Вариант 9

1. *В таблице 3×3 расставлены 9 чисел так, что все шесть произведений этих чисел в строках и в столбцах таблицы различны. Какое наибольшее количество чисел в этой таблице может равняться единице?*

Ответ: 5.

Решение. Назовем *индексом* таблицы общее число ее строк и столбцов, состоящих из единиц. По условию индекс не превосходит 1. Пусть n — элемент таблицы, отличный от 1. Тогда в одной строке или в одном столбце с n есть еще одно число, не равное 1 (иначе произведения в строке и столбце, содержащих n, равны n). Значит, неединичные элементы встречаются парами. Таких пар по крайней мере две, иначе индекс таблицы не меньше 3. Если пар ровно две, то они не пересекаются, в противном случае индекс таблицы равен 2. Таким образом, таблица содержит не менее 4 чисел, отличных от 1, а количество единиц не превосходит 5. Пример таблицы с 5 единицами приведен ниже. $\square$

1	1	1
1	2	3
5	7	1

2. *Даны числа $x, y, z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x).$$

Ответ: $\sqrt{2}-1$.

Решение. Мы можем считать, что $x \leqslant y$ и $x \leqslant z$, поскольку выражение A не меняется при циклической перестановке переменных. Заметим, что

$$\sin(x-y) + \sin(z-x) = 2\sin\left(\tfrac{z-y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{z+y}{2} - x\right).$$

Аргумент синуса из правой части лежит на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а косинуса — на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, так как $\frac{\pi}{2} \geqslant \frac{z+y}{2} \geqslant x$. Рассмотрим два случая.

1) $z > y$. Наибольшей правая часть будет при максимально возможном x, то есть при $x = y$, и значение A окажется нулевым.

2) $z \leqslant y$. При фиксированных y и z правая часть достигнет максимума при $x = 0$. В этом случае

$$A = \sin z - \sin y + \sin(y-z) = -\sin y + 2\sin\tfrac{y}{2}\cdot\cos\left(\tfrac{y}{2} - z\right) \leqslant 2\sin\tfrac{y}{2} - \sin y = 2\sin\tfrac{y}{2}\cdot\left(1 - \cos\tfrac{y}{2}\right).$$

Выражение в правой части увеличивается с ростом y, поэтому его максимум достигается при $y = \frac{\pi}{2}$ и равен $\sqrt{2}-1$. Таким образом, $A \leqslant \sqrt{2}-1$. Равенство реализуется при $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $z = \frac{\pi}{4}$. $\square$

3. *Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На описанной окружности треугольника BOC вне треугольника ABC выбрана точка X. На лучах XB и XC за точками B и C выбраны такие точки Y и Z соответственно, что $XY = XZ$. Описанная окружность треугольника ABY пересекает сторону AC в точке T. Найдите угол $\angle YTZ$.*

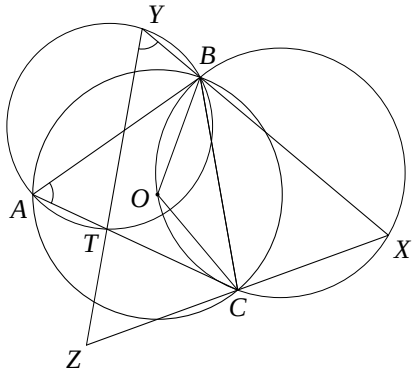
Ответ: 180°.

Решение. Заметим, что $\angle BYT = \angle BAT$ как вписанные углы, опирающиеся на общую дугу. Поскольку четырехугольник $BOCX$ вписанный, мы получим

$$180^\circ - \angle BXC = \angle BOC = 2\,\angle BAC = 2\,\angle BYT.$$

ЯКУБОВ.РФ

С другой стороны, треугольник YXZ равнобедренный, откуда $180^\circ - \angle YXZ = 2\angle XYZ$. Поэтому $\angle XYT = \angle XYZ$, то есть точка T лежит на отрезке YZ. $\square$



4. *На доске написано произведение трехзначных чисел $\overline{ИКС}$ и $\overline{КСИ}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам. Это произведение одинаково читается слева направо и справа налево, две его цифры равны 4, а остальные четыре цифры совпадают с И. Что написано на доске?*

Ответ: $477\,774 = 762 \cdot 627$ или $554\,455 = 593 \cdot 935$.

Решение. Положим $p = \overline{ИКС} \cdot \overline{КСИ}$. Из условия на p вытекает, что $p \vdots 11$ и, значит, один из множителей p кратен 11. Пусть вначале $\overline{ИКС} \vdots 11$. Это означает, что $И + С - К \vdots 11$, откуда либо $И + С = К$, либо $И + С = К + 11$. Заметим также, что числа $(И + К + С)^2$ и $4И + 8$ дают при делении на 9 одинаковые остатки. Рассмотрим два случая.

1) $И + С = К$. Тогда $(2К)^2 \bmod 9 = (4И + 8) \bmod 9$, то есть $К^2 \bmod 9 = (И + 2) \bmod 9$. Зависимость между числами n и $n^2 \bmod 9$ приведена в таблице:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \bmod 9$	1	4	0	7	7	0	4	1	0

(далее остатки будут циклически повторяться). Поэтому $(И + 2) \bmod 9 \in \{0, 1, 4, 7\}$ и $И \in \{7, 8, 2, 5\}$. Подставляя $(И + 2) \bmod 9$ в нижнюю строку таблицы, мы будем получать К в верхней. Если $И = 5$, то К равно 4 или 5, что невозможно. Для $И = 8$ мы получим $К = 8 = И$, что не подходит по условию. Значениям $И = 7$ и $И = 2$ соответствуют пары $(К, С) = (9, 2)$ и $(К, С) = (7, 5)$. Так как

$$792 \cdot 927 = 734\,184, \quad 275 \cdot 752 = 206\,800,$$

эти случаи нам тоже не подходят.

2) $И + С = К + 11$. Тогда

$$(4И + 8) \bmod 9 = (2К + 11)^2 \bmod 9 = 4\,(К + 1)^2 \bmod 9 \iff (К + 1)^2 \bmod 9 = (И + 2) \bmod 9,$$

и снова $И \in \{7, 8, 2, 5\}$. Случаи $И = 2$ и $И = 8$ не подходят: при допустимых значениях К из равенства $С = К - И + 11$ мы получим $С \geqslant 10$. Для остальных И по таблице находятся следующие тройки $(И, К, С)$: $(5, 3, 9)$, $(7, 2, 6)$, $(7, 5, 9)$. Так как

$$539 \cdot 395 = 212\,905, \quad 726 \cdot 267 = 193\,842, \quad 759 \cdot 597 = 453\,123,$$

они нам тоже не подходят.

ЯКОВ.РФ

Пусть теперь $\overline{\text{КСИ}} \vdots 11$. Это означает, что либо $\text{И}+\text{К}=\text{С}$, либо $\text{И}+\text{К}=\text{С}+11$. Переставляя в предыдущих рассуждениях К и С, мы получим, что тройка (И, К, С) принимает одно из следующих значений: $(2,5,7)$, $(7,2,9)$, $(7,9,5)$, $(7,6,2)$, $(5,9,3)$. Так как

$$257\cdot572=147\,004,\quad 729\cdot297=216\,513,\quad 795\cdot957=760\,815,\quad 762\cdot627=477\,774,\quad 593\cdot935=554\,455,$$

нам подходят только две последние тройки. □

5. *На столе стоят в ряд n пустых стаканов. Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них напитки: Петя — лимонад, Вася — компот. За один ход игрок может заполнить один пустой стакан на свой выбор так, чтобы после его хода не образовалось два соседних стакана с одинаковым напитком. Если в результате действий игроков заполняются все стаканы, то игра заканчивается вничью. В противном случае проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Вася выиграет вне зависимости от действий Пети?*

Ответ: $n \notin \{1,2,4,6\}$.

Решение. Занумеруем стаканы слева направо числами от 1 до n. При $n=1$ и $n=2$, очевидно, будет ничья. Если n равно 4 или 6, то Петя первым ходом наливает лимонад в первый стакан. При $n=4$ Петя сможет еще заполнить один из двух последних стаканов и, значит, не проиграет. В случае $n=6$ Петя вторым ходом заполняет последний стакан (если он пуст), а затем — один из двух средних; если же последний стакан заполнил Вася, то Петя наливает компот в третий стакан, а затем — в пятый. В любом случае Петя не проиграет.

Рассмотрим теперь $n \notin \{1,2,4,6\}$. Докажем два утверждения.

1) *Если Вася своим первым ходом заполняет стакан с номером 1, то далее у него всегда будут ходы.* Назовем *сегментом* набор стаканов, стоящих между двумя последовательными стаканами с лимонадом. По условию каждый сегмент непуст, а любой стакан сегмента либо не заполнен, либо содержит компот. Пусть $k \geqslant 2$. После k-го хода Пети образуется $k-1$ сегмент. Вася на этот момент заполнил $k-1$ стакан, в том числе первый, который не входит ни в один сегмент. Тогда найдется такой сегмент, что все входящие в него стаканы пусты. В один из них Вася и может налить компот.

2) *Если Вася своим первым ходом заполняет стакан с номером 1, то он не может проиграть.* Действительно, в силу 1) Вася всегда будет иметь ход и, значит, добьется как минимум ничьей.

Опишем победную стратегию Васи. Своим первым ходом Вася всегда наливает компот в крайний стакан (можно считать, что в первый, иначе перенумеруем стаканы в обратном порядке). В силу 2) достаточно показать, что Вася сможет избежать ничьей. Рассмотрим два случая.

а) *n нечетно.* Вася может играть произвольным образом. Ничья невозможна, поскольку в этом случае последний стакан заполнил бы Петя, что противоречит 1).

б) *$n=2m$ при $m \geqslant 4$.* Своим вторым ходом Вася должен заполнить стакан с четным номером, бóльшим 2. Это возможно, так как имеется не менее трех стаканов с такими номерами и, значит, один из них пуст. Далее Вася может играть произвольным образом. Допустим, что игра завершилась вничью. Тогда m стаканов с лимонадом разместились на позициях $2,3,\ldots,2m$. Они должны располагаться на четных местах, поскольку никакие два стакана не стоят рядом. Но это невозможно, так как четных мест всего m и одно из них уже использовал Вася. □

6. *На столе лежат два шара радиусов 4 и 1 с центрами O_1 и O_2, касаясь друг друга внешним образом. Конус касается боковой поверхностью стола и обоих шаров (внешним образом). Вершина C конуса находится на отрезке, соединяющем точки касания шаров со столом. Известно, что лучи CO_1 и CO_2 образуют равные углы со столом. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$.

Решение. Пусть A_1, A_2 — точки касания шаров со столом, 2α — угол при вершине конуса. По условию углы O_1CA_1 и O_2CA_2 равны, обозначим их общее значение через φ. Заметим, что точки

O_1, O_2, A_1, A_2, C лежат в одной плоскости, поскольку $O_1A_1 \parallel O_2A_2$, а C принадлежит отрезку A_1A_2. Тогда

$$4\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi = A_1C + CA_2 = A_1A_2 = \sqrt{(4+1)^2 - (4-1)^2} = 4 \Longleftrightarrow \operatorname{ctg}\varphi = \tfrac{4}{5}.$$

Выберем на оси симметрии конуса точку K так, что ее проекция H на плоскость CO_1O_2 попадает на отрезок O_1O_2 (см. левый рисунок). Образующие, по которым конус касается одинаковых шаров, лежат в плоскостях KCO_1 и KCO_2, откуда

$$\angle KCO_1 = \angle KCO_2 = \varphi + \alpha.$$

Опустим из точки K перпендикуляры KM и KN на CO_1 и CO_2 соответственно. Прямоугольные треугольники KCM и KCN равны, поэтому $CM = CN$. Отметим несколько простых фактов.

1) $MH \perp CO_1$ *и* $NH \perp CO_2$. Это вытекает из обратной теоремы о трех перпендикулярах.

2) $\angle MCH = \angle NCH$. Действительно, в силу 1) прямоугольные треугольники MCH и NCH равны по гипотенузе и катету, поэтому и их соответствующие углы равны. Обозначим общее значение углов MCH и NCH через ψ.

3) *Прямая CH перпендикулярна столу.* Действительно,

$$180^\circ = 2\varphi + 2\psi, \quad \text{откуда} \quad \angle A_1CH = \varphi + \psi = 90^\circ. \qquad (*)$$

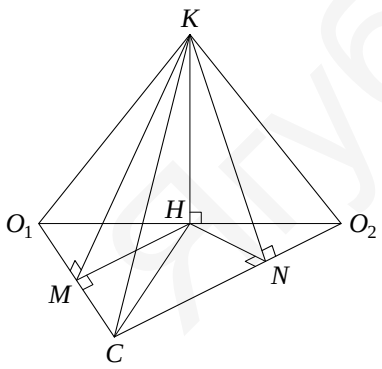
Поэтому прямая CH параллельна A_1O_1 и, значит, перпендикулярна столу.

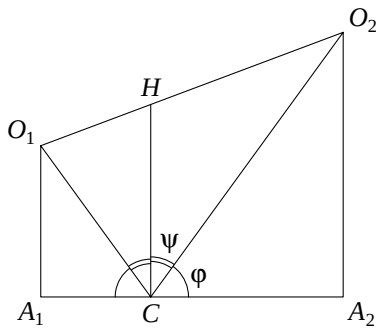
Из 1) с учетом $(*)$ мы получаем

$$\cos\angle KCH = \frac{CH}{CK} = \frac{CM}{\cos\angle O_1CH} : \frac{CM}{\cos\angle KCO_1} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\psi} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi} = \operatorname{ctg}\varphi\cos\alpha - \sin\alpha.$$

Луч CK образует со столом угол α, и из 3) вытекает, что $\angle KCH = 90^\circ - \alpha$. Поэтому

$$\sin\alpha = \cos\angle KCH = \operatorname{ctg}\varphi\cos\alpha - \sin\alpha = \tfrac{4}{5}\cos\alpha - \sin\alpha \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \tfrac{2}{5}. \quad \square$$





Дубов.РФ