Вариант 6

1. *В клетках таблицы 4×6 расставлены натуральные числа так, что все десять сумм этих чисел в строках и столбцах таблицы различны. Найдите наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице.*

Ответ: 43.

Решение. Так как элементы таблицы — натуральные числа, суммы по строкам и по столбцам таблицы не меньше 4. Поскольку все эти суммы различны, минимально возможный набор их значений равен $\{4, 5, \ldots, 12, 13\}$. Складывая суммы по строкам и столбцам таблицы, мы получим удвоенную сумму S всех чисел таблицы, так как каждое из них учитывается дважды — в строке и в столбце. Тогда

$$S \geqslant \tfrac{1}{2}(4+5+\ldots+12+13) = \tfrac{1}{2}\cdot 85 = 42\tfrac{1}{2}, \quad \text{то есть} \quad S \geqslant 43.$$

Пример для $S = 43$ приведен ниже. $\square$

1	1	1	1	1	2
1	1	1	2	2	3
1	1	2	3	3	2
1	2	2	2	3	4

2. *Даны положительные числа a, b, c, d. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \left(a^2 + \frac{1}{bc}\right)^3 + \left(b^2 + \frac{1}{cd}\right)^3 + \left(c^2 + \frac{1}{da}\right)^3 + \left(d^2 + \frac{1}{ab}\right)^3.$$

Ответ: 32.

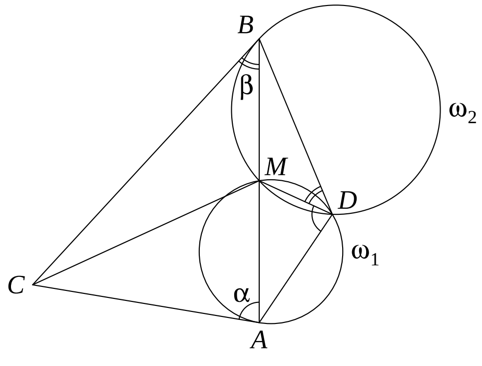
Решение. Воспользуемся неравенством Коши для средних вначале в каждой скобке, а затем для всей суммы. Мы получим

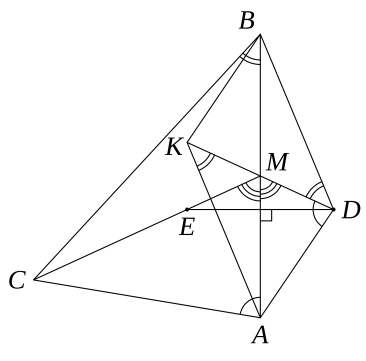
$$A \geqslant \left(\frac{2a}{\sqrt{bc}}\right)^3 + \left(\frac{2b}{\sqrt{cd}}\right)^3 + \left(\frac{2c}{\sqrt{da}}\right)^3 + \left(\frac{2d}{\sqrt{ab}}\right)^3 \geqslant 32\left(\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b^2}{cd}\cdot\frac{c^2}{da}\cdot\frac{d^2}{ab}\right)^{3/8} = 32.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = d = 1$. $\square$

3. *Точка M — середина стороны AB треугольника ABC. Через точки A и M проведена окружность ω_1, касающаяся прямой AC, а через точки B и M — окружность ω_2, касающаяся прямой BC. Окружности ω_1 и ω_2 вторично пересекаются в точке D. Точка E лежит внутри треугольника ABC и симметрична точке D относительно прямой AB. Найдите угол CEM.*

Ответ: $180°$.





Решение 1. Угол между касательной AC и хордой AM окружности ω_1 равен вписанному в ω_1 углу, который опирается на AM, то есть $\angle CAB = \angle ADM$. Аналогичные рассуждения для ω_2 дают $\angle ABC = \angle BDM$. Достроим треугольник ADB до параллелограмма $ADBK$ (см. правый рисунок). Треугольники ACB и DAK подобны по двум углам. Точка M — середина отрезков AB и DK, поэтому треугольники ACM и DAM тоже подобны (по углу и пропорциональным сторонам). Значит, $\angle AMC = \angle AMD$. Кроме того, из симметрии точек D и E относительно AB вытекает, что $\angle AME = \angle AMD$. Таким образом, точка E лежит на отрезке CM. $\square$

Решение 2. По свойствам касательных $\angle ADM = \angle CAM$ и $\angle MDB = \angle CBM$. Следовательно,

$$\angle ADB = \angle ADM + \angle MDB = \angle CAM + \angle CBM = 180^\circ - \angle ACB,$$

и четырехугольник $ACBD$ вписанный. Тогда

$$\angle BDC = \angle BAC = \angle MDA \quad \text{и} \quad \angle BCD = \angle BAD = \angle MAD.$$

Значит, треугольники BDC и MDA подобны по двум углам, откуда

$$\frac{BD}{MD} = \frac{BC}{MA} = \frac{CB}{MB}.$$

Поэтому треугольники BDM и CBM подобны по углу и отношению сторон и, в частности, равны углы $\angle CMB$ и $\angle DMB$. В силу симметрии точек D и E относительно AB мы получаем

$$\angle EMB = \angle DMB = \angle CMB.$$

Значит, точка E лежит на прямой CM, откуда $\angle CEM = 180^\circ$. $\square$

Решение 3. Положим

$$\alpha = \angle CAB, \;\; \beta = \angle ABC, \;\; \varphi = \angle AMD, \;\; \psi = \angle AMC.$$

Угол между касательной AC и хордой AM окружности ω_1 равен вписанному в ω_1 углу, который опирается на AM, то есть $\angle CAB = \angle ADM$. Аналогичные рассуждения для ω_2 дают равенство $\angle ABC = \angle BDM$. Заметим, что

$$\angle DAM = 180^\circ - \alpha - \varphi \quad \angle DMB = 180^\circ - \beta - (180^\circ - \varphi) = \varphi - \beta.$$

Тогда теорема синусов для треугольников ADM и DMB дает

$$\frac{AM}{\sin\alpha} = \frac{DM}{\sin(\alpha+\varphi)}, \qquad \frac{BM}{\sin\beta} = \frac{DM}{\sin(\varphi-\beta)}.$$

Так как $AM = BM$, из этих равенств можно исключить стороны. Мы получим

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin(\alpha+\varphi)}.$$

Аналогичные рассуждения для треугольников ACM и CMB дают

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\psi-\beta)}{\sin(\alpha+\psi)}.$$

Исключая левую часть этих соотношений, мы получим

$$\sin(\varphi-\beta)\sin(\psi+\alpha) = \sin(\psi-\beta)\sin(\varphi+\alpha) \Longleftrightarrow \cos(\varphi-\beta-\alpha-\psi) - \cos(\varphi-\beta+\alpha+\psi) =$$
$$= \cos(\psi-\beta-\alpha-\varphi) - \cos(\varphi-\beta+\alpha+\psi) \Longleftrightarrow 2\sin(\alpha+\beta)\sin(\varphi-\psi) = 0,$$

откуда $\varphi=\psi$. Кроме того, из симметрии точек D и E относительно AB вытекает, что $\angle AME=\varphi$. Таким образом, точка E лежит на отрезке CM. $\square$

4. *На доске написано произведение чисел $\overline{\text{ИКС}}$ и $\overline{\text{КСИ}}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам. Это произведение содержит три цифры С и по одной И, К и 0, причем старшая его цифра равна С. Что написано на доске?*

Ответ: $112\,015=521\cdot 215$.

Решение. Положим $p=\overline{\text{ИКС}}\cdot\overline{\text{КСИ}}$. Числа $(\text{И}+\text{К}+\text{С})^2$ и $(\text{И}+\text{К}+3\text{С})$ дают при делении на 9 одинаковые остатки, откуда $\text{С} \bmod 9=\frac{(\text{И}+\text{К}+\text{С})(\text{И}+\text{К}+\text{С}-1)}{2} \bmod 9$. Зависимость между числами n и $\frac{n(n-1)}{2} \bmod 9$ приведена в таблице:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{n(n-1)}{2} \bmod 9$	0	1	3	6	1	6	3	1	0

(далее остатки будут циклически повторяться). Таким образом, $\text{С}\in\{1,3,6,9\}$. Случай $\text{С}=9$ невозможен, поскольку С является старшей цифрой p и $p<(\text{И}+1)\cdot(\text{К}+1)\cdot 10\,000\leqslant 900\,000$. Справедливы неравенства

$$\text{С}\geqslant\left[\frac{\text{И}\cdot\text{К}}{10}\right]\quad\text{и}\quad \text{С}\leqslant\frac{(\text{И}+1)(\text{К}+1)}{10}. \qquad (*)$$

Рассмотрим три случая.

1) $\text{С}=1$. Из таблицы мы находим, что $\text{И}+\text{К}+1\in\{8,11,14,17\}$, то есть $\text{И}+\text{К}\in\{7,10,13,16\}$. Обозначим через Ц предпоследнюю цифру p. Тогда $\text{Ц}=(1+\text{И}\cdot\text{К}) \bmod 10$. Заметим, что $\text{Ц}\neq\text{И}$, поскольку И — младшая цифра p. Кроме того, $\text{Ц}\neq 0$, так как произведение различных цифр И и К не может оканчиваться на 9. Если $\text{Ц}=\text{К}$, то $1+(\text{И}-1)\cdot\text{К}\ \vdots\ 10$, поэтому $(\text{И}-1)\cdot\text{К}$ оканчивается на 9. Допустимыми парами $(\text{И},\text{К})$ будут $(4,3)$, $(8,7)$, $(2,9)$. Подходящее значение $\text{И}+\text{К}$ получится только для пары $(4,3)$, но она нам не подходит, так как $431\cdot 314=135\,334$. Таким образом, $\text{Ц}=\text{С}=1$, откуда $\text{И}\cdot\text{К}\ \vdots\ 10$. Первое из неравенств $(*)$ дает $\text{И}\cdot\text{К}\leqslant 19$. Поэтому $\text{И}\cdot\text{К}=10$, то есть пара $(\text{И},\text{К})$ равна $(2,5)$ или $(5,2)$. Поскольку $251\cdot 512=128\,512$ и $521\cdot 215=112\,015$, нам подходит только второй случай.

2) $\text{С}=3$. Из таблицы мы находим, что $\text{И}+\text{К}+3\in\{7,12,16\}$, то есть $\text{И}+\text{К}\in\{9,13\}$, поскольку цифры И, К, С различны. Пусть $\text{И}+\text{К}=9$. Второе из неравенств $(*)$ дает $(\text{И}+1)(\text{К}+1)\geqslant 30$, откуда пара $(\text{И},\text{К})$ равна $(4,5)$ или $(5,4)$. Первый случай невозможен, так как p будет оканчиваться на 2, а во втором мы получим $543\cdot 435=236\,205$, что нам также не подходит. Пусть $\text{И}+\text{К}=13$. Из первого неравенства $(*)$ вытекает, что $\text{И}\cdot\text{К}\leqslant 39$, поэтому пара $(\text{И},\text{К})$ равна $(4,9)$ или $(9,4)$. Тогда p будет оканчиваться на 7 или 2, что невозможно.

3) $\text{С}=6$. Из таблицы мы находим, что $\text{И}+\text{К}+6\in\{13,15,22\}$, откуда $\text{И}+\text{К}\in\{7,9,16\}$. В первых двух случаях $(\text{И}+1)(\text{К}+1)\leqslant 30$, что невозможно в силу $(*)$. Поэтому $\text{И}+\text{К}=16$, то есть пара $(\text{И},\text{К})$ равна $(7,9)$ или $(9,7)$. Тогда p будет оканчиваться на 2 или 4, что невозможно. $\square$

5. *По краю круглого стола стоят $2n$ пустых стаканов ($n\geqslant 2$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в пустые стаканы апельсиновый и яблочный сок. За один ход каждый игрок выбирает два пустых стакана и заполняет их одинаковым видом сока (на свой выбор). Игра заканчивается, когда все стаканы заполнены. Петя хочет добиться того, чтобы по окончании игры образовался такой стакан, что в соседние с ним стаканы налит сок противоположного вида. При каких n он может добиться своей цели вне зависимости от действий Васи?*

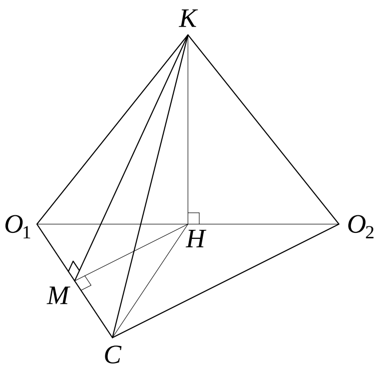
Ответ: ни при каких.

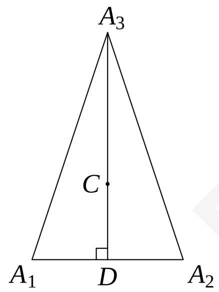
Решение. Разобьем весь набор стаканов на пары соседних. Чтобы нарушить планы Пети, Вася должен придерживаться следующей стратегии. Если Петя заполняет два стакана из одной пары, то Вася — два стакана из другой пары. Если же Петя заполняет стаканы из двух разных пар, то Вася заполняет два других стакана из этих же пар тем же соком, что и Петя.

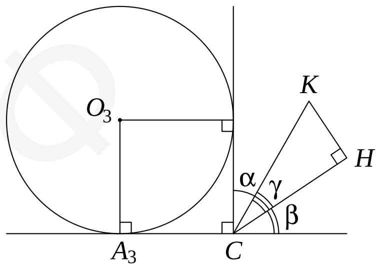
В результате таких действий Васи на каждом шаге если оба стаканы одной пары заполнены, то одинаковыми напитками. Заметим, что три последовательных заполненных стакана обязательно содержат целую пару. Поэтому тройки стаканов, в которой любые два соседних напитка различны, получиться не может. □

6. *На столе лежат шары радиусов 4, 4, 5, касаясь друг друга внешним образом. Вершина конуса C находится на столе, а сам конус касается внешним образом всех шаров. Точка C равноудалена от центров двух равных шаров, а третьего шара конус касается образующей, перпендикулярной столу. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2 \operatorname{arcctg} 7$.







Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, A_1, A_2, A_3 — точки касания шаров со столом, 2α — угол при вершине конуса, $\varphi = \angle O_1CA_1$. Прямая, проходящая через C перпендикулярно столу, касается шара с центром O_3, откуда $\angle A_3CO_3 = 45^\circ$ и $A_3C = 5$. Пусть A_3D — высота треугольника $A_1A_2A_3$ (см. средний рисунок). Из условия касания шаров

$$A_1A_3 = A_2A_3 = \sqrt{(5+4)^2 - (5-4)^2} = \sqrt{80}, \quad A_1D = 4,$$

откуда

$$A_3D = \sqrt{A_1A_3{}^2 - A_1D^2} = 8, \quad \text{и} \quad CD = A_3D - A_3C = 3.$$

Так как $A_1C = 2\operatorname{ctg}\varphi$, из теоремы Пифагора мы получим

$$A_1C^2 = A_1D^2 + CD^2 \iff 16\operatorname{ctg}^2\varphi = 25 \iff \operatorname{ctg}\varphi = \tfrac{5}{4}.$$

Выберем на оси симметрии конуса точку K так, что ее проекция H на плоскость CO_1O_2 попадает на отрезок O_1O_2 (см. левый рисунок). Положим $\gamma = \angle HCK$, β — угол между CH и столом. Образующие, по которым конус касается одинаковых шаров, лежат в плоскостях KCO_1 и KCO_2, откуда

$$\angle KCO_1 = \angle KCO_2 = \varphi + \alpha.$$

Кроме того, по условию $CO_1 = CO_2$. Отметим несколько простых фактов.

1) *H — точка касания равных шаров.* Действительно, треугольники KCO_1 и KCO_2 равны, откуда $KO_1 = KO_2$. Так как $KH \perp O_1O_2$, мы получим $HO_1 = HO_2$.

2) *Плоскость HCK перпендикулярна O_1O_2.* Действительно, треугольник O_1CO_2 равнобедренный, а H — середина O_1O_2, откуда $CH \perp O_1O_2$. Очевидно также, что $KH \perp O_1O_2$.

3) *Если KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1, то $MH \perp CO_1$.* Это вытекает из обратной теоремы о трех перпендикулярах.

Пусть KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1. Из 1) и 2) вытекает, что прямая CH касается равных шаров. Тогда $\angle O_1CH = \angle O_1CA_1 = \varphi$, и в силу 3)

$$\cos\gamma = \frac{CH}{CK} = \frac{CM}{\cos\angle O_1CH} : \frac{CM}{\cos\angle KCO_1} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\varphi} = \cos\alpha - \operatorname{tg}\varphi\,\sin\alpha = \cos\alpha - \frac{4}{5}\sin\alpha.$$

Поскольку CH и CA_1 — отрезки касательных к сфере, мы получаем

$$CH = CA_1 = 4\operatorname{ctg}\varphi = 5, \quad \text{откуда} \quad \sin\beta = \frac{4}{CH} = \frac{4}{5} \text{ и } \cos\beta = \frac{3}{5}.$$

В силу 1) и 2) плоскость HCK состоит из точек, равноудаленных от O_1 и O_2, поэтому она содержит точку O_3. Значит, $\gamma = 90^\circ - \beta - \alpha$ (см. правый рисунок). Тогда

$$\cos\alpha - \tfrac{4}{5}\sin\alpha = \cos\gamma = \sin(\beta+\alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha = \tfrac{4}{5}\cos\alpha + \tfrac{3}{5}\sin\alpha,$$

откуда $\operatorname{ctg}\alpha = 7$. $\square$