Показательные уравнения и неравенства на ЕГЭ по математике

Здесь приведены показательные уравнения и неравенства, которые предлагались на ЕГЭ по математике (профильный уровень, сложная часть), а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с 2009 года.

1. (*ЕГЭ, 2016*) а) Решите уравнение

$$8^x - 7 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\log_2 5; \log_2 11]$.

а) $2, \log_2 7$; б) $\log_2 7$

2. (*МИОО, 2016*) Решите неравенство

$$2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leqslant 2^{\frac{2x}{x+1}}.$$

$(-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$

3. (*МИОО, 2016*) Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 3^{2x+1} - 6^x - 4^{x+1} - 9}{9^x - 3} \leqslant 3.$$

$\left(\frac{1}{2}; \log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{3}\right]$

4. (*МИОО, 2016*) Решите неравенство

$$\frac{2^{2x+1} - 96 \cdot 0{,}5^{2x+3} + 2}{x+1} \leqslant 0.$$

$\left(-1; \frac{1}{2}\right]$

5. (*ЕГЭ, 2015*) Решите неравенство

$$\frac{31 - 5 \cdot 2^x}{4^x - 24 \cdot 2^x + 128} \geqslant 0{,}25.$$

$\{1\} \cup (3; 4)$

6. (*ЕГЭ, 2015*) Решите неравенство

$$\frac{2}{3^x - 9} \geqslant \frac{8}{3^x - 3}.$$

$(-\infty; 1) \cup (2; \log_3 11]$

7. (*ЕГЭ, 2015*) Решите неравенство

$$\frac{105}{\left(2^{4-x^2}-1\right)^2}-\frac{22}{2^{4-x^2}-1}+1\geqslant 0.$$

$\boxed{(-\infty;-2)\cup(-2;-1]\cup\{0\}\cup[1;2)\cup(2;+\infty)}$

8. (*МИОО, 2015*) Решите неравенство

$$\frac{81^x+2\cdot 25^{x\log_5 3}-5}{(4x-1)^2}\geqslant 0.$$

$\boxed{\left[\log_9\left(\sqrt{6}-1\right);\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};+\infty\right)}$

9. (*ЕГЭ, 2014*) а) Решите уравнение:

$$3\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^x+3\cdot 4^{x+1}=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;3]$.

$\boxed{\text{а) } \log_{\frac{3}{2}} 3,\ \log_{\frac{3}{2}} 4;\quad \text{б) } \log_{\frac{3}{2}} 3}$

10. (*МИОО, 2013*) а) Решите уравнение:

$$7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;2]$.

$\boxed{\text{а) } \frac{3\pm\sqrt{5}}{2};\quad \text{б) } \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

11. (*ЕГЭ, 2013*) а) Решите уравнение:

$$25^{x-\frac{3}{2}}-12\cdot 5^{x-2}+7=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(2;\dfrac{8}{3}\right)$.

$\boxed{\text{а) } 2,\ \log_5 35;\quad \text{б) } \log_5 35}$

12. (*ЕГЭ, 2013*) а) Решите уравнение:

$$9^{x+1}-2\cdot 3^{x+2}+5=0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\log_3\frac{3}{2};\sqrt{5}\right)$.

$\boxed{\text{а) } -1,\ \log_3\frac{5}{3};\quad \text{б) } \log_3\frac{5}{3}}$

13. (*ЕГЭ, 2013*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^x + 17 \cdot 2^{3-x} \leqslant 25, \\ \dfrac{x^2 - 3x - 5}{x - 4} + \dfrac{3x^2 - 15x + 2}{x - 5} \leqslant 4x + 1. \end{cases}$$

$\boxed{\{3\} \cup (4; \log_2 17]}$

14. (*ЕГЭ, 2013*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{2x+2} - 21 \cdot 2^{x-1} + 1 \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} + \dfrac{3x + 1}{x - 1} \leqslant \dfrac{4x + 1}{x}. \end{cases}$$

$\boxed{\{-3\} \cup \left(-2; -\log_2 \frac{5}{2}\right]}$

15. (*ЕГЭ, 2013*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \leqslant 0, \\ \dfrac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \geqslant x^2 - \dfrac{1}{x - 4} + \dfrac{5}{x}. \end{cases}$$

$\boxed{\{3\} \cup (4; \log_2 21]}$

16. (*МИОО, 2013*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + \left(1 - \sqrt{10}\right) x - \sqrt{10} \leqslant 0, \\ \dfrac{3^{|x^2 - 2x - 1|} - 9}{x} \geqslant 0. \end{cases}$$

$\boxed{[-1; 0) \cup \{1\} \cup \left[3; \sqrt{10}\right]}$

17. (*МИОО, 2012*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5^{x+1} - 1} + \dfrac{5^{x+1} - 2}{5^{x+1} - 3} \geqslant 2, \\ \left(\dfrac{2}{25x^2 + 40x + 7} + \dfrac{25x^2 + 40x + 7}{2}\right)^2 \geqslant 4. \end{cases}$$

$\boxed{(-1; \log_5 0{,}4] \cup (\log_5 0{,}6; -0{,}2) \cup (-0{,}2; 0]}$

18. (*МИОО, 2012*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^x + 6 \cdot 2^{-x} \leqslant 7, \\ \dfrac{2x^2 - 6x}{x - 4} \leqslant x. \end{cases}$$

$\boxed{\{0\} \cup [2; \log_2 6]}$

19. (*МИОО, 2009*) Решите неравенство:

$$\left(3^{\frac{x-2}{2}}-1\right)\sqrt{3^x-10\sqrt{3^x}+9}\geqslant 0.$$

$\boxed{\{0\}\cup[4;+\infty)}$