Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2017/2018 учебный год. 8-9 классы.

Вариант 1

1. Можно ли все натуральные числа от 1 до 2018 так расставить по кругу, что сумма любых трёх подряд стоящих чисел была нечётным числом?

Ответ: нет.

Решение. В каждой сумме трёх подряд стоящих чисел одно или три нечётных слагаемых. Во всех суммах по одному нечётному слагаемому быть не может. Действительно, весь круг покрывается 673 тройками, а всего он содержит 1009 нечётных чисел. Значит, хотя бы в одной тройке нечётных чисел не меньше двух, то есть три. Итак, есть тройка с тремя нечётными числами. Рассмотрим такую тройку и пойдём от нее по часовой стрелке, пока не встретим первое чётное число. Оно с двумя предыдущими нечётными даёт чётную сумму — противоречие.

2. Даны ненулевые вещественные числа a, b и c. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ расположена выше прямой $y = cx$. Докажите, что парабола $y = cx^2 - bx + a$ расположена выше прямой $y = cx - b$.

Решение. То, что парабола $y = ax^2 + bx + c$ расположена выше прямой $y = cx$, равносильно двум условиям: ветви параболы направлены вверх, т. е. $a > 0$, и парабола не пересекается с прямой, т. е. уравнение $ax^2+bx+c = cx$ не имеет решений. Значит, дискриминант уравнения отрицателен, т. е. $(b-c)^2-4ac < 0$. В частности, это означает, что $c > 0$. Тогда ветви параболы $y = cx^2 - bx + a$ также направлены вверх, и нам нужно лишь доказать, что у нее нет пересечений с прямой, т. е. что уравнение $cx^2 - bx + a = cx - b$ не имеет решений. Для этого нужно проверить отрицательность его дискриминанта. Но он равен

$$\begin{aligned}(-b-c)^2 - 4c(a+b) &= b^2 + 2bc + c^2 - 4ac - 4bc = \\ &= b^2 - 2bc + c^2 - 4ac = (b-c)^2 - 4ac < 0.\end{aligned}$$

3. Произведение положительных чисел a, b, c и d равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} + \frac{b^4+c^4}{b^2+c^2} + \frac{c^4+d^4}{c^2+d^2} + \frac{d^4+a^4}{d^2+a^2} \geqslant 4.$$

Первое решение. Поскольку $2(a^4+b^4) \geqslant (a^2+b^2)^2$, справедливо неравенство

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} \geqslant \frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Сложив его с тремя аналогичными неравенствами, получим, что левая часть доказываемого неравенства не меньше, чем $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 2ab+2cd \geqslant 4\sqrt{abcd} = 4$.

ДубовФ

Второе решение. Заметим, что $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} \geqslant ab$. Действительно, это неравенство после домножения на знаменатель превращается в неравенство

$$(a^3 - b^3)(a - b) = a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 \geqslant 0.$$

Но в таком виде оно очевидно, поскольку скобки в левой части имеют одинаковый знак, и их произведение неотрицательно.

Следовательно,

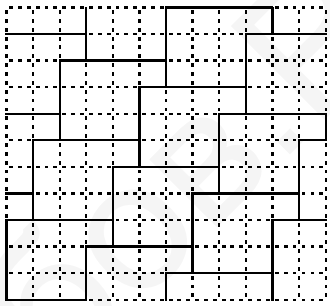
$$\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} + \frac{b^4 + c^4}{b^2 + c^2} + \frac{c^4 + d^4}{c^2 + d^2} + \frac{d^4 + a^4}{d^2 + a^2} \geqslant ab + bc + cd + da \geqslant 4.$$

В последнем неравенстве мы дважды воспользовались неравенством о средних для двух чисел: $ab + cd \geqslant 2\sqrt{ab \cdot cd} = 2$ и $bc + da \geqslant 2\sqrt{bc \cdot da} = 2$.

4. Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги красятся в k цветов (каждая клетка красится целиком в один цвет). При каком наибольшем k в каждом клетчатом прямоугольнике со сторонами 3 и 4 встретятся клетки всех этих цветов?

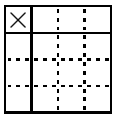
Ответ: 10.

Решение. Разобьем бесконечный клетчатый лист бумаги на десятиклеточные фигурки вида так, как показано на рисунке.



Требуемая раскраска в 10 цветов получится, если раскрасить одну такую фигуру в 10 цветов, а остальные раскрасить ровно таким же способом.

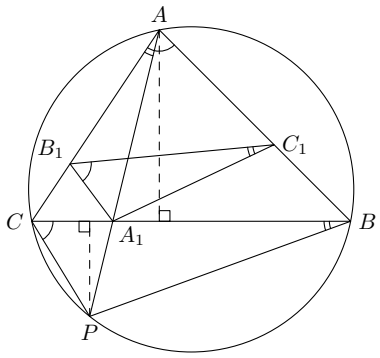
Очевидно, что более чем в 12 цветов требуемым образом покрасить лист нельзя. Пусть есть раскраска в 11 или 12 цветов. Предположим, что нашлась такая раскраска в 11 цветов, что в каждом квадрате 3×3 все цвета различны. Рассмотрим один такой квадрат. В содержащем его прямоугольнике 3×4 имеется лишь 11 различных цветов. Поэтому в дополнительной полоске 3×1 какие-то два цвета совпадают. Тогда в квадрате 3×3, содержащем эту полоску, какие-то два цвета совпадают.



Пусть у нас есть раскраска в n цветов, где n равно 11 или 12. Выберем квадрат 3×3, в котором не более $n - 3$ разных цветов. Достроим его до прямоугольников 3×4 и 4×4 так, как показано на рисунке. Тогда в полосках 3×1 и 1×3 представлены одинаковые тройки цветов. Накроем горизонтальным прямоугольником 3×4 клетку, помеченную крестиком. Тогда этот прямоугольник будет содержать 5 клеток из полосок, значит, в нем имеется не менее двух пар клеток одного цвета, поэтому общее количество цветов не превосходит 10. Противоречие.

5. Дан треугольник ABC. На его сторонах BC, CA и AB соответственно выбраны такие точки A_1, B_1 и C_1, что четырехугольник $AB_1A_1C_1$ является вписанным. Докажите, что

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} \leqslant \left(\frac{B_1C_1}{AA_1}\right)^2.$$



Решение. Продлим отрезок AA_1 до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC и обозначим точку пересечения через P. Из вписанности четырехугольников $AB_1A_1C_1$ и $ABPC$ имеем равенства углов:

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1AC_1 = \angle PAB = \angle PCB \quad \text{и}$$
$$\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1AB_1 = \angle PAC = \angle PBC.$$

Следовательно, треугольники $A_1B_1C_1$ и PCB подобны по двум углам. Тогда

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle PCB}} = \frac{B_1C_1^2}{BC^2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{S_{\triangle PCB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{PA_1}{AA_1},$$

поскольку основания у них общие, а отношение высот равно отношению отрезков AA_1 и PA_1. Таким образом,

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle PCB}} \cdot \frac{S_{\triangle PCB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{B_1C_1^2}{BC^2} \cdot \frac{PA_1}{AA_1} \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{B_1C_1^2}{AA_1^2}.$$

Последнее неравенство после сокращений и домножения на знаменатели приводится к виду $4 \cdot PA_1 \cdot AA_1 \leqslant BC^2$. Но из подобия треугольников AA_1C и BA_1P следует, что $PA_1 \cdot AA_1 = BA_1 \cdot CA_1$. Поэтому

$$4 \cdot PA_1A \cdot A_1 = 4 \cdot BA_1 \cdot CA_1 \leqslant (BA_1 + CA_1)^2 = BC^2.$$

Дубов.рф

6. При некотором натуральном n число $n^5 + n^4 + 1$ имеет ровно шесть различных натуральных делителей. Докажите, что число $n^3 - n + 1$ является квадратом натурального числа.

Решение. Очевидно, что при $n = 1$ и $n = 2$ число $n^5 + n^4 + 1$ не имеет ровно шести различных натуральных делителей. Поэтому $n \geqslant 3$. Ровно шесть делителей могут иметь лишь числа вида p^5 или p^2q, p и q — различные простые числа. Заметим, что $n^5+n^4+1 = (n^3-n+1)(n^2+n+1)$. Пусть d — наибольший общий делитель чисел n^3-n+1 и n^2+n+1. Тогда число $n-2 = (n-1)(n^2+n+1)-(n^3-n+1)$ также делится на d. Следовательно, на d будет делиться и число $7 = (n^2 + n + 1) - (n + 3)(n - 2)$. Стало быть, $d = 1$ или $d = 7$. В первом случае получаем, что один из множителей равен p^2, а другой q. Но число n^2+n+1 не может быть точным квадратом, поскольку $n^2 < n^2+n+1 < n^2+2n+1 = (n+1)^2$. Значит, квадратом будет число n^3-n+1, что и нужно доказать. В случае $d = 7$ число n^5+n^4+1 делится на 7^2, поэтому оно имеет вид 7^2q или 7^5. В случае 7^2q множители равны 7 и $7q$, где $q \neq 7$ — простое число, а в случае 7^5 множители равны 7 и 7^4, поскольку их наибольший общий делитель равен 7. Таким образом, в любом случае один из множителей $n^2 + n + 1$ и $n^3 - n + 1$ равен 7, что невозможно при $n \geqslant 3$.

Ягубов.рф