Вариант 2

**1.** Можно ли все натуральные числа от 1 до 2018 так расставить по кругу, что все суммы по 8 стоящих подряд чисел давали различные остатки от деления на 2018?

**Ответ:** нет.

**Решение.** Допустим, что так расставить числа удалось. Просуммируем все 2018 групп из 8 стоящих подряд чисел. С одной стороны, остаток от деления этой суммы на 2018 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 2018, т. е. будет нечётным числом. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 8 раз, поэтому этот остаток будет чётным. Противоречие.

**2.** Найдите все такие квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ с вещественными коэффициентами $a$, $b$ и $c$, что если в трехчлене заменить любой из трех коэффициентов на 1, то получившийся квадратный трехчлен будет иметь ровно один корень.

**Ответ:** $\frac{1}{2} \cdot x^2 \pm \sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}$.

**Решение.** По условию трехчлены $x^2+bx+c$, $ax^2+x+c$ и $ax^2+bx+1$ имеют ровно по одному корню. Следовательно, у них нулевые дискриминанты. Таким образом,

$$b^2 - 4c = 1 - 4ac = b^2 - 4a = 0.$$

Из того, что первое и третье выражение равны нулю, следует, что $a = c > 0$. Тогда из равенства нулю второго выражения получим, что $a = c = \frac{1}{2}$. Стало быть, $b = \pm\sqrt{2}$.

**3.** Положительные числа $a$, $b$ и $c$ удовлетворяют условию $a^3+b^3+c^3 = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geqslant \frac{3}{4}.$$

**Решение.** Поскольку $\frac{a^4}{a^4+3} + \frac{3}{a^4+3} = 1$,

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} = \frac{1}{3}\left(3 - \frac{a^4}{a^4+3} - \frac{b^4}{b^4+3} - \frac{c^4}{c^4+3}\right).$$

Следовательно, достаточно доказать, что выражение в скобках не меньше, чем $\frac{9}{4}$. Это равносильно неравенству

$$\frac{a^4}{a^4+3} + \frac{b^4}{b^4+3} + \frac{c^4}{c^4+3} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Докажем, что $\frac{a^4}{a^4+3} \leqslant \frac{a^3}{4}$. Действительно, это равносильно неравенству $4a \leqslant a^4 + 3$, которое уже совсем простое:

$$a^4 + 3 = (a^4 + 1) + 2 \geqslant 2\sqrt{a^4} + 2 = 2(a^2 + 1) \geqslant 4a.$$

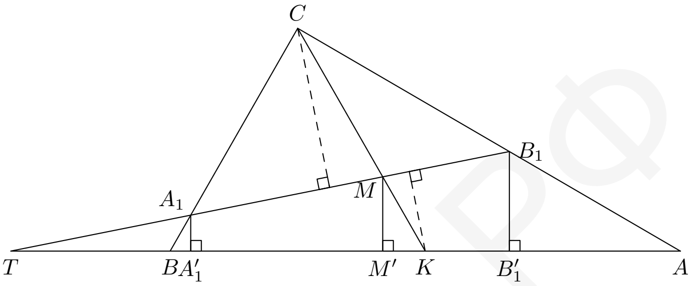
**4.** Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице $50 \times 50$ так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске $1 \times 6$ была хотя бы одна отмеченная клетка.

**Ответ:** 416.

**Решение.** Квадрат $50 \times 50$ легко разрезать на четыре прямоугольника $24 \times 26$ и центральный квадрат $2 \times 2$. Каждый прямоугольник разрезается на $4 \cdot 26 = 104$ полоски $1 \times 6$. В каждой такой полоске должна быть своя отмеченная клетка, поэтому таких клеток будет не менее 416.

Покажем, как нужным образом отметить 416 клеток. Отметим все параллельные друг другу диагонали с длинами 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41 и 47. Всего будет отмечено $2 \cdot (5 + 11 + 17 + 23 + 29 + 35 + 41 + 47) = 416$ клеток.

**5.** Пусть $M$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$. Проходящая через $M$ прямая пересекает отрезки $BC$ и $CA$ в точках $A_1$ и $B_1$ соответственно. Точка $K$ — середина стороны $AB$. Докажите, что $9S_{KA_1B_1} \geqslant 2S_{ABC}$.




**Решение.** Пусть прямые $AB$ и $A_1B_1$ пересекаются в точке $T$, и пусть для определенности это произошло за точкой $B$. Поскольку точка пересечения медиан $M$ делит медиану $CK$ в отношении $2:1$, высоты, опущенные из точек $C$ и $K$ на прямую $A_1B_1$, также относятся как $2:1$. Тогда $2S_{\triangle KA_1B_1} = S_{\triangle CA_1B_1}$ и $S_{KA_1CB_1} = S_{\triangle KA_1B_1} + S_{\triangle CA_1B_1} = 3S_{\triangle KA_1B_1}$. Поэтому нужно доказать неравенство $3S_{KA_1CB_1} \geqslant 2S_{\triangle ABC}$. После сокращения общей площади останется неравенство $3(S_{\triangle AA_1K} + S_{\triangle BB_1K}) \leqslant S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle MAB}$ или, что тоже самое, неравенство $S_{\triangle AA_1K} + S_{\triangle BB_1K} \leqslant 2S_{\triangle MAB}$. Если увеличить основания треугольников $AA_1K$ и $BB_1K$ в два раза до отрезка $AB$, то площадь также увеличится в два раза, поэтому требуемое неравенство примет вид $S_{\triangle AA_1B} + S_{\triangle BB_1A} \leqslant 2S_{\triangle MAB}$. Поскольку это треугольники с одинаковым основанием, достаточно проверить соответствующее неравенство для высот. Пусть высоты, опущенные на прямую $AB$ из точек $A_1$, $B_1$ и $M$, имеют основание $A_1'$, $B_1'$ и $M'$ соответственно. Осталось доказать, что $A_1A_1' + B_1B_1' \leqslant 2MM'$. Это неравенство из-за подобия треугольников $TA_1A_1'$, $TB_1B_1'$ и $TMM'$ можно переписать в виде $TA_1 + TB_1 \leqslant 2TM$, что верно, поскольку $MB_1 \leqslant MA_1$ (иначе точка пересечения $AB$ и $A_1B_1$ будет лежать за точкой $A$).

**6.** Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + m^5 = 5000?$$

**Ответ:** ни одного.

**Решение.** Пусть для некоторых натуральных чисел $m$ и $n$ выполняется равенство $n(n+1)(n+2)(n+3)+m^5 = 5000$. Поскольку $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2-1$, равенство можно переписать в виде $k^2 + m^5 = 5001$, где $k = n^2 + 3n + 1$. Рассмотрим остатки от деления на 11 у левой и правой частей равенства $k^2+m^5 = 5001$. Квадраты могут давать остатки лишь 0, 1, 3, 4, 5 и 9, а пятые степени лишь остатки 0, 1 и 10. Но никакие из двух написанных остатков в сумме не дают остаток 6, который будет у числа 5001.