

Вариант 4

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. На главный праздник за большим круглым столом разместились 100 островитян. Половина присутствующих произнесла фразу: «оба мои соседа лжецы», оставшиеся сказали: «среди моих соседей ровно один лжец». Какое наибольшее количество рыцарей может сидеть за этим столом?

Ответ: 67

Решение. Заметим, что три рыцаря не могут сидеть подряд, поскольку тогда средний рыцарь не мог произнести ни одну из требуемых фраз. Обозначим через k количество пар соседних рыцарей. Тогда каждый из рыцарей произнес фразу «среди моих соседей ровно один лжец», поэтому $2k \leq 50$. Кроме того, левее этой пары заведомо сидит лжец, и все эти лжецы разные. Назовем таких двух рыцарей и лжеца *тройкой*. В тройках задействовано $3k$ островитян. Рассмотрим оставшихся $100 - 3k$ островитян. Никакие два рыцаря среди них не сидят рядом друг с другом, а также рядом с рыцарями из тройки (иначе образуются три рыцаря подряд, что невозможно). Тогда левее каждого рыцаря должен сидеть лжец, все эти лжецы разные и отличны от лжецов, входящих в тройки. Таким образом, рыцарей не больше, чем $2k + \frac{1}{2}(100 - 3k) = 50 + \frac{k}{2} \leq 50 + \frac{25}{2} = 67\frac{1}{2}$. Стало быть, рыцарей не больше 67.

Приведем пример, показывающий, что 67 рыцарей могут быть:

ЛРР ЛРР ЛРР ... ЛРР ЛР ЛР ЛР ... ЛР Л

(блок «ЛРР» повторяется 25 раз, блок «ЛР» — 12 раз).

2. Положительные числа a , b и c удовлетворяют условию $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Докажите неравенство $c^2 + ab \leq ac + bc$.

Первое решение. Достаточно проверить неравенство

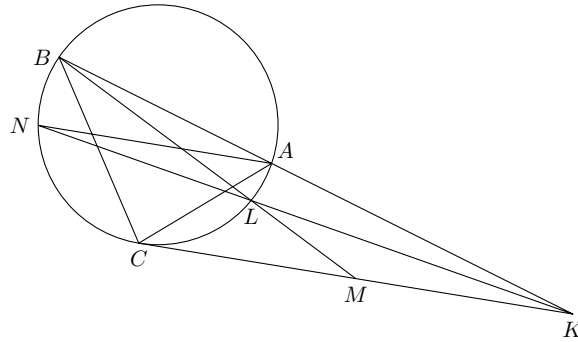
$$(a^2 + b^2)^2 = (c^2 + ab)^2 \leq (a + b)^2 c^2 = (a + b)^2 (a^2 - ab + b^2) = (a + b)(a^3 + b^3)$$

или, что то же самое, $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \leq a^4 + a^3b + ab^3 + b^4$. Последнее очевидно, поскольку по неравенству о средних для двух чисел $2a^2b^2 = 2\sqrt{a^3b \cdot ab^3} \leq a^3b + ab^3$.

Второе решение. Можно считать, что $a \leq b$. Нам надо доказать неравенство $c^2 - (a + b)c + ab \leq 0$. Рассмотрим выражение слева как квадратный трехчлен относительно c . Он неотрицателен, тогда и только тогда, когда c лежит между его корнями a и b . Таким образом достаточно проверить, что $a \leq c \leq b$. Это уже совсем просто:

$$c^2 = b^2 + a^2 - ab = b^2 + a(a - b) \leq b^2 \quad \text{и} \quad c^2 = a^2 + b^2 - ab = a^2 + b(b - a) \geq a^2.$$

3. Окружность ω описана вокруг остроугольного треугольника ABC . Касательная к окружности ω в точке C пересекает прямую AB в точке K . Точка M — середина отрезка CK . Прямая BM вторично пересекает окружность ω в точке L , а прямая KL вторично пересекает окружность ω в точке N . Докажите, что прямые AN и CK параллельны.



Решение. Поскольку KC — касательная к окружности ω , $\angle MCB = \angle MLC$ и, значит, треугольники MCB и MLC подобны. Поэтому $\frac{MB}{MC} = \frac{MC}{ML}$. Следовательно, $\frac{MB}{MK} = \frac{ML}{ML}$. Значит треугольники MKB и MLK подобны. Таким образом,

$$\angle CKN = \angle MKL = \angle MBK = \angle ABL = 180^\circ - \angle LNA = 180^\circ - \angle KNA.$$

Стало быть, углы $\angle CKN$ и $\angle KNA$ дают в сумме 180° , поэтому прямые AN и CK параллельны.

4. Числа u и v являются корнями квадратного трехчлена $x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами. Для любого натурального n докажите, что если a^2 делится на b , то $u^{2n} + v^{2n}$ делится на b^n .

Решение. Докажем индукцией по n , что $u^n + v^n$ делится на $b^{[n/2]}$. Базы $n = 1$ и $n = 2$ легко проверяются: $u + v$ делится на $b^0 = 1$ и $u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv = a^2 - 2b$ делится на b^1 . Установим переход от $n - 2$ и $n - 1$ к n . Поскольку u — корень трехчлена, $u^2 = -au - b$ и, следовательно, $u^n = -au^{n-1} - bu^{n-2}$. Аналогично $v^n = -av^{n-1} - bv^{n-2}$. Сложим эти равенства, получим $u^n + v^n = -a(u^{n-1} + v^{n-1}) - b(u^{n-2} + v^{n-2})$. По индукционному предположению второе слагаемое делится на $b \cdot b^{[(n-2)/2]} = b^{[n/2]}$. Квадрат первого слагаемого делится на $a^2 \cdot b^{2[(n-1)/2]}$, что в свою очередь кратно b в степени $1 + 2[(n-1)/2] \geq n$. Стало быть, первое слагаемое делится на $b^{[n/2]}$.

5. Дана клетчатая доска $n \times n$. Ладья ходит по стандартным шахматным правилам (т.е. за ход можно переместить ладью в клетку, расположенную в той же строке или в том же столбце). При каких n можно посетить все клетки доски по одному разу, если сразу после горизонтального хода ладьи должен следовать вертикальный и наоборот. Если ладья изначально стоит в данной клетке или закончила в ней свой маршрут, то клетка считается посещенной. Начальную клетку ладьи можно выбирать.

Ответ: n — четно

Решение. Пусть n нечетно. Выберем такой столбец, в котором ладья не начинала и не заканчивала свой маршрут. Рассмотрим первый приход ладьи в этот столбец, он был по горизонтали. Значит, следующий ход был по вертикали и ладья посетила клетку в том же столбце, а дальше из него ушла. Аналогично в следующий приход ладья посетила две новые клетки этого столбца и т.д. Следовательно, ладья могла посетить лишь четное число клеток в этом столбце. Противоречие.

Пример обхода доски $n \times n$ при четном n :

1	4	5	...	...	$2n - 4$	$2n - 3$	n^2
2	3	6	...	...	$2n - 5$	$2n - 2$	$2n - 1$
$4n - 3$	$4n - 4$	$4n - 7$	...	...	$2n + 4$	$2n + 1$	$2n$
$4n - 2$	$4n - 5$	$4n - 6$	...	...	$2n + 3$	$2n + 2$	$4n - 1$
$6n - 3$	$6n - 4$	$6n - 7$	...	...	$4n + 4$	$4n + 1$	$4n$
$6n - 2$	$6n - 5$	$6n - 6$	...	...	$4n + 3$	$4n + 2$	$6n - 1$
...	...	...	...	...	...	...	...
$n^2 - 3$	$n^2 - 4$	$n^2 - 7$	...	...	$n^2 - 2n + 4$	$n^2 - 2n + 1$	$n^2 - 2n$
$n^2 - 2$	$n^2 - 5$	$n^2 - 6$	...	...	$n^2 - 2n + 3$	$n^2 - 2n + 2$	$n^2 - 1$

6. Найдите все пары натуральных чисел n и k , для которых $(n + 1)^k = n! + 1$. (Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n . Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.)

Ответ: $n = k = 1$, $n = 2$ и $k = 1$, $n = 4$ и $k = 2$.

Решение. Если $n = 1$, то $2^k = 1! + 1 = 2$, поэтому $k = 1$. Пусть $n \geq 2$, тогда число $n! + 1$ нечетное и, значит, $n + 1$ также нечетное. Стало быть, n — четно. Если $n = 2$, то $3^k = 2! + 1 = 3$, поэтому $k = 1$. Если $n = 4$, то $5^k = 4! + 1 = 25$, поэтому $k = 2$. Пусть теперь $n \geq 6$. Запишем n в виде $2m$, тогда $n! = (2m)! = (2m) \cdot (2m - 1)!$. Факториал в правой части содержит множители m и 2 , и они не совпадают, поскольку $m \geq 3$. Следовательно, $n!$ делится на $2m \cdot 2 \cdot m = n^2$. Тогда на n^2 должно делиться и число $(n + 1)^k - 1$. Раскроем в выражении $(n + 1)^k$ скобки, получится много слагаемых, в которых n входит хотя бы во второй степени, и добавка $kn + 1$. Таким образом, $(n + 1)^k - 1 = \ell n^2 + kn$ для некоторого натурального числа ℓ . Тогда k должно делиться на n и, в частности, $k \geq n$. Но в этом случае

$$(n+1)^k - 1 \geq (n+1)^n - 1 = n \cdot (n+1)^{n-1} + (n+1)^{n-1} - 1 > n \cdot (n+1)^{n-1} > n^n > n!.$$

Поэтому равенство невозможно.