

Вариант 2

1. Докажите, что для любого натурального n существуют такие целые числа x и y , что $x^2 + y^2 - 2018$ делится на n .

Решение. В качестве x и y можно взять числа 43 и 13. Они годятся для всех n , поскольку $43^2 + 13^2 - 2018 = 0$. $\square$

2. Костя «объединил» таблицу сложения и таблицу умножения натуральных чисел: он построил таблицу, у которой строки и столбцы соответствуют натуральным числам, начиная с 3, и заполнил все клетки: в клетку на пересечении r -й строки и s -го столбца он поместил число $rs - (s + r)$.

	3	4	5	...
3	9	12	15	...
4	12	16	20	...
...	...			

Таблица умножения

	3	4	5	...
3	6	7	8	...
4	7	8	9	...
...	...			

Таблица сложения

	3	4	5	...
3	3	5	7	...
4	5	8	11	...
...	...			

Костина таблица

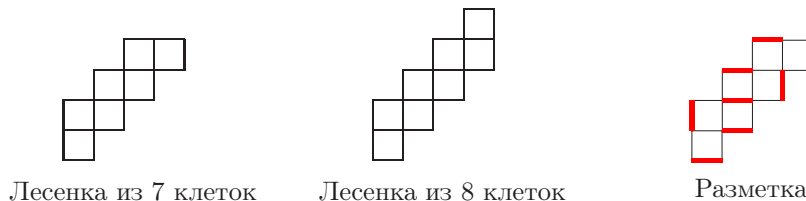
Посмотрев внимательно, Костя обнаружил, что некоторое натуральное число $n > 3$ в его таблице отсутствует (оно присутствует только в подписях к n -й строке и n -му столбцу, а в клетках самой таблицы его не оказалось). Докажите, что тогда число $n + 1$ — простое.

Решение. Если число $n + 1$ не простое, то его можно разложить в произведение двух множителей, больших 1. Запишем их в виде $r - 1$ и $s - 1$, где r и s — натуральные числа, $r, s \geq 3$. Тогда

$$n = n + 1 - 1 = (r - 1)(s - 1) - 1 = rs - s - r,$$

то есть число n содержится в таблице. $\square$

3. Будем называть лесенкой фигуру, состоящую из клеточек, расположенных в виде ступенек (см. на рисунке пример лесенок из 7 и 8 клеток). На рисунке, изображающем лесенку, нарисует разметку: обведем красным цветом несколько непересекающихся сторон клеток так, чтобы каждая вершина каждой клетки принадлежала ровно одному красному отрезку. Сколько различных разметок имеется у лесенки из 200 клеток?



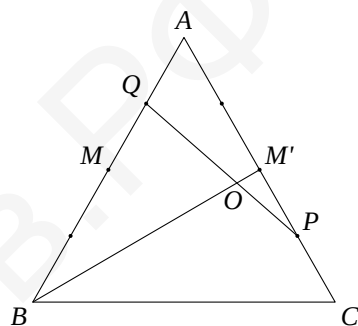
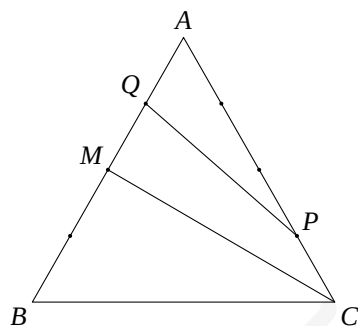
Ответ: 201.

Решение. Обозначим через L_n количество разметок лесенки из n клеток. Пусть точка A — левый нижний угол левой нижней клетки лесенки.

Если красный отрезок, содержащий точку A , горизонтальный, то удалим из лесенки левую нижнюю клетку. Оставшаяся фигура представляет собой перевернутую лесенку из $n - 1$ клетки. Добавляя к любой из L_{n-1} разметок этой лесенки красный отрезок, содержащий A , мы получаем разметку исходной лесенки. Таким образом, имеется ровно L_{n-1} разметок исходной лесенки, в которых отрезок, содержащий точку A , горизонтален. Если же красный отрезок, содержащий точку A , вертикальный, то, как нетрудно видеть, разметка всей лесенки в этом случае достраивается однозначно.

Таким образом, справедливо соотношение $L_n = L_{n-1} + 1$. Учитывая очевидное краевое условие $L_1 = 2$, мы сразу находим, что $L_n = n + 1$. $\square$

4. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC . Точка M — середина стороны AB , точка Q — середина AM , на стороне AC отмечена точка P так, что $AP = 3PC$. Докажите, что $PQ + CM > AB$.



Решение 1. По неравенству треугольника

$$PQ + QA > AP \iff PQ + \frac{1}{4}AB > \frac{3}{4}AC \iff PQ > \frac{1}{2}AB = MA.$$

Тогда

$$PQ + CM > CM + MA > AC = AB. \quad \square$$

Решение 2. Пусть точка M' симметрична M относительно оси симметрии треугольника. Очевидно, $CM = BM'$. Обозначим через O точку пересечения отрезков BM' и PQ . Дважды применяя неравенство треугольника, мы получим

$$BM' + QP = (BO + OQ) + (PO + OM') > BQ + PM' = \frac{3}{4}AB + \frac{1}{4}AC = AB. \quad \square$$

5. Беговая дорожка представляет собой окружность длиной 2 км. Вдоль дуги, длина которой равна 100 м, построены зрительские трибуны. Можно ли запустить по этой дорожке в одном и том же направлении 20 бегунов, движущихся с постоянными скоростями — 10, 11, ..., 29 км/ч — так, чтобы в любой момент времени напротив трибун пробежал хотя бы один из бегунов? (Место старта каждого бегуна можно назначить в любом месте, независимо от остальных бегунов.)

Ответ: нет.

Решение. Пусть Δ — интервал дорожки, идущий вдоль трибун (без концевых точек). Рассмотрим промежуток времени, за который каждый из бегунов пробежит целое число кругов (например, $29!$ часов). Поскольку трибунная дуга составляет $\frac{1}{20}$ длины дорожки, каждый бегун ровно $\frac{1}{20}$ всего этого времени будет находиться возле трибун. Поскольку бегунов ровно 20, требование задачи обеспечивается лишь тогда, когда «трибунные интервалы» бегунов не налегают друг на друга. Иными словами, в промежутке Δ в любой момент времени может быть лишь один бегун. Покажем, что это не так. Пусть A и B — спортсмены, бегущие со скоростями 20 и 21 км/ч соответственно. Допустим, B догнал A в какой-то точке дорожки вне Δ . До начала трибун им надо пробежать не более 1900 метров, и бегун A преодолеет это расстояние максимум за 0,095 часа. Когда A добежит до начала трибун, B будет опережать его не более чем на 95 метров. После этого A и B будут некоторое время находиться в Δ вместе. $\square$

6. На доске написано 1000 нечетных чисел, не делящихся на 5. Докажите, что можно выбрать несколько чисел, так что их сумма будет оканчиваться на 713. (Если выбирается одно число, то оно и равно сумме.)

Решение. Проверим вначале два утверждения.

1) Если число t взаимно просто с 10 000, а числа p и q дают разные остатки при делении на 10 000, то числа pt и qt также дают разные остатки. Действительно, $pt - qt = (p - q)t$. Первый множитель не делится на 10 000, а второй взаимно прост с 10 000.

2) Если число a взаимно просто с 10 000, то существует такое число a' , взаимно простое с 10 000, что $aa' \bmod 10\,000 = 1$. Действительно, в силу 1) остатки от деления на 10 000 чисел $a, 2a, \dots, 9999a$ такие же, как у чисел $1, 2, \dots, 9999$, поэтому среди них есть 1. Если a' и 10 000 имеют общий делитель, то он будет также делителем единицы и потому равен 1.

Докажем по индукции, что если у нас имеется $n \leq 10\,000$ чисел, взаимно простых с 10 000, то всевозможные суммы, составленные из этих чисел, дают не менее n различных остатков по модулю 10 000. База $n = 1$ тривиальна. Пусть мы умеем составлять из $n - 1$ числа суммы $S_1, \dots, S_{n-1}$ с различными остатками $b_1, \dots, b_{n-1}$ (занумеруем остатки по возрастанию). Добавим новое число a . Мы можем считать, что $a = 1$. Действительно, пусть для $a = 1$ все доказано. В общем случае подберем a' в соответствии с 2) и домножим все числа на a' . Суммы этих чисел также домножатся на a' , и в силу 1) количество различных остатков от деления сумм на 10 000 не изменится. При этом число a заменится на $aa' \bmod 10\,000 = 1$, и по предположению различных остатков будет не менее n .

Пусть $a = 1$. Если $b_1, \dots, b_{n-1}$ возрастают с шагом 1, то сумма $S_{n-1} + a$ дает новый остаток $b_{n-1} + 1 \bmod 10\,000$. В противном случае найдется такое $k < n - 1$, что $b_{k+1} - b_k \geq 2$. Тогда сумма $S_k + a$ дает новый остаток $b_k + 1$. $\square$