МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 9 ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{3}{2}\right)$, $\log_{x-\frac{3}{2}}(x-3)$ и $\log_{x-3}x$ равно произведению двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=(f(x))^2$ касается графика функции $y=7g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=(g(x))^2$ касается графика функции $y=Af(x)$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 3 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 27^{47}.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\cos y+\cos x=\sin 3x$ и $\sin 2y-\sin 2x=\cos 4x-$ $-\cos 2x$. Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\sin y+\sin x$?

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с радиусом 5 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 6. Найдите длины отрезков AD, BK и периметр треугольника EBM.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от шестнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 636, а сумма расстояний от этих же шестнадцати чисел до числа a^2 равна 591. Найдите все возможные значения a.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM=1$, $CM=24$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.

ЯнусА.рф

© МФТИ, 2018

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 10 ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{5}{2}\right)$, $\log_{x-\frac{5}{2}}(x-4)$ и $\log_{x-4}x$ равно произведению двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=(f(x))^2$ касается графика функции $y=-12g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=(g(x))^2$ касается графика функции $y=Af(x)$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 5 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 125^{85}.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\cos y+\sin x+\cos 3x=0$ и $\sin 2y-\sin 2x=$ $=\cos 4x+\cos 2x$. Какое *наибольшее* значение может принимать сумма $\sin y+\cos x$?

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 17 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 8. Найдите длины отрезков AD, BK и периметр треугольника EBM.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати семи последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1926, а сумма расстояний от этих же двадцати семи чисел до числа a^2 равна 1932. Найдите все возможные значения a.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM=1$, $CM=15$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.

Яндекс.РФ

© МФТИ, 2018

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 11 ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{13}{6}\right)$, $\log_{x-\frac{13}{6}}(x-3)$ и $\log_{x-3}x$ равно произведению двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=(f(x))^2$ касается графика функции $y=4g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=(g(x))^2$ касается графика функции $y=Af(x)$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 7 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 49^{68}.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\sin y+\cos x=\sin 3x$ и $\sin 2y-\sin 2x=\cos 4x-$ $-\cos 2x$. Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\cos y+\sin x$?

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 5 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 3. Найдите длины отрезков BC, BK и периметр треугольника EBM.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от восемнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1005, а сумма расстояний от этих же восемнадцати чисел до числа a^2 равна 865. Найдите все возможные значения a.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM=1$, $CM=8$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.

Ягубов.рф

© МФТИ, 2018

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 12 ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x, при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x\left(x-\frac{1}{3}\right)$, $\log_{x-\frac{1}{3}}(x-3)$ и $\log_{x-3}x$ равно произведению двух остальных.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y=(f(x))^2$ касается графика функции $y=-6g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y=(g(x))^2$ касается графика функции $y=Af(x)$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 11 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 1331^{38}.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\sin y+\sin x+\cos 3x=0$ и $\sin 2y-\sin 2x=$ $=\cos 4x+\cos 2x$. Какое *наибольшее* значение может принимать сумма $\cos y+\cos x$?

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 13 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 5. Найдите длины отрезков AD, BK и периметр треугольника EBM.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати пяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1270, а сумма расстояний от этих же двадцати пяти чисел до числа a^2 равна 1234. Найдите все возможные значения a.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрана точка M. Сфера, построенная на отрезке C_1M как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре B_1B. Известно, что $BM=1$, $CM=3$. Найдите длину ребра AA_1, радиус сферы и объём параллелепипеда.

Ягубов.рф

© МФТИ, 2018