4. Решите уравнение:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\log_y x} = \frac{y^2}{x} \\ (\log_3 x^2) \cdot \log_x \left(2x - \frac{3}{y}\right) = 4 \end{cases}$$

6. В выпуклом четырехугольнике  $\triangle ABCD$ :  $\angle B = \angle C = 60^\circ$ ,  $AD = 21$ ,  $BC = 40$ . Окружность с центром на стороне  $BC$  касается сторон  $AB$ ,  $AD$  и  $CD$ . Найдите длины сторон  $AB$  и  $CD$ .

7. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство:

$$13 + \sin^2 x > 3a^2 - a + (4a - 5) \cos x$$

выполняется для всех  $x$ .

8. В правильную четырехугольную пирамиду  $SABCD$  ( $S$  — вершина пирамиды) вписан шар. Через центр шара и ребро  $AB$  проведена плоскость, которая в пересечении с пирамидой дает 4-угольник  $ABMN$ . Объемы пирамид  $SABMN$  и  $SABCD$  относятся как  $5 : 9$ . Найдите косинус двугранного угла между боковой гранью и основанием исходной пирамиды.

## Ответы

### 1 вариант

1. Первое больше. 2. 17. 3.  $\pi + 2\pi n; \frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi m}{7}, n, k, m \in \mathbb{Z}$ . 4.  $x \in \{1\} \cup [\log_6 7; 3 \log_6 7]$ .  
5.  $\frac{\pi}{4}$ . 6. 4 км. 7.  $\frac{2\sqrt[4]{2}}{9\sqrt[4]{3}}$ . 8.  $x = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\sqrt{\pi}, y = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$ .

### 2 вариант

1. Первое больше. 2. 10. 3.  $\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}; -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi m}{5}, n, k, m \in \mathbb{Z}$ . 4.  $x \in \{1\} \cup [2 \log_5 6; 3 \log_5 6]$ . 5.  $\sqrt{\frac{5}{2}}$ . 6. Одну пятую пути от  $A$  до  $B$ . 7.  $\frac{\sqrt[4]{75}}{15}$ . 8.  $x = 7\sqrt{\frac{\pi}{6}}, y = -2\sqrt{2\pi}$ .

### 3 вариант

1. Первое больше. 2. 6. 3.  $\frac{\pi n}{4}; \frac{2\pi k}{7}, n, k \in \mathbb{Z}$ . 4.  $x \in \{1\} \cup [\log_4 5; 5 \log_4 5]$ . 5.  $\frac{\pi}{3}$ . 6. 2 км. 7.  $\frac{2\sqrt[4]{110}}{33}$ . 8.  $x = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y = -5\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ .

### 4 вариант

1. Первое больше. 2. 15. 3.  $2\pi n; \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}; \frac{\pi}{16} + \frac{\pi m}{4}, n, k, m \in \mathbb{Z}$ . 4.  $x \in \{1\} \cup [2 \log_3 4; 5 \log_3 4]$ .  
5.  $\sqrt{14}$ . 6. Одну шестую пути от  $A$  до  $B$ . 7.  $\frac{\sqrt[4]{5}}{3\sqrt{6}}$ . 8.  $x = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\sqrt{\pi}, y = \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$ .