

**Олимпиада школьников СПбГУ по математике.**

**Заключительный этап. 2017/2018 учебный год. 6 – 7 классы.**

*Вариант 1*

1. Докажите, что для любого натурального  $n$  существуют такие целые числа  $x$  и  $y$ , что  $x^2 + y^2 - 2017$  делится на  $n$ .

**Решение.** В качестве  $x$  и  $y$  можно взять числа 44 и 9. Они годятся для всех  $n$ , поскольку  $44^2 + 9^2 - 2017 = 0$ .  $\square$

2. Костя «объединил» таблицу сложения и таблицу умножения натуральных чисел: он построил таблицу, у которой строки и столбцы соответствуют натуральным числам, и заполнил все клетки: в клетку на пересечении  $r$ -й строки и  $s$ -го столбца он поместил число  $rs + (s + r)$ .

|                   |     |     |     |     |   |                  |     |     |     |     |   |                 |     |     |    |     |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|---|------------------|-----|-----|-----|-----|---|-----------------|-----|-----|----|-----|
|                   | 1   | 2   | 3   | ... |   |                  | 1   | 2   | 3   | ... |   |                 | 1   | 2   | 3  | ... |
| 1                 | 1   | 2   | 3   | ... | + | 1                | 2   | 3   | 4   | ... | = | 1               | 3   | 5   | 7  | ... |
| 2                 | 2   | 4   | 6   | ... |   | 2                | 3   | 4   | 5   | ... |   | 2               | 5   | 8   | 11 | ... |
| ...               | ... | ... | ... | ... |   | ...              | ... | ... | ... | ... |   | ...             | ... | ... |    |     |
|                   |     |     |     |     |   |                  |     |     |     |     |   |                 |     |     |    |     |
| Таблица умножения |     |     |     |     |   | Таблица сложения |     |     |     |     |   | Костина таблица |     |     |    |     |

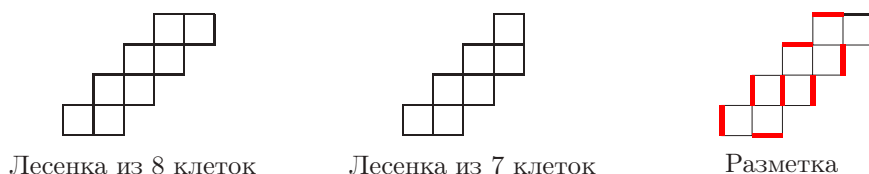
Посмотрев внимательно, Костя обнаружил, что некоторое натуральное число  $n$  в таблице отсутствует (оно присутствует только в подписях к  $n$ -й строке и  $n$ -му столбцу, а в клетках самой таблицы его не оказалось). Докажите, что тогда число  $n + 1$  — простое.

**Решение.** Если число  $n + 1$  не простое, то его можно разложить в произведение двух множителей, больших 1. Запишем их в виде  $r + 1$  и  $s + 1$ , где  $r$  и  $s$  — натуральные числа. Тогда

$$n = n + 1 - 1 = (r + 1)(s + 1) - 1 = rs + s + r,$$

то есть число  $n$  содержится в таблице.  $\square$

3. Будем называть лесенкой фигуру, состоящую из клеточек, расположенных в виде ступенек (см. на рисунке пример лесенок из 7 и 8 клеток). На рисунке, изображающем лесенку, нарисует разметку: обведем красным цветом несколько непересекающихся сторон клеток так, чтобы каждая вершина каждой клетки принадлежала ровно одному красному отрезку. Сколько различных разметок имеется у лесенки из 199 клеток?



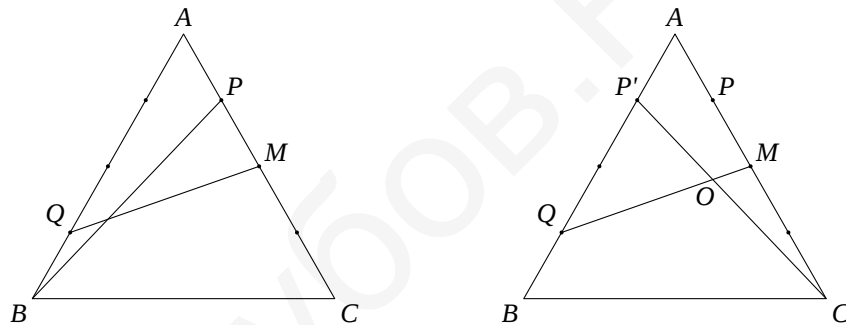
**Ответ:** 200.

**Решение.** Обозначим через  $L_n$  количество разметок лесенки из  $n$  клеток. Пусть точка  $A$  — левый нижний угол левой нижней клетки лесенки.

Если красный отрезок, содержащий точку  $A$ , вертикальный, то удалим из лесенки левую нижнюю клетку. Оставшаяся фигура представляет собой перевернутую лесенку из  $n - 1$  клетки. Добавляя к любой из  $L_{n-1}$  разметок этой лесенки красный отрезок, содержащий  $A$ , мы получаем разметку исходной лесенки. Таким образом, имеется ровно  $L_{n-1}$  разметок исходной лесенки, в которых отрезок, содержащий точку  $A$ , вертикален. Если же красный отрезок, содержащий точку  $A$ , горизонтальный, то, как нетрудно видеть, разметка всей лесенки в этом случае достраивается однозначно.

Таким образом, справедливо соотношение  $L_n = L_{n-1} + 1$ . Учитывая очевидное краевое условие  $L_1 = 2$ , мы сразу находим, что  $L_n = n + 1$ .  $\square$

4. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $BC$ . Точка  $M$  — середина стороны  $AC$ , точка  $P$  — середина  $AM$ , на стороне  $AB$  отмечена точка  $Q$  так, что  $AQ = 3BQ$ . Докажите, что  $BP + MQ > AC$ .



**Решение 1.** По неравенству треугольника

$$MQ + MA > AQ \iff MQ + \frac{1}{2}AC > \frac{3}{4}AB \iff MQ > \frac{1}{4}AC = PA.$$

Тогда

$$BP + MQ > BP + PA > AB = AC. \quad \square$$

**Решение 2.** Пусть точка  $P'$  симметрична  $P$  относительно оси симметрии треугольника. Очевидно,  $BP = CP'$ . Обозначим через  $O$  точку пересечения отрезков  $CP'$  и  $MQ$ . Дважды применяя неравенство треугольника, мы получим

$$CP' + MQ = (CO + OM) + (QO + OP') > CM + QP' = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AB = AC. \quad \square$$

5. Беговая дорожка представляет собой окружность длиной 1 км. Вдоль дуги, длина которой равна 100 м, построены зрительские трибуны. Можно ли запустить по этой дорожке в одном и том же направлении 10 бегунов, движущихся с постоянными скоростями — 20, 21, ..., 29 км/ч — так, чтобы в любой момент времени напротив трибун пробежал хотя бы один из бегунов?

(Место старта каждого бегуна можно назначить в любом месте, независимо от остальных бегунов.)

**Ответ:** нет.

**Решение.** Пусть  $\Delta$  — интервал дорожки, идущий вдоль трибун (без концевых точек). Рассмотрим промежуток времени, за который каждый из бегунов пробежит целое число кругов (например,  $29!$  часов). Поскольку трибунная дуга составляет  $\frac{1}{10}$  длины дорожки, каждый бегун ровно  $\frac{1}{10}$  всего этого времени будет находиться возле трибун. Поскольку бегунов ровно 10, требование задачи обеспечивается лишь тогда, когда «трибунные интервалы» бегунов не налегают друг на друга. Иными словами, в промежутке  $\Delta$  в любой момент времени может быть лишь один бегун. Покажем, что это не так. Пусть  $A$  и  $B$  — спортсмены, бегущие со скоростями 20 и 21 км/ч соответственно. Допустим,  $B$  догнал  $A$  в какой-то точке дорожки вне  $\Delta$ . До начала трибун им надо пробежать не более 900 метров, и бегун  $A$  преодолеет это расстояние максимум за 0,045 часа. Когда  $A$  добежит до начала трибун,  $B$  будет опережать его не более чем на 45 метров. После этого  $A$  и  $B$  будут некоторое время находиться в  $\Delta$  вместе.  $\square$

6. На доске написано 10 000 нечетных чисел, не делящихся на 5. Докажите, что можно выбрать несколько чисел так, что их сумма будет оканчиваться на 1379. (Если выбирается одно число, то оно и равно сумме.)

**Решение.** Проверим вначале два утверждения.

1) Если число  $t$  взаимно просто с 10 000, а числа  $p$  и  $q$  дают разные остатки при делении на 10 000, то числа  $pt$  и  $qt$  также дают разные остатки. Действительно,  $pt - qt = (p - q)t$ . Первый множитель не делится на 10 000, а второй взаимно прост с 10 000.

2) Если число  $a$  взаимно просто с 10 000, то существует такое число  $a'$ , взаимно простое с 10 000, что  $aa' \bmod 10\,000 = 1$ . Действительно, в силу 1) остатки от деления на 10 000 чисел  $a, 2a, \dots, 9999a$  такие же, как у чисел  $1, 2, \dots, 9999$ , поэтому среди них есть 1. Если  $a'$  и 10 000 имеют общий делитель, то он будет также делителем единицы и потому равен 1.

Докажем по индукции, что если у нас имеется  $n \leq 10\,000$  чисел, взаимно простых с 10 000, то всевозможные суммы, составленные из этих чисел, дают не менее  $n$  различных остатков по модулю 10 000. База  $n = 1$  тривиальна. Пусть мы умеем составлять из  $n - 1$  числа суммы  $S_1, \dots, S_{n-1}$  с различными остатками  $b_1, \dots, b_{n-1}$  (занумеруем остатки по возрастанию). Добавим новое число  $a$ . Мы можем считать, что  $a = 1$ . Действительно, пусть для  $a = 1$  все доказано. В общем случае подберем  $a'$  в соответствии с 2) и домножим все числа на  $a'$ . Суммы этих чисел также домножатся на  $a'$ , и в силу 1) количество различных остатков от деления сумм на 10 000 не изменится. При этом число  $a$  заменится на  $aa' \bmod 10\,000 = 1$ , и по предположению различных остатков будет не менее  $n$ .

Пусть  $a = 1$ . Если  $b_1, \dots, b_{n-1}$  возрастают с шагом 1, то сумма  $S_{n-1} + a$  дает новый остаток  $b_{n-1} + 1 \bmod 10\,000$ . В противном случае найдется такое  $k < n - 1$ , что  $b_{k+1} - b_k \geq 2$ . Тогда сумма  $S_k + a$  дает новый остаток  $b_k + 1$ .  $\square$