

Олимпиада им. Г.П.Кукина, 11 класс. 2011-2012 уч. год.

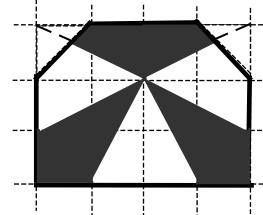
Очный отборочный этап.

1. Два числа x, y подобраны так, что выполняется равенство $x(2^y - 1) + y(2^x - 1) = 0$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно нулю. (*Штерн А.С.*)
2. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию с ненулевой разностью. Докажите, что ровно один угол этого треугольника больше 60 градусов. (*Штерн А.С.*)
3. В колоде 36 карт (4 масти, 9 достоинств). Про любую пару карт одной масти или одного достоинства известно, сколько карт между ними лежит. Достаточно ли этой информации, чтобы узнать пару крайних карт колоды? (*Шаповалов А.В.*)
4. Параболу на координатной плоскости назовем *красивой*, если её вершина и две точки пересечения с осью абсцисс образуют равносторонний треугольник. Можно ли подобрать два квадратных трёхчлена с красивыми графиками и различными дискриминантами? (*Штерн А.С.*)
5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На рёбрах A_1B_1, A_1D_1 и AA_1 выбраны точки N_1, M_1, P_1 , а на рёбрах CD, CB и CC_1 выбраны точки N_2, M_2, P_2 соответственно. Расстояние между прямыми N_1M_1 и N_2M_2 равно a , расстояние между прямыми M_1P_1 и M_2P_2 равно b , расстояние между прямыми N_2P_2 и N_1P_1 равно c . Известно, что числа a, b, c попарно различны. Докажите, что прямые P_1P_2, M_1M_2 и N_1N_2 пересекаются в одной точке. (*фольклор*)
6. На шахматной доске расставлено 8 ладей, никакие две из которых не бьют друг друга. Хулиган Вася закрасил n клеток, не занятых ладьями, в красный цвет. После этого оказалось, что при любой другой расстановке ладей на неиспорченных Васей клетках обязательно найдутся две ладьи, бьющие друг друга. При каком наименьшем n это возможно? (*Штерн А.С.*)

Финальный этап

- Незнайка складывает два целых числа за столько секунд, сколько разрядов в большем из них. Ему нужно найти сумму пятнадцати следующих чисел: 30, 30, 30, 30, 30, 30, 40, 40, 40, 40, 320, 320, 320, 320. Помогите Незнайке сложить все числа быстрее, чем за 35 секунд. (*Адельшин А.В., Усов С.В.*)
- На клетчатой бумаге нарисовали шестиугольник и частично закрасили его серым цветом (см. рисунок). Какая часть шестиугольника имеет большую площадь: закрашенная или незакрашенная? (*Усов С.В.*)
- Три попарно различных числа a, b, c подобраны так, что прямые $y=ax+a^3, y=bx+b^3, y=cx+c^3$ имеют общую точку. Докажите, что $a+b+c=0$. (*фольклор*)
- Возрастающая последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, \dots такова, что $a_1 > 1$, каждое число в последовательности (кроме a_1) делится хотя бы на одно из предыдущих чисел, а сумма первых десяти чисел последовательности равна 275. Найдите a_{10} . (*Пичугин Б.Ю.*)
- Найдите наибольшее целое a , при котором имеет решение система неравенств

$$\begin{cases} ax + y + 1 > 0 \\ x + ay + 1 > 0 \\ x + y + a < 0 \end{cases}$$



(*Штерн А.С.*)

- Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$, у которого $AB:BC=3$. Все боковые ребра пирамиды образуют с основанием равные углы по 60 градусов. Найдите угол между ребром SA и плоскостью SBC . (*фольклор*)

www.ashap.info/Turniry/Kukin/index.html