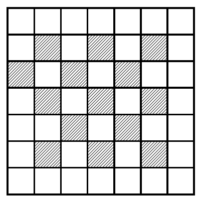
Вариант 2

1. *На клетчатой доске 7×7 отмечено 14 клеток. Назовем пару клеток с общей стороной интересной, если хотя бы одна клетка из пары отмечена. Какое наибольшее количество интересных пар может быть?*

Ответ: 55.

Решение. Назовем *соседними* две клетки с общей стороной. Число интересных пар, содержащих заданную отмеченную клетку, не больше 4, а для граничной клетки — не больше 3. Тогда общее число интересных пар не превосходит $14 \cdot 4 = 56$. При этом если среди отмеченных клеток есть две соседние, то содержащая их интересная пара считается дважды. Заметим, что среди 14 клеток из квадрата 5×5 обязательно есть две соседних. Поэтому среди отмеченных клеток имеется либо граничная, либо две соседних. Таким образом, общее число интересных пар не превосходит 55. Пример разметки с 55 интересными парами приведен ниже. □



2. *Даны положительные числа a, b, c, d. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \left(\frac{a^2+b^2}{cd}\right)^4 + \left(\frac{b^2+c^2}{ad}\right)^4 + \left(\frac{c^2+d^2}{ab}\right)^4 + \left(\frac{d^2+a^2}{bc}\right)^4.$$

Ответ: 64.

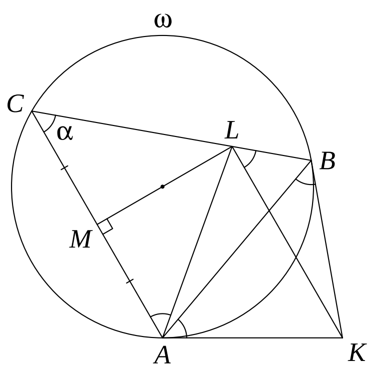
Решение. В силу неравенств Коши для средних

$$A \geqslant 4 \cdot \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+d^2)(d^2+a^2)}{cd \cdot ad \cdot ab \cdot bc} = 64 \cdot \frac{a^2+b^2}{2ab} \cdot \frac{b^2+c^2}{2bc} \cdot \frac{c^2+d^2}{2cd} \cdot \frac{d^2+a^2}{2da} \geqslant 64.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = d = 1$. □

3. *Вокруг треугольника ABC описана окружность ω. Касательные к окружности, проведенные в точках A и B, пересекаются в точке K. Точка M — середина стороны AC. Прямая, проходящая через точку K параллельно AC, пересекает сторону BC в точке L. Найдите угол AML.*

Ответ: 90°.



Решение. Положим $\alpha = \angle ACB$. Угол между касательной AK и хордой AB окружности ω равен вписанному в нее углу, который опирается на AB, откуда $\alpha = \angle BAK = \angle ABK$. Так как

$AC \parallel KL$, мы получаем $\angle BLK = \angle ACB = \angle BAK$. Значит, четырехугольник $ALBK$ — вписанный. Тогда

$$\angle ALC = 180^\circ - \angle ALB = \angle AKB = 180^\circ - 2\alpha \quad \text{и} \quad \angle LCA = \alpha = 180^\circ - \angle ALC - \alpha = \angle LAC.$$

Поэтому треугольник ALC равнобедренный, а его медиана LM является также и высотой. Таким образом, $\angle AML = 90^\circ$. $\square$

4. *На доске написано произведение чисел $\overline{\text{ИКС}}$ и $\overline{\text{КСИ}}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам. Это произведение шестизначное и оканчивается не на ноль. Петя стер с доски все нули и одну цифру С, после чего там осталось ИКС. Что было написано на доске?*

Ответ: $206\,032 = 632 \cdot 326$.

Решение. Положим $p = \overline{\text{ИКС}} \cdot \overline{\text{КСИ}}$. В десятичную запись p входят цифры И, К входят по одному разу, а цифры С и 0 — по два раза. Тогда числа $(\text{И} + \text{К} + \text{С})^2$ и $(\text{И} + \text{К} + 2\text{С})$ дают при делении на 9 одинаковые остатки, откуда $\text{С} \bmod 9 = (\text{И}+\text{К}+\text{С})(\text{И}+\text{К}+\text{С}-1) \bmod 9$. Зависимость между числами n и $n(n-1) \bmod 9$ приведена в таблице:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n(n-1) \bmod 9$	0	2	6	3	2	3	6	2	0

(далее остатки будут циклически повторяться). Таким образом, $\text{С} \in \{2, 3, 6, 9\}$. Младшей цифрой числа p является С, так как p оканчивается не на ноль. С другой стороны, младшая цифра p равна остатку от деления $\text{С} \cdot \text{И}$ на 10. Поэтому $\text{С} \cdot (\text{И} - 1) \,\vdots\, 10$. Поскольку цифра С не делится на 5, возможны два случая.

1) $\text{И} = 1$. Предпоследняя цифра числа p равна остатку от деления $\text{С}^2 + \text{К}$ на 10. Поскольку С^2 не делится на 10, эта цифра отлична от К. Значит, она равна С или 0. Пусть вначале она равна С. Тогда $\text{С}^2 - \text{С} + \text{К} \,\vdots\, 10$. Остатки от деления $\text{С}^2 - \text{С}$ на 10 принимают только значения 0, 2 и 6, откуда К равно 4 или 8. При $\text{К} = 4$

$$(5 + \text{С})^2 - 5 - 2\text{С} \,\vdots\, 9 \iff \text{С}^2 + 8\text{С} - 7 \,\vdots\, 9 \iff \text{С}\,(\text{С} - 1) \bmod 9 = 7,$$

что невозможно (см. таблицу). Если $\text{К} = 8$, то $\text{И} + \text{К} = 9$ и $(\text{С}^2 - 2\text{С}) \,\vdots\, 9$, откуда $\text{С} = 2$ или $\text{С} = 9$. Эти случаи нам не подходят, поскольку $189 \cdot 891 = 168\,399$ и $182 \cdot 821 = 149\,422$.

Пусть теперь предпоследняя цифра числа p равна нулю. Тогда $\text{С}^2 + \text{К}$ делится на 10. Поскольку $\text{С}^2 \bmod 10 \in \{1, 4, 6, 9\}$ и цифры И, К, С различны, пара $(\text{К}, \text{С})$ может быть равна $(6, 2)$ или $(4, 6)$. Так как $162 \cdot 621 = 100\,602$ и $146 \cdot 461 = 67\,306$, эти случаи также не подходят.

2) $\text{И} = 6$ и цифра С четна. Тогда $\text{С} = 2$, поскольку $\text{С} \neq \text{И}$. Из таблицы мы получаем

$$\text{И} + \text{К} + \text{С} \in \{11, 14, 17\} \iff 8 + \text{К} \in \{11, 14, 17\} \iff \text{К} \in \{3, 9\},$$

так как $\text{К} \neq \text{И}$. Если $\text{К} = 9$, то $692 \cdot 926 = 640\,792$, что нам не подходит. В случае $\text{К} = 3$ мы получаем $632 \cdot 326 = 206\,032$, что и дает ответ. $\square$

5. *На окружности отмечено n точек ($n \geqslant 5$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек, не являющихся соседними. Любые две проведенные хорды могут пересекаться только концевыми точками. Проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?*

Ответ: при четных n.

Решение 1. Действия игроков можно описать так: они проводят в n-угольнике диагонали, пересекающиеся разве что концами. Для удобства мы можем считать этот n-угольник правильным. Пусть n четно, то есть $n = 2m$. Победу Пете обеспечит следующая стратегия. Первым ходом он должен провести диагональ, разбивающую n-угольник на два одинаковых $(m+1)$-угольника. Далее любая хорда, проведенная Васей, будет проходить в одном из двух $(m+1)$-угольников. В ответ Петя может провести такую же хорду в другом $(m+1)$-угольнике. Таким образом, у Пети всегда есть ход, и он выиграет.

Пусть n нечетно. Назовем *ключевой* позицию, в которой исходный n-угольник разбит на несколько многоугольников (возможно, один) с нечетным числом вершин. Докажем следующее утверждение: *если Петя делает ход в ключевой позиции, то Вася может ответить так, чтобы вновь возникла ключевая позиция.* Действительно, любой ход Пети — диагональ в одном из многоугольников (скажем, Δ), на которые разбит n-угольник. Эта диагональ разрезает Δ на два многоугольника с четным и нечетным числом вершин. В ответ Вася должен провести хорду, отрезающую треугольник от многоугольника с четным числом сторон. Таким образом, Δ распадется на три многоугольника с нечетным числом вершин, и вновь возникнет ключевая позиция.

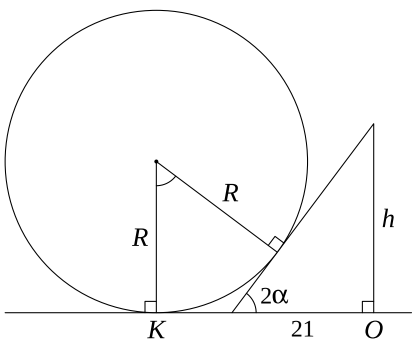
Заметим, что исходная позиция — ключевая. Следуя описанной выше стратегии, Вася всегда может сделать ответный ход, поэтому он выиграет. $\square$

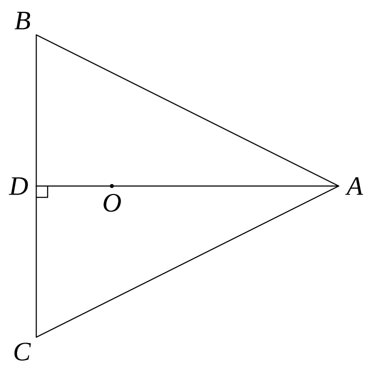
Решение 2. Действия игроков можно описать так: они проводят в n-угольнике диагонали, пересекающиеся разве что концами. Для удобства мы можем считать этот n-угольник правильным. Пусть n четно, то есть $n = 2m$. Победу Пете обеспечит следующая стратегия. Первым ходом он должен провести диагональ, разбивающую n-угольник на два одинаковых $(m+1)$-угольника. Далее любая хорда, проведенная Васей, будет проходить в одном из двух $(m+1)$-угольников. В ответ Петя может провести такую же хорду в другом $(m+1)$-угольнике. Таким образом, у Пети всегда есть ход, и он выиграет.

Пусть n нечетно, то есть $n = 2m + 1$. Докажем по индукции, что при любом m у Васи есть победная стратегия. База индукции очевидна: в треугольнике у Пети нет ходов. Пусть при любом $k < m$ такая стратегия существует для $(2k+1)$-угольника. Первая хорда, проведенная Петей, разделит исходный многоугольник на два: Δ с четным числом вершин и Δ' с нечетным. Заметим, что при игре только в Δ победу может себе гарантировать первый игрок (так как число вершин в Δ четно), а при игре только в Δ' — второй игрок (по индукционному предположению). Опишем выигрышную стратегию Васи. Первый его ход должен быть в Δ, а затем каждый раз Вася проводит хорду в том же многоугольнике (Δ или Δ'), что перед этим Петя. Покажем, что у Васи всегда найдется ход. Действительно, игра идет параллельно в двух многоугольниках, причем в Δ начинает Вася, а в Δ' — Петя. Поэтому для Δ и Δ' у Васи есть победные стратегии и, следуя им, он всегда сможет сделать очередной ход. $\square$

6. *На столе находятся три шара и конус (основанием к столу), касаясь друг друга внешним образом. Радиусы шаров равны* 20, 40 *и* 40, *а радиус основания конуса равен* 21. *Найдите высоту конуса.*

Ответ: 28.





Решение. Пусть O — центр основания конуса, h — его высота, 2α — угол наклона образующих конуса к столу. Рассмотрим сечение, проходящее через ось симметрии конуса и центр одного из шаров (см. левый рисунок). Пусть K — точка касания шара со столом, R — радиус шара. Тогда

$$OK = R \cdot \operatorname{tg}\alpha + 21. \qquad (*)$$

Обозначим через A, B, C точки касания шаров со столом (см. правый рисунок). Из условия касания шаров $BC = 80$ и

$$AB = AC = \sqrt{(40+20)^2 - (40-20)^2} = 40\sqrt{2}.$$

Значит, высота AD треугольника ABC является серединным перпендикуляром к BC. Из $(*)$ вытекает, что точка O равноудалена от B и C, то есть она лежит на AD, и $OA = 20\operatorname{tg}\alpha + 21$. Заметим, что

$$BD = 40, \qquad AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 40, \qquad OD = AD - OA = 19 - 20\operatorname{tg}\alpha.$$

Равенство $(*)$ дает $OB = 40\operatorname{tg}\alpha + 21$, и по теореме Пифагора

$$OB^2 = OD^2 + BD^2 \Longleftrightarrow \big(40\operatorname{tg}\alpha + 21\big)^2 = \big(19 - 20\operatorname{tg}\alpha\big)^2 + 40^2 \Longleftrightarrow 30\operatorname{tg}^2\alpha + 61\operatorname{tg}\alpha - 38 = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \tfrac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4}{3} \quad \text{и} \quad h = 21 \cdot \operatorname{tg}2\alpha = 28. \quad \square$$