

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ИМЕНИ Г.П. КУКИНА

20.12.15 10 класс

г. Омск

Математическая олимпиада ОмГУ носит имя профессора Г.П. Кукина, создателя системы городских математических олимпиад.

1. Даны четыре числа. Их разбили на пары, сложили произведения пар и записали сумму. Разбивая на пары другими способами, записали ещё две суммы. Могут ли быть записаны числа 2013, 2014 и 2015? (Шановалов А.В.)
2. Велосипедисты Петров и Волков проехали по одной и той же круговой дорожке по 22 круга каждый. Они начали ехать с одной скоростью, но Петров, проехав каждые три круга, снижает скорость в два раза, едет полкруга с этой скоростью, а потом возвращается к исходной скорости, снова проезжает три круга и т.д. А Волков делает то же самое каждые два круга. За сколько каждый из них преодолел всю дистанцию, если известно, что Петрову на это понадобилось на 10 минут меньше? (Штерн А.С.)
3. На сторонах AB , BC , CD и AD четырехугольника $ABCD$ соответственно выбраны точки K , L , M , N так, что $AK/KB=BL/LC=CM/MD=DN/NA$. На сторонах KL , LM , MN и NK соответственно выбраны точки P , Q , R , S так, что $KP/PL=LQ/QM=MR/RN=DS/SA$. Докажите, что площадь четырехугольника $PQRS$ не меньше четверти площади четырехугольника $ABCD$. (Кукина Е.Г.)
4. Однажды в Хогвартсе (где учатся чистокровные маги и полукровки) собрали 100 учеников, построили в ряд и спросили всех стоящих в ряду под нечётными номерами: «Сколько магов стоит справа от тебя?», а всех чётных – «Сколько магов стоит слева от тебя?». Каждый ответил честно, все ответы оказались различны, но чистокровные маги не считают полукровок магами. Были ли среди 100 учеников полукровки, и если были, на каких местах они стояли? (Усов С.В.)
5. Натуральное число называется элегантным, если у него больше одного простого делителя, и оно делится на сумму любых двух своих различных простых делителей. Найдите все четырёхзначные элегантные числа. (Штерн А.С.)
6. Через вершину B треугольника ABD проведена окружность, касающаяся стороны AD в ее середине E , и пересекающая стороны AB и BD в точках K и L соответственно. На дуге BL , не содержащей точку K , выбрана точка C так, что $\angle CKL=\angle BDA$. При этом треугольник KCD оказался равносторонним. Найдите угол BAD . (Зарубежные олимпиады)