МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 7 ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Каких целых чисел от 1 до 60 000 (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + g(x)$ равно -6.

3. Уравнение $x^2 + ax + 6 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1 - \frac{72}{25x_2^3} = x_2 - \frac{72}{25x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a.

4. На каждой из прямых $y = 3$ и $y = 4$ отмечено по 73 точки с абсциссами $1, 2, 3, \ldots, 73$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 146 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

5. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A отмечена точка T такая, что $\angle BAC = 2\angle BTC$. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = AC$, $BT = 70$, $AT = 37$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от шестнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 276, а сумма расстояний от этих же шестнадцати чисел до некоторого числа b равна 748. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a + b = 62{,}5$.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P – центр окружности, вписанной в треугольник ABD, а Q – центр окружности, вписанной в треугольник CBD. Луч BP пересекает сторону DA в точке M, а луч DQ пересекает сторону BC в точке N. Оказалось, что $AM = \frac{9}{7}$, $DM = \frac{12}{7}$ и $BN = \frac{20}{9}$, $CN = \frac{25}{9}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что данные в условии окружности касаются. Найдите длины сторон AB и CD.

© МФТИ, 2018

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 8 ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Каких целых чисел от 1 до 80 000 (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + g(x)$ равно 4.

3. Уравнение $x^2 + ax + 8 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1 - \frac{64}{17x_2^3} = x_2 - \frac{64}{17x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a.

4. На каждой из прямых $x = 5$ и $x = 6$ отмечено по 58 точек с ординатами $1, 2, 3, \ldots, 58$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 116 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

5. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A отмечена точка T такая, что $\angle BAC = 2\angle BTC$. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AB = AC$, $BT = 42$, $AT = 29$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двенадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 358, а сумма расстояний от этих же двенадцати чисел до некоторого числа b равна 212. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a + b = 114{,}5$.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P – центр окружности, вписанной в треугольник ABD, а Q – центр окружности, вписанной в треугольник CBD. Луч BP пересекает сторону DA в точке M, а луч DQ пересекает сторону BC в точке N. Оказалось, что $AM = \frac{8}{3}$, $DM = \frac{4}{3}$ и $BN = \frac{6}{5}$, $CN = \frac{9}{5}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что данные в условии окружности касаются. Найдите длины сторон AB и CD.

ЯУЗОВ.РФ

© МФТИ, 2018