ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 19 марта 2017 г.

1. В первый день 2^n школьников играли в пинг-понг «навылет»: сначала сыграли двое, затем победитель сыграл с третьим, победитель этой пары — с четвёртым и т.д., пока не сыграл последний школьник (ничьих в пинг-понге не бывает). Во второй день те же школьники разыграли кубок: сначала произвольно разбились на пары и сыграли в парах, проигравшие выбыли, а победители снова произвольно разбились на пары и сыграли в парах, и т.д. Оказалось, что наборы игравших пар в первый и во второй день были одни и те же (возможно, победители были другие). Найдите наибольшее возможное значение n.

Б. Френкин

2. Сфера касается 99 рёбер некоторой выпуклой 50-угольной пирамиды. Обязательно ли тогда она касается и 100-го ребра этой пирамиды?

М. Евдокимов

3. Для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите неравенство:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^4 \geq \frac{x_1}{x_5} + \frac{x_2}{x_6} + \ldots + \frac{x_{n-3}}{x_1} + \frac{x_{n-2}}{x_2} + \frac{x_{n-1}}{x_3} + \frac{x_n}{x_4}.$$

М. Фадин

4. Клетки доски 100×100 раскрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Можно ли перекрасить ровно 2018 различных клеток этой доски в противоположный цвет так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось одно и то же количество чёрных клеток?

Ю. Чеканов

5. Дан треугольник XBC. Различные точки A_H, A_I, A_M таковы, что X является ортоцентром треугольника A_HBC, центром вписанной окружности треугольника A_IBC и точкой пересечения медиан треугольника A_MBC. Докажите, что если A_HA_M и BC параллельны, то A_I — середина A_HA_M.

Е. Бакаев

6. Для каких натуральных n верно следующее утверждение: для произвольного многочлена P степени n с целыми коэффициентами найдутся такие различные натуральные a и b, для которых $P(a) + P(b)$ делится на $a + b$?

Г. Жуков