Математическая олимпиада им. Г.П. Кукина
Омск, 15 декабря 2013 г.
9 класс

1. Все стороны прямоугольного треугольника увеличили на одну и ту же величину. Может ли полученный треугольник снова оказаться прямоугольным?

2. Четыре окружности расположены на плоскости так, что первая касается второй, вторая третьей, третья четвертой, а четвертая первой, и все касания внешние. Точки касания образуют прямоугольник. Радиусы каких-то двух окружностей составляют 1 и 2 см. Найдите радиусы двух других окружностей.

3. Три попарно различных числа образуют хорошую тройку, если одно из них равно полусумме двух других. Докажите, что для любой хорошей тройки x_1, x_2, x_3 можно подобрать приведённый квадратный трёхчлен $f(x)=x^2+px+q$, значения которого в этих точках $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ тоже образуют хорошую тройку.

4. На доске написаны дроби ${}^2/_1$, ${}^3/_2$, …, ${}^n/_{(n-1)}$. Отличник Олег хочет перевернуть некоторые дроби так, чтобы произведение всех получившихся дробей было равно 1. При каких n ему удастся это сделать?

5. На каждой клетке шахматной доски лежит 2013 бусинок. Двое играющих по очереди делают ходы по следующим правилам. Первый снимает по бусинке с каждой клетки одной выбранной им горизонтали. Второй – по две бусинки с каждой клетки одной выбранной им вертикали. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?