Вариант 4

1. *Каждая клетка таблицы 5×5 окрашена в один из трех цветов: синий, красный или жёлтый. При этом в каждой строке таблицы число жёлтых клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа синих клеток, а в каждом столбце таблицы число красных клеток не меньше числа жёлтых клеток и не меньше числа синих клеток. Сколько синих клеток может быть в такой таблице? Приведите пример соответствующей раскраски.*

Ответ: 5.

С	К	К	Ж	Ж
Ж	С	Ж	К	К
К	К	С	Ж	Ж
К	Ж	Ж	С	К
Ж	Ж	К	К	С

Решение. Так как в каждой строке желтых клеток не меньше, чем красных, их не меньше и во всей таблице. Тогда желтых и красных клеток поровну в каждом столбце. Действительно, если в одном из столбцов желтых клеток меньше, чем красных, то их будет меньше и во всей таблице, поскольку в остальных столбцах их не больше, чем красных. Кроме того, число красных клеток в каждом столбце не меньше $\frac{5}{3}$, то есть оно по крайней мере 2. Значит, таблица содержит как минимум 10 красных клеток и столько же желтых. Поэтому в таблице имеется не более 5 синих клеток. С другой стороны, в каждом столбце общее число желтых и красных клеток четно, поэтому в нем имеется хотя бы одна синяя клетка. Значит, таблица содержит не менее 5 синих клеток. Пример раскраски с пятью синими клетками приведен на рисунке. $\square$

2. *Даны числа $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt[4]{\sin x \sin y}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} + \sqrt[4]{\operatorname{tg} y}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$.

Решение. Заметим, что $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} \leqslant \sqrt[4]{8(a+b)}$ при любых $a, b \geqslant 0$, поскольку

$$\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4 \leqslant \left(2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\right)^2 \leqslant 8\,(a+b)^4.$$

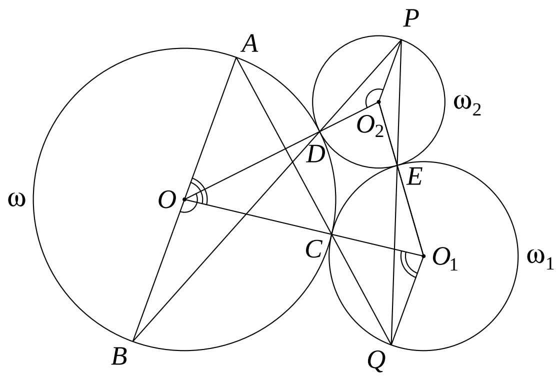
Применяя неравенство для среднего гармонического и среднего арифметического, мы получим

$$A \leqslant \frac{1}{4}\sqrt[4]{\sin x \sin y}\left(\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x} + \sqrt[4]{\operatorname{ctg} y}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt[4]{\sin x \cos y} + \sqrt[4]{\cos x \sin y}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sqrt[4]{8}}{4}\sqrt[4]{\sin x \cos y + \cos x \sin y} = \frac{\sqrt[4]{8}}{4}\sqrt[4]{\sin(x+y)} \leqslant \frac{\sqrt[4]{8}}{4}.$$

Равенство реализуется при $x = y = \frac{\pi}{4}$. $\square$

3. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, центр которой лежит на стороне AB. Окружность ω_1 касается внешним образом окружности ω в точке C. Окружность ω_2 касается окружностей ω и ω_1 в точках D и E соответственно. Прямая BD вторично пересекает окружность ω_2 в точке P, а прямая AC вторично пересекает окружность ω_1 в точке Q. Найдите угол PEQ.*

Ответ: 180°.



Решение 1. Так как $\angle ACO = \angle QCO_1$, равнобедренные треугольники AOC и QO_1C подобны, откуда $\angle AOC = \angle QO_1C$. Аналогично проверяется, что $\angle BOD = \angle PO_2D$. Тогда отрезки O_1Q и O_2P параллельны прямой AB и, значит, друг другу. Поэтому $\angle O_1QE = \angle O_2PE$, что эквивалентно $\angle O_1EQ = \angle O_2EP$. Значит, точка E лежит на отрезке PQ, откуда $\angle PEQ = 180^\circ$. $\square$

Решение 2. Отметим полезное свойство касающихся окружностей: *если секущая UV проходит через точку T касания двух окружностей, то вписанные углы, опирающиеся на высекаемые ей дуги, равны.* Действительно, поскольку вписанный угол равен углу между касательной и секущей, справедливы равенства $\angle UU_1T = \angle UTY = \angle XTV = \angle VV_1T$ (см. левый рисунок ниже).

Обозначим точку пересечения AD и BC через R. Пусть $\angle OO_1O_2 = 2\alpha$ и $\angle OO_2O_1 = 2\beta$. Тогда из равнобедренности треугольников O_1CE и O_2DE мы получаем, что

$$\angle O_1EC = 90^\circ - \alpha, \quad \angle O_2ED = 90^\circ - \beta \quad \text{и} \quad \angle CED = 180^\circ - \angle O_1EC - \angle O_2ED = \alpha + \beta.$$

С другой стороны, из суммы углов треугольника OO_1O_2 находим, что $\angle COD = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$. Вписанный угол $\angle CAD$ — половина центрального угла $\angle COD$. Тогда

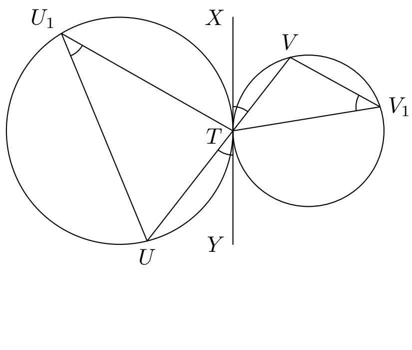
$$\angle DAC = 90^\circ - \alpha - \beta, \quad \angle ACR = \angle ACB = 90^\circ, \quad \text{откуда} \quad \angle DRC = \alpha + \beta.$$

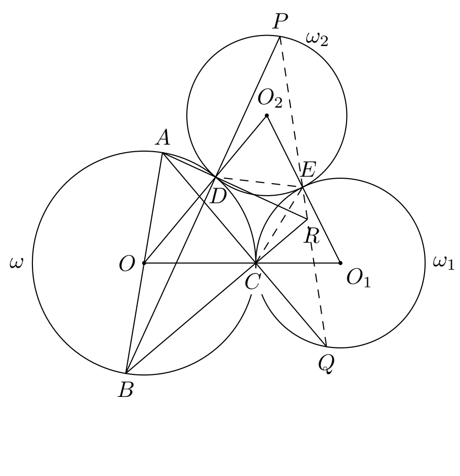
Таким образом, $\angle DRC = \angle DEC$. В силу доказанного выше утверждения

$$\angle PED = \angle BAD = \angle RAB \quad \text{и} \quad \angle CEQ = \angle ABC = \angle RBA.$$

Теперь мы можем найти угол PEQ:

$$\begin{aligned}\angle PEQ &= \angle PED + \angle DEC + \angle CEQ = \angle PED + \angle DRC + \angle CEQ = \\ &= \angle PED + 180^\circ - \angle RAB - \angle RBA + \angle CEQ = 180^\circ. \quad \square\end{aligned}$$





4. *Имеются четырехзначные числа m и n, получаемые друг из друга записью цифр в обратном порядке. Известно, что число mn делится на 100, а его десятичная запись состоит из четырех пар одинаковых соседних цифр. Найдите m и n.*

Ответ: $6325 \cdot 5236 = 33\,11\,77\,00$.

Решение. Запишем

$$m = \overline{abcd}, \quad n = \overline{dcba}, \quad mn = \overline{xxyyzz00}.$$

Ясно, что одно из чисел m и n оканчивается на 5 (пусть это будет m). Тогда $d = 5$, цифра a четна. Очевидно, что mn кратно 11. Так как

$$m \bmod 11 = (b + d - a - c) \bmod 11 = (-n) \bmod 11,$$

числа m и n делятся на 11, а их произведение делится на 121. Поскольку $\overline{xxyyzz} = 11 \cdot \overline{x0y0z}$, мы получаем $x + y + z \,\vdots\, 11$, откуда $x + y + z$ равно 11 или 22. Заметим, что

$$(a + b + c + d)^2 \bmod 9 = mn \bmod 9 = \overline{xxyyzz00} \bmod 9 = 2\,(x + y + z) \bmod 9.$$

Зависимость между числами p и $p^2 \bmod 9$ приведена в таблице:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p^2 \bmod 9$	1	4	0	7	7	0	4	1	0

(далее остатки будут циклически повторяться). Так как $44 \bmod 9 = 8$, случай $x + y + z = 22$ невозможен. Если $x + y + z = 11$, с учетом $d = 5$ мы получаем $(a + b + c + 5)^2 \bmod 9 = 22 \bmod 9 = 4$. Кроме того, $b + 5 - a - c$ кратно 11. Рассмотрим два случая.

1) *Пусть* $a + c = b + 5 \pm 11$. Тогда

$$4 = (a + b + c + 5)^2 \bmod 9 = \big(2(b + 5) \pm 11\big)^2 \bmod 9 = 4(b + 5 \pm 1)^2 \bmod 9 \iff (b + 5 \pm 1)^2 = 1 \bmod 9,$$

и по таблице $b + 5 \pm 1$ равно 8 или 10. В случае плюса $a + c$ будет равно 18 или 20, что невозможно. При минусе $a + c$ окажется неположительным, чего ввиду $a > 0$ также быть не может.

2) *Пусть* $a + c = b + 5$. Тогда по таблице $b + 5$ равно 8 или 10, то есть b равно 3 или 5. Вычисляя предпоследнюю цифру mn, мы получим

$$0 = \left(5b + ac + \tfrac{a}{2}\right) \bmod 10 = \left(5 + ac + \tfrac{a}{2}\right) \bmod 10. \qquad (*)$$

Так как a четно, допустимыми парами (a, c) при $b = 3$ будут $(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$, $(8, 0)$, а при $b = 5$ — $(2, 8)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$, $(8, 2)$. Подставляя эти пары в правую часть $(*)$, мы получим

$$8,\ 3,\ 0,\ 9,\ 2,\ 1,\ 2,\ 5.$$

Значит, условию $(*)$ удовлетворяет только $m = 6325$. Поскольку $6325 \cdot 5263 = 33\,11\,77\,00$, это число и дает ответ. □

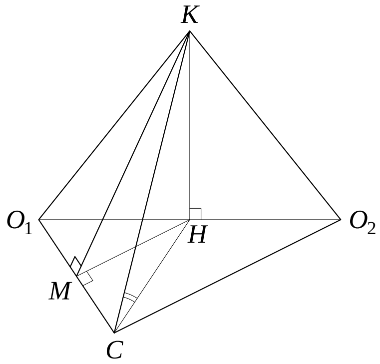
5. *По краю круглого стола стоит n пустых стаканов ($n \geqslant 3$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них напитки: Петя — квас, Вася — морс. За один ход игрок может заполнить один пустой стакан на свой выбор так, чтобы после его хода не образовалось двух соседних стаканов с одинаковым напитком. Если в результате действий игроков заполняются все стаканы, то игра заканчивается вничью. В противном случае проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?*

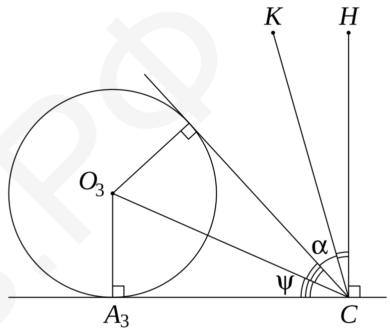
Ответ: ни при каких.

Решение. Стратегия Васи заключается в следующем: на каждом шаге он должен заполнять стакан, следующий по часовой стрелке за тем, что предыдущим ходом наполнил Петя. Покажем, что это всегда можно сделать. Воспользуемся индукцией по числу ходов Пети. Так как $n \geqslant 3$, база индукции очевидна. Допустим, что для k шагов эта стратегия проходит. Перед $(k+1)$-м ходом Пети стаканы с квасом и морсом образуют соседние пары: по часовой стрелке морсу предшествует квас. Пусть Петя налил квас в очередной стакан. По условию в следующем стакане не может быть квас. Не может быть там и морс, так как морсу всегда предшествует стакан с квасом, и Петя заполнил бы его повторно. Значит, следующий стакан пуст. Наконец, в стакане, находящемся через один от налитого Петей, морса нет, поскольку предшествующий морсу стакан обязательно заполнен. Таким образом, Вася может сделать следующий ход. $\square$

6. *На столе лежат шары радиусов 2, 2, 5, касаясь друг друга внешним образом. Вершина конуса находится посередине между точками касания одинаковых шаров со столом, а сам конус касается внешним образом всех шаров. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\operatorname{arcctg} 72$.





Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, A_1, A_2, A_3 — точки касания шаров со столом, C — вершина конуса, 2α — угол при его вершине, $\varphi = \angle O_1CA_1$, $\psi = \angle O_3CA_3$. Из условия касания шаров

$$CA_1 = 2 \quad \text{и} \quad A_1A_3 = A_2A_3 = \sqrt{(5+2)^2 - (5-2)^2} = \sqrt{40}.$$

Тогда

$$CA_3 = \sqrt{A_1A_3{}^2 - CA_1{}^2} = 6 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{O_3A_3}{CA_3} = \frac{5}{6}.$$

Кроме того, $O_1A_1 = 2 = CA_1$, откуда $\varphi = 45^\circ$.

Выберем на оси симметрии конуса точку K так, что ее проекция H на плоскость CO_1O_2 попадает на отрезок O_1O_2 (см. левый рисунок). Образующие, по которым конус касается одинаковых шаров, лежат в плоскостях KCO_1 и KCO_2, откуда

$$\angle KCO_1 = \angle KCO_2 = \varphi + \alpha = 45^\circ + \alpha.$$

Кроме того, $CO_1 = 2\sqrt{2} = CO_2$. Отметим несколько простых фактов.

1) *H — точка касания равных шаров.* Действительно, треугольники KCO_1 и KCO_2 равны, откуда $KO_1 = KO_2$. Так как $KH \perp O_1O_2$, мы получим $HO_1 = HO_2$.

2) *Плоскость KCH перпендикулярна O_1O_2.* Действительно, треугольник O_1CO_2 равнобедренный, а H — середина O_1O_2, откуда $CH \perp O_1O_2$. Очевидно также, что $KH \perp O_1O_2$.

3) *Если KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1, то $MH \perp CO_1$.* Это вытекает из обратной теоремы о трех перпендикулярах.

Пусть KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1. Из 1) и 2) вытекает, что прямая CH касается равных шаров, поэтому $\angle O_1CH = \angle O_1CA_1 = 45^\circ$. Тогда в силу 3)

$$\cos\angle HCK = \frac{CH}{CK} = \frac{CM}{\cos\angle O_1CH} : \frac{CM}{\cos\angle KCO_1} = \frac{\cos\angle KCO_1}{\cos\angle O_1CH} = \frac{\cos(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ} = \cos\alpha - \sin\alpha.$$

С другой стороны, в силу 1) и 2) плоскость HCK состоит из точек, равноудаленных от O_1 и O_2. Значит, HCK содержит точку O_3. Тогда (см. правый рисунок)

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \cos\angle HCK = \cos(90^\circ - 2\psi - \alpha) = \sin(2\psi+\alpha) = \sin 2\psi\cos\alpha + \cos 2\psi \sin\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\sin 2\psi}{1+\cos 2\psi} = \frac{(\sin\psi - \cos\psi)^2}{2\cos^2\psi} = \frac{(\operatorname{tg}\psi - 1)^2}{2} = \frac{1}{72}. \quad \square$$