Олимпиада им. Г.П.Кукина

10 класс. 2010-2011 уч. год.

1. Точки A, B, C, D – соседние вершины правильного многоугольника (именно в таком порядке). Известно, что $\angle ACD=120°$. Сколько вершин у этого многоугольника?
2. Можно ли расставить по окружности 2011 натуральных чисел так, чтобы каждое число было равно либо сумме, либо разности двух соседних чисел?
3. Все коэффициенты квадратного трёхчлена ax^2+bx+c – положительные числа. По этому трёхчлену строится новый трёхчлен по следующему правилу: каждый коэффициент заменяется на произведение двух других коэффициентов (например, из трёхчлена $2x^2+x+3$ получается трёхчлен $3x^2+6x+2$). Затем то же делается с полученным трёхчленом и так далее, пока не будет получено 2010 трёхчленов, включая исходный. Сколько из полученных трёхчленов могут иметь отрицательный дискриминант? Привести все варианты ответа и доказать, что других вариантов нет. (*Штерн А.С.*)
4. Положительное число y и произвольное число x подобраны так, что выполнено неравенство $y(y+1)\le(x+1)^2$. Докажите, что выполнено неравенство $y(y-1)\le x^2$. (*фольклор*)
5. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle BPC=90°$ и $\angle BAP=\angle BCP$. Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно, причём $BP=2PM$. Докажите, что точки A, P и N лежат на одной прямой. (*фольклор*)
6. На n синих карточках написано по натуральному числу, не превосходящему m, а на m красных карточках – по натуральному числу, не превосходящему n. Докажите, что можно выбрать все или часть карточек так, чтобы сумма чисел на синих была равна сумме чисел на красных. (*фольклор*)

www.ashap.info/Turniry/Kukin/index.html