Вариант 10

1. *В таблице 3×4 расставлены 12 чисел так, что все семь сумм этих чисел в строках и в столбцах таблицы различны. Какое наибольшее количество чисел в этой таблице может равняться нулю?*

Ответ: 8.

Решение. Назовем *индексом* таблицы общее число ее нулевых строк и столбцов. По условию индекс не превосходит 1. Пусть n — ненулевой элемент таблицы. Тогда в одной строке или в одном столбце с n есть еще одно ненулевое число (иначе суммы в строке и столбце, содержащих n, равны n). Значит, ненулевые элементы встречаются парами. Таких пар по крайней мере две, иначе индекс таблицы не меньше 4. Если пар ровно две, то они не пересекаются, в противном случае индекс таблицы равен 3. Таким образом, таблица содержит не менее 4 ненулевых чисел, а количество нулей не превосходит 8. Пример таблицы с 8 нулями приведен ниже. $\square$

0	0	0	0
1	2	0	0
0	0	4	5

2. *Даны числа $x, y, z \in [0, \pi]$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x).$$

Ответ: 2.

Решение 1. Мы можем считать, что $x \leqslant y$ и $x \leqslant z$, поскольку выражение A не меняется при циклической перестановке переменных. Заметим, что

$$\sin(x-y) + \sin(z-x) = 2\sin\left(\tfrac{z-y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{z+y}{2} - x\right).$$

Аргумент синуса из правой части лежит на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а косинуса — на $[0, \pi]$, так как $\pi \geqslant \frac{z+y}{2} \geqslant x$. Рассмотрим два случая.

1) $z > y$. Наибольшей правая часть будет при максимально возможном x, то есть при $x = y$, и значение A окажется нулевым.

2) $z \leqslant y$. При фиксированных y и z правая часть достигнет максимума при $x = 0$. В этом случае

$$A = \sin z - \sin y + \sin(y-z) = -\sin y + 2\sin\tfrac{y}{2} \cdot \cos\left(\tfrac{y}{2} - z\right) \leqslant 2\sin\tfrac{y}{2} - \sin y \leqslant 2.$$

Таким образом, $A \leqslant 2$. Равенство реализуется при $x = 0$, $y = \pi$, $z = \frac{\pi}{2}$. $\square$

Решение 2. Положим $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$. Сумма чисел a, b, c равна нулю, поэтому хотя бы одно из них неположительно. Пусть, например, $c \leqslant 0$. Тогда $c \in [-\pi, 0]$, откуда $\sin c \leqslant 0$. Поэтому

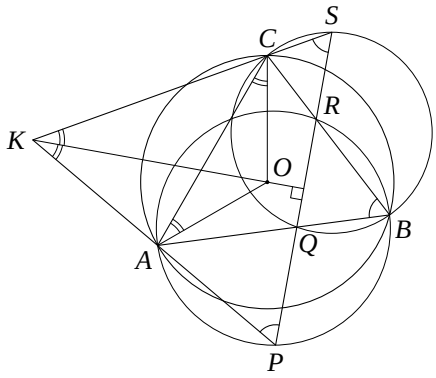
$$A = \sin a + \sin b + \sin c \leqslant \sin a + \sin b \leqslant 2.$$

Равенство реализуется при $x = 0$, $y = \pi$, $z = \frac{\pi}{2}$. $\square$

3. *Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки Q и R соответственно. Прямая QR вторично пересекает описанную окружность треугольника ABR в точке P и вторично пересекает описанную окружность треугольника BCQ в точке S. Прямые AP и CS пересекаются в точке K. Найдите угол между прямыми KO и QR.*

Ответ: 90°.

Ягубов.РФ



Решение. Заметим, что $\angle CSQ = \angle CBQ$ и $\angle APR = \angle ABR$ как вписанные углы, опирающиеся на общую дугу. Поэтому $\angle KSP = \angle KPS$, то есть треугольник PKS — равнобедренный. Поскольку

$$180^\circ - \angle AKC = 2\angle KSP = 2\angle ABC = \angle AOC,$$

четырехугольник $AOCK$ — вписанный. Так как треугольник AOC равнобедренный, мы получим

$$\angle AKO = \angle ACO = \angle CAO = \angle CKO.$$

Поэтому прямая KO является биссектрисой равнобедренного треугольника PKS, а значит, и его высотой. Таким образом, $KO \perp QR$. $\square$

4. *На доске написано произведение трехзначных чисел $\overline{\text{КСИ}}$ и $\overline{\text{ИСК}}$, где буквы соответствуют различным десятичным цифрам. Это произведение шестизначное, его крайние цифры равны, а между ними находятся две пары одинаковых соседних цифр. Что написано на доске?*

Ответ: $633\,556 = 847 \cdot 748$.

Решение. Поскольку задача не меняется при перестановке И и К, мы будем считать И $<$ К. Пусть $p = \overline{\text{КСИ}} \cdot \overline{\text{ИСК}}$, d — младшая цифра p. Так как $d = \text{И} \cdot \text{К} \bmod 10$, запишем $\text{И} \cdot \text{К} = 10m + d$, где m — целое число. По условию d будет также старшей цифрой p. Тогда

$$(d+1) \cdot 100\,000 > p \geqslant \text{И} \cdot \text{К} \cdot 10\,000 > m \cdot 100\,000.$$

Отсюда $d \geqslant m$, причем равенства быть не может, иначе $\text{И} \cdot \text{К} \,\vdots\, 11$. Кроме того, справедливо неравенство $p < (\text{И}+1)(\text{К}+1) \cdot 10\,000$, откуда

$$m < d \leqslant \left[\frac{\text{И} \cdot \text{К} + \text{И} + \text{К} + 1}{10}\right] = m + \left[\frac{d + \text{И} + \text{К} + 1}{10}\right]. \qquad (*)$$

Из условия вытекает, что p кратно 11. Тогда на 11 делится $\overline{\text{КСИ}}$ или $\overline{\text{ИСК}}$, что эквивалентно $\text{И} + \text{К} - \text{С} \,\vdots\, 11$. Поэтому либо $\text{С} = \text{И} + \text{К}$, либо $\text{С} = \text{И} + \text{К} - 11$. Рассмотрим эти случаи.

1) Пусть $\text{С} = \text{И} + \text{К}$. Так как $d + \text{И} + \text{К} + 1 = d + 1 + \text{С} < 20$, из $(*)$ мы получаем $d = m + 1$, то есть $\text{И} \cdot \text{К} = 11m + 1$. Кроме того, $\text{И} + \text{К} \leqslant 9$, откуда $\text{И} \cdot \text{К} \leqslant 20$. Поэтому $\text{И} \cdot \text{К} = 12$, и пара $(\text{И}, \text{К})$ равна $(2, 6)$ или $(3, 4)$. Поскольку $682 \cdot 286 = 195\,052$ и $473 \cdot 374 = 176\,902$, эти случаи нам не подходят.

2) Пусть $\text{С} = \text{И} + \text{К} - 11$. Так как $d + \text{И} + \text{К} + 1 \leqslant 27 < 30$, из $(*)$ мы получаем $d = m + 1$ или $d = m + 2$, откуда $\text{И} \cdot \text{К} \bmod 11$ равно 1 или 2. Кроме того, $\text{И} + \text{К} \geqslant 11$, откуда $\text{И} \cdot \text{К} \geqslant 18$. Поэтому $\text{И} \cdot \text{К}$ может принимать значения 24, 35, 45, 56, а пара $(\text{И}, \text{К})$ — $(3, 8)$, $(5, 7)$, $(5, 9)$, $(7, 8)$. Поскольку

$$308 \cdot 803 = 247\,324, \quad 715 \cdot 517 = 369\,655, \quad 935 \cdot 539 = 503\,965 \quad 847 \cdot 748 = 633\,556,$$

нам подходит только последний случай. □

5. *По краю круглого стола стоят n пустых стаканов ($n \geqslant 3$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них компот или лимонад. За один ход игрок может заполнить один пустой стакан любым из двух напитков на свой выбор. Игрок, после чьего хода образовался стакан с лимонадом, у которого оба соседних стакана с компотом, выигрывает. Если игроку не досталось пустого стакана, то он проигрывает. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?*

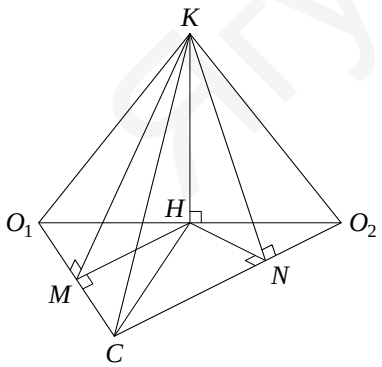
Ответ: при нечетных n.

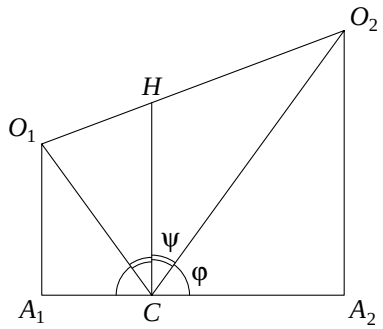
Решение. Пусть n нечетно. Победная стратегия Пети заключается в следующем. Первый стакан он выбирает произвольно. Допустим, что очередным ходом Вася заполнил стакан, отстоящий от первого на k позиций, считая по кратчайшей дуге. Если у Пети после этого появляется победный ход — он выигрывает. В противном случае Петя наливает тот же напиток в стакан, отстоящий от первого на k позиций в другую сторону. Из симметрии ясно, что у Васи победного хода тоже не появится. В силу нечетности n последний пустой стакан заполнит Петя, если он не выиграет досрочно. В любом случае Вася проигрывает.

Пусть теперь n четно. Будем считать, что стаканы стоят в вершинах правильного n-угольника. Назовем *ключевой тройкой* такие три последовательных стакана, что, заполнив один из них подходящим напитком, можно получить победную комбинацию. Стратегия Васи состоит в следующем: если Петя заполнил очередной стакан и не образовалось ключевой тройки — Вася наливает тот же напиток в стакан, симметричный стакану Пети относительно центра n-угольника. Ввиду четности n Петя может победить лишь досрочно. Покажем, что этого не произойдет. Пусть после хода Васи образовалась ключевая тройка T, а до этого таких троек не было. Тогда в T входит последний стакан, заполненный Васей. По построению стаканы тройки T', симметричной T относительно центра n-угольника, заполнены так же, как в T, но в обратном порядке. Значит, T' тоже является ключевой тройкой. Но она существовала еще до хода Васи, что невозможно. □

6. *На столе лежат два шара, касаясь друг друга внешним образом. Конус касается боковой поверхностью стола и обоих шаров (внешним образом). Вершина конуса находится на отрезке, соединяющем точки касания шаров со столом. Известно, что лучи, соединяющие вершину конуса с центрами шаров, образуют равные углы со столом. Найдите максимально возможный угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\operatorname{arcctg} 2$.





Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры шаров, R и r — радиусы шаров, A_1 и A_2 — точки касания шаров со столом, C — вершина конуса, 2α — угол при вершине. По условию $\angle O_1CA_1 = \angle O_2CA_2$, обозначим общее значение этих углов через φ. Заметим, что точки O_1, O_2, A_1, A_2, C лежат в одной плоскости, поскольку $O_1A_1 \parallel O_2A_2$, а C принадлежит отрезку A_1A_2. Тогда

$$R\operatorname{ctg}\varphi + r\operatorname{ctg}\varphi = A_1C + CA_2 = A_1A_2 = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} \Longleftrightarrow \operatorname{ctg}\varphi = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

Выберем на оси симметрии конуса точку K так, что ее проекция H на плоскость CO_1O_2 попадает на отрезок O_1O_2 (см. левый рисунок). Образующие, по которым конус касается одинаковых шаров, лежат в плоскостях KCO_1 и KCO_2, откуда

$$\angle KCO_1 = \angle KCO_2 = \varphi + \alpha.$$

Опустим из точки K перпендикуляры KM и KN на CO_1 и CO_2 соответственно. Прямоугольные треугольники KCM и KCN равны, поэтому $CM = CN$. Отметим несколько простых фактов.

1) $MH \perp CO_1$ *и* $NH \perp CO_2$. Это вытекает из обратной теоремы о трех перпендикулярах.

2) $\angle MCH = \angle NCH$. Действительно, в силу 1) прямоугольные треугольники MCH и NCH равны по гипотенузе и катету, поэтому и их соответствующие углы равны. Обозначим общее значение углов MCH и NCH через ψ.

3) *Прямая CH перпендикулярна столу.* Действительно,

$$180^\circ = 2\varphi + 2\psi, \quad \text{откуда} \quad \angle A_1CH = \varphi + \psi = 90^\circ. \tag{$*$}$$

Поэтому прямая CH параллельна A_1O_1 и, значит, перпендикулярна столу.

Из 1) с учетом $(*)$ мы получаем

$$\cos\angle KCH = \frac{CH}{CK} = \frac{CM}{\cos\angle O_1CH} : \frac{CM}{\cos\angle KCO_1} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\psi} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi} = \operatorname{ctg}\varphi\cos\alpha - \sin\alpha.$$

Луч CK образует со столом угол α, и из 3) вытекает, что $\angle KCH = 90^\circ - \alpha$. Поэтому

$$\sin\alpha = \cos\angle KCH = \operatorname{ctg}\varphi\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}\cos\alpha - \sin\alpha \Longleftrightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{R+r}{\sqrt{Rr}}.$$

По неравенству Коши $\operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2$, то есть $\alpha \leqslant \operatorname{arcctg} 2$. Равенство реализуется в случае $R = r$. $\square$

Ягубов.РФ