Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2016/2017 учебный год

Задания для 6–9 классов

1. (10 баллов) *Два соседа заказали секционный забор для своих участков. Иван Иванович купил забор традиционной формы, каждая секция которого представляет собой прямоугольник со сторонами 5 на 2. Петр Петрович же взял забор с косыми секциями в виде параллелограммов со сторонами 5 на 2. Количество секций при этом соседи заказали одинаковое. Сравните количество краски, которая уйдет на покраску каждого из заборов, считая толщину наносимого красочного слоя постоянной и одинаковой для обоих заборов.*

а) Иван Иванович и Петр Петрович потратят одинаковое количество краски.

б) Больше краски потратит Иван Иванович.

в) Больше краски потратит Петр Петрович.

г) По имеющимся данным невозможно сравнить количество краски, требующейся для покраски заборов.

Ответ: б).

Решение: Из условия ясно, что секции забора Петра Петровича имеют форму параллелограмма, в котором нет прямых углов. Это означает, что если α — какой-нибудь угол между сторонами данного параллелограмма, то $\sin\alpha < 1$. Таким образом, площадь секции забора Петра Петровича, равная $5 \cdot 2 \cdot \sin\alpha = 10 \cdot \sin\alpha$, заведомо меньше площади секции забора Ивана Ивановича, которая равна $5 \cdot 2 = 10$. Соответственно, площадь всего забора Ивана Ивановича тоже больше, поэтому он потратит больше краски.

2. (10 баллов) *Будем говорить, что коробка K с размерами $X_1 \times Y_1 \times Z_1$ меньше коробки P с размерами $X_2 \times Y_2 \times Z_2$ (и записывать $K < P$), если K можно разместить внутри P, при условии, что поворачивать коробки можно только на 90° вокруг ребер. Если коробки K и P одинаковые, то будем записывать это как $K = P$. Пусть A — коробка с размерами $5 \times 6 \times 3$, B — коробка с размерами $1 \times 5 \times 4$, C — коробка с размерами $2 \times 2 \times 3$. Выберите верные утверждения.*

а) $A > B$.

б) $A < B < C$.

в) $C < A$.

г) $B = C$.

Ответ: *а) и в).*

Решение: Запишем размеры каждой коробки по убыванию. Получим, что A — это коробка с размерами $6 \times 5 \times 3$, B — коробка с размерами $5 \times 4 \times 1$, C — коробка с размерами $3 \times 2 \times 2$.

Нетрудно видеть, что каждое измерение коробки A больше соответствующего измерения коробки B, поэтому $A > B$. Аналогично, $A > C$. Соответственно, варианты а) и в) верны. Среди предложенных коробок нет одинаковых, поэтому вариант г) неверен. Неравенства из вариантов а) и б) не могут выполняться одновременно, поэтому ответ б) тоже неверен.

3. (20 баллов) *От деревни A до деревни B индейцы плывут по реке на пироге в 3 раза дольше, чем от деревни B до деревни A. Во сколько раз дольше обычного индейцы могут добраться из B в A на пироге без вёсел?*

Ответ: В 3 раза.

Решение: Нетрудно видеть, что деревня B находится выше по течению реки, чем деревня A. Обозначим скорость течения реки как v_r, а среднюю скорость пироги на стоячей воде — как v. Если S — расстояние по реке от A до B, то из условия имеем

$$3\,\frac{S}{v+v_r}=\frac{S}{v-v_r}\,.$$

Отсюда получаем, что

$$v = 2v_r\,. \tag{*}$$

Пусть из B в A без вёсел (т.е. только за счет течения реки) индейцы плывут в k раз дольше, чем на вёслах. Это дает уравнение

$$k\,\frac{S}{v+v_r}=\frac{S}{v_r}\,.$$

Тогда с учетом (*) находим, что $k = 3$.

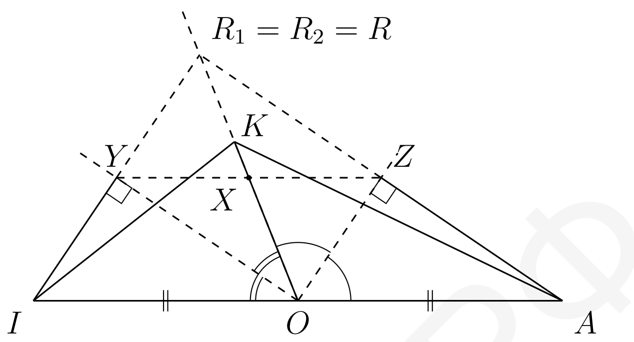
4. (20 баллов) *Волшебная комната во дворце тридевятого царства — точки плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям $|x| \leqslant 4$, $|y| \leqslant 6$. Сколько потребуется одинаковых плиток паркета, имеющих форму прямоугольника со сторонами 1,5 и 2, чтобы замостить пол в комнате? Замощением считается укладка без пустот, без наложений, не выходящая за границы области.*

Ответ: 32.

Решение: Из условия находим, что волшебная комната — это прямоугольник со сторонами параллельными осям координат, причем длины сторон параллельных оси абсцисс равны 8, а длины сторон параллельных оси ординат — 12. Нетрудно видеть, что замощение существует (вдоль стороны комнаты длины 12 можно положить целое число плиток стороной длины 1,5; и, очевидно, вдоль стороны комнаты длины 8 можно также положить целое число плиток стороной длины 2). Площадь комнаты равна $8 \times 12 = 96$, а площать одной плитки — $1,5 \times 2 = 3$. Отсюда получаем, что всего потребуется $96 : 3 = 32$ плитки.

5. (30 баллов) *Пусть в треугольнике KIA точка O — основание медианы из вершины K; Y — основание перпендикуляра, опущенного из точки I на биссектрису угла IOK; Z — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на биссектрису угла AOK. X — точка пересечения отрезков KO и YZ. Докажите, что $YX = ZX$.*

Решение:



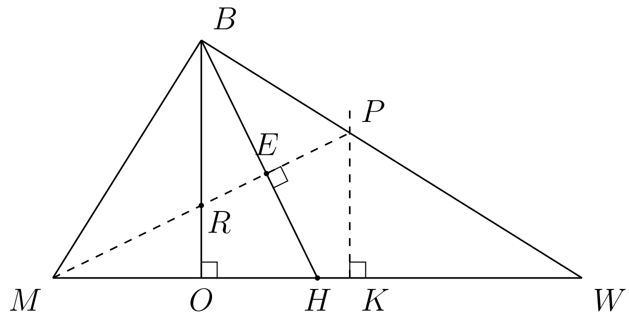
Продлим AZ до пересечения с OK и обозначим точку пересечения через R_1. Прямоугольные треугольники ZOA и ZOR_1 равны (катет ZO общий, $\angle ZOA = \angle ZOR_1$, т.к. OZ — биссектриса угла AOK); следовательно, $OA = OR_1$.

Также продлим IY до пересечения с OK и обозначим точку пересечения через R_2. Прямоугольные треугольники YOI и YOR_2 также равны, поэтому $OI = OR_2$. Но O — основание медианы, т.е. $OA = OI$, следовательно $OR_1 = OR_2$, т.е. точки R_1 и R_2 совпадают. Таким образом, AZ, IY и KO пересекаются в одной точке, будем называть её просто R.

В четырёхугольнике $ZOYR$ углы OZR и OYR прямые по условию, а угол ZOY прямой потому, что образован биссектрисами смежных углов. Поэтому $ZOYR$ — прямоугольник, а его диагоналями являются RO и YZ, которые пересекаются в точке X, делящей каждую из них пополам.

6. (30 баллов) *В треугольнике BMW, где $BM < BW < MW$, BO — высота, BH — медиана. Точка K симметрична точке M относительно точки O. Перпендикуляр к MW, проведённый через точку K, пересекает отрезок BW в точке P. Докажите, что если MP и BH перпендикулярны, то угол B треугольника BMW равен 90 градусам.*

Решение: Обозначим через R точку пересечения MP и BO, а через E — точку пересечения MP и BH. Поскольку $PK \perp MW$, то $PK \parallel BO$. А поскольку $OM = OK$, то $RM = RP$ (по теореме Фалеса). Следовательно, HR — средняя линия в треугольнике MPW и поэтому $HR \parallel BW$.



В треугольнике MBH являются высотами BO и ME, пересекающиеся в точке R. Поэтому через точку R будет также проходить высота, опущенная из вершины H, т.е. $HR \perp BM$, а, значит, и $BW \perp BM$.

7. (40 баллов) *Чтобы попасть в пещеру Али Бабы необходимо обнулить 28 счетчиков, на которых выставлено по одному натуральному числу из диапазона от 1 до 2017. Искателям сокровищ за один ход разрешается уменьшать значения некоторых из счетчиков на одно и то же число, которое они могут от хода к ходу менять. Укажите за какое минимальное число ходов искатели сокровищ гарантированно обнулят счетчики (вне зависимости от начальных значений) и попадут в пещеру.*

Ответ: За 11 ходов.

Решение:

Оценка. Пусть на счетчиках выставлены все степени двойки от 1 до 1024 и ещё какие-то 17 чисел. Поскольку порядок ходов неважен, упорядочим их по величине вычитаемых чисел, начиная с наибольшего. Покажем по индукции, что после k-го хода на доске есть число, не меньшее 2^{10-k}. База — 0 ходов — очевидна. Пусть после k ходов на доске есть число, не меньшее 2^{10-k}. Если мы k-ым ходом вычитаем число, большее 2^{10-k-1}, значит этот и предыдущие ходы не затронули число 2^{10-k-1}, и всё доказано. В противном случае не меньше 2^{10-k-1} после вычитания будет число, не меньшее 2^{10-k}. Из доказанного следует, что после 10 ходов на доске ещё останется число, не меньшее $2^0 = 1$, то есть ходов потребуется не меньше 11.

Пример. Вычитая 2^{10} из всех чисел, не меньших 2^{10}, сделаем все числа меньшими 2^{10}. Следующим шагом аналогично сделаем все числа меньшими 2^9 и т.д. После десятого шага все числа станут меньшими $2^0 = 1$, то есть нулями.

8. (40 баллов) *Пенсионерки на одной из планет Альфа Центавра любят раскрашивать клетки досок* 2016×2016 *золотыми и серебряными красками. Однажды оказалось, что у всех раскрашенных в тот день досок в каждом квадрате* 3×3 *было ровно по* A *золотых клеток, а в каждом прямоугольнике* 2×4 *или* 4×2 *— ровно по* Z *золотых клеток. При каких* A *и* Z *это возможно?*

Ответ: $A = Z = 0$ или $A = 9$, $Z = 8$.

Решение: Разлинуем доску на квадраты 2×2. Если в таком квадрате u золотых клеток, то в смежном с ним по стороне квадрате должно быть $v = Z-u$ золотых клеток. Значит, квадраты 2×2, содержащие u и v золотых клеток, чередуются в шахматном порядке. Рассмотрим квадрат 6×6, составленный из клеток 2×2. Так как его можно разбить на четыре квадрата 3×3, в нём должно быть $4A$ золотых клеток. Но на доске есть как квадраты 6×6, в которых $4u + 5v$ золотых клеток, так и квадраты 6×6, в которых $5u + 4v$ золотых клеток. Следовательно, $u = v$, и $9u = 4A$. Получается, что u делится на 4, то есть либо $u = 0$, либо $u = 4$. В первом случае все клетки доски серебряные и $A = Z = 0$, во втором — все клетки золотые, и $A = 9$, $Z = 8$.