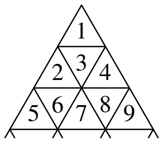
Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2015/2016 учебный год. 6 – 7 классы.

Вариант 2

1. *Докажите следующий признак делимости: число 2701 делится на двузначное число x в том и только том случае, когда сумма квадратов цифр числа x равна 58.*

Решение. Заметим, что $2701 = 37 \cdot 73$. Так как числа 37 и 73 простые, только они и будут двузначными делителями 2701. У обоих чисел сумма квадратов цифр равна 58. Обратно, сумма квадратов двух цифр равна 58 только тогда, когда эти цифры 3 и 7. □

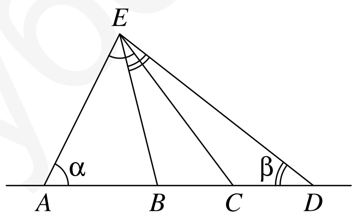
2. *Угол разбит на треугольнички со стороной 1 см так, как показано на рисунке. В них по строкам слева направо расставляют натуральные числа, начиная с 1. Таня отметила горизонтальный отрезок, который является общей стороной двух треугольничков. В одном из них стоит число 350. Какое число стоит в другом треугольничке?*



Ответ: 314.

Решение. Как нетрудно заметить, в k-й строке угла расположены числа от $(k-1)^2+1$ до k^2. Число 350 расположено в 19-й строке (в ней находятся числа от 325 до 361). При нечетном k треугольники, примыкающие к четным числам, располагаются строчкой выше. Над числом 360 находится 324. Сдвигаясь в обеих строках на 10 позиций влево, мы получим, что над числом 350 находится 314. □

3. *На прямой расположены точки A, B, C, D (именно в таком порядке). На плоскости, содержащей эту прямую, отмечена точка E. Оказалось, что $AC = CE$ и $EB = BD$. Докажите, что угол AED острый.*



Решение. Пусть $\alpha = \angle CAE = \angle AEC$, $\beta = \angle BDE = \angle BED$. Тогда

$$180^\circ = \angle AED + \alpha + \beta < 2\alpha + 2\beta.$$

Отсюда $\alpha + \beta > 90^\circ$ и $\angle AED < 90^\circ$. □

4. *Барон Мюнхгаузен утверждает, что существуют два таких различных 10-значных числа, не делящихся на 10, что если из каждого из этих чисел вычесть сумму цифр его квадрата, результаты будут одинаковы. Не обманывает ли барон?*

Ответ: не обманывает.

Решение. Примерами таких чисел могут быть 10^9+8 и 10^9+9. Действительно, квадрат первого числа равен

$$(10^9+8)^2 = 10^{18} + 16 \cdot 10^9 + 64 = 1 \cdot 10^{18} + 1 \cdot 10^{10} + 6 \cdot 10^9 + 6 \cdot 10 + 4,$$

и сумма его цифр равна 18. Квадрат второго числа равен

$$(10^9+9)^2 = 10^{18} + 18 \cdot 10^9 + 81 = 1 \cdot 10^{18} + 1 \cdot 10^{10} + 8 \cdot 10^9 + 8 \cdot 10 + 1,$$

и сумма его цифр равна 19. При этом первое число на 1 меньше второго. $\square$

5. *Все четырехзначные числа от 1000 до 9999 написаны подряд без пробелов. Костя подчеркнул k цифр, расположенных подряд в этой записи, Андрей подчеркнул другие k цифр, расположенных подряд в этой записи. Оказалось, что k-значные числа, подчеркнутые мальчиками, равны. При каком наибольшем k такое могло произойти?*

Ответ: $k = 7$.

Решение. Примером семизначного числа, удовлетворяющего условию задачи, является 2229223. Действительно, Костя мог подчеркнуть фрагмент «2229223» на стыке чисел 2229 и 2230, а Андрей — на стыке чисел 9222 и 9223.

Покажем теперь, что восьмизначный фрагмент выбрать не удастся. Отметим вначале очевидный факт: *если у двух последовательных четырехзначных чисел различаются предпоследние цифры, то меньшее число оканчивается на 9, а большее — на 0.* Предположим, что мальчики подчеркнули восьмизначный фрагмент «$abcdefgh$». Его можно выделить в строке одним из четырех способов, показанных на диаграмме:

$$\underbrace{a\,b\,c\,d}_{i}\underbrace{e\,f\,g\,h}_{i+1} \qquad \underbrace{*\,a\,b\,c}_{j}\underbrace{d\,e\,f\,g}_{j+1}\underbrace{h\,*\,*\,*}_{j+2} \qquad \underbrace{*\,*\,a\,b}_{k}\underbrace{c\,d\,e\,f}_{k+1}\underbrace{g\,h\,*\,*}_{k+2} \qquad \underbrace{*\,*\,*\,a}_{m}\underbrace{b\,c\,d\,e}_{m+1}\underbrace{f\,g\,h\,*}_{m+2}$$

(здесь i, j, k, m — четырехзначные числа, а звездочки обозначают некоторые цифры). Заметим, что Костя и Андрей использовали разные способы, иначе бы они подчеркнули один и тот же блок. Допустим, что Костя выбрал свой блок первым способом, а Андрей — вторым. Тогда c и g — младшие цифры соседних чисел j и $j+1$, поэтому они различны. Значит, числа i и $i+1$ имеют разные предпоследние цифры. По замечанию выше число $i+1$ оканчивается на 0, то есть $h = 0$. Но это невозможно, поскольку число $j+2$ четырехзначное. Другие конфигурации разбираются аналогично. $\square$

6. *У каждого из n химиков в лаборатории есть 1 кг некоторого химического реактива (у разных химиков — разные реактивы). Химики шлют друг другу посылки. Никакие две посылки не могут пересылаться одновременно. Получив посылку, химик сразу же добавляет в свою лабораторию все ее содержимое. Когда химик шлет посылку другому химику, он кладет в нее половину каждого из имеющихся у него реактивов.*
После пересылки некоторого количества посылок оказалось, что у каждого химика теперь есть все n реактивов (быть может, в очень малых количествах). Кроме того, ни один химик не получал никакой чужой реактив более чем в одной посылке. При этом некоторые химики получали посылки, содержавшие среди прочего и их собственный реактив. Докажите, что таких химиков было не меньше $n-1$.

Решение. Если химиков всего два, утверждение очевидно: тот химик, который первым отправил посылку, получит затем реактив второго вместе со своим. Предположим, что для $n-1$ химиков утверждение доказано, и проверим его для n химиков. Пусть последняя из посылок была отправлена химиком A химику B. Очевидно, химик A уже имеет все реактивы в своей лаборатории. Отсюда вытекают два следствия.

1) Химик B — один из тех, кто получал свой реактив в посылке (от A).

2) Химик B до получения посылки от A не имел ни одного реактива, кроме своего собственного (иначе какой-то из реактивов он получил бы от A во второй раз). Значит, ранее химик B не получал ни одной посылки, а только отправлял их.

Из 2) следует, что химик B посылал коллегам только свой реактив. Тогда, удалив химика B из коллектива и изъяв его посылки, мы получим, что оставшиеся химики тоже удовлетворяют условию задачи. По предположению среди них по крайней мере $n-2$ получали в посылках свой реактив. В силу 1) вместе с B таких химиков будет не менее $n-1$. $\square$