Вариант 10

1. *За круглым столом сидят 50 школьников: блондины, брюнеты и рыжие. Известно, что в любой группе сидящих подряд школьников между двумя блондинами есть хотя бы один брюнет, а в любой группе между двумя брюнетами — хотя бы один рыжий. Какое наименьшее количество рыжих может сидеть за этим столом?*

   Ответ: 17.

   Решение. Если бы за столом сидели одни блондины, то число пар соседей было бы равно количеству блондинов. Поскольку между любыми двумя блондинами есть брюнет, брюнетов за столом сидит не меньше, чем блондинов. Аналогичным образом доказывается, что рыжих за столом не меньше, чем брюнетов. Значит, за столом сидит не меньше $\frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$ рыжих школьников, то есть их по крайней мере 17. Приведем пример рассадки, содержащей ровно 17 рыжих:

$$\text{РЧБ};\ \text{РЧБ};\ \ldots;\ \text{РЧБ}; (16\ \text{раз});\ \text{РЧ}$$

(буквы Р,Ч,Б обозначают соответственно рыжих, брюнетов и блондинов). □

2. *У 200-значного натурального числа стерли старшую цифру и цифру, стоящую через одну от нее. В результате число уменьшилось в 44 раза. Найдите все числа, для которых это возможно.*

   Ответ: $132c \cdot 10^{197}$ при $c = 1, 2, 3$.

   Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k \cdot \overline{cba}$, где a, b, c — десятичные цифры, k, m — неотрицательные целые числа, причем $c > 0$ и $m < 10^k$. Стерев цифры a и c, мы получим число $m + 10^k b$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+1} b + 10^{k+2} c = 44\left(m + 10^k b\right) \Longleftrightarrow 43m = 10^k\,(a - 34b) + 10^{k+2} c.$$

Число m делится на 10^k и меньше, чем 10^k, поэтому оно равно нулю. Тогда после сокращения на 10^k уравнение примет вид $34b = a + 100c$. Поскольку $0 = (100c + a) \bmod 34 = (a - 2c) \bmod 34$, мы получаем $a = 2c$, откуда $b = 3c$. Так как $b < 10$, цифра c принимает значения 1, 2, 3. Осталось заметить, что исходное число $(k + 3)$-значное, поэтому $k = 197$. □

3. *Даны числа $x_1, \ldots, x_n \in (0, 1)$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt[4]{1 - x_1} + \ldots + \sqrt[4]{1 - x_n}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}}.$$

   Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Решение. В силу неравенства для среднего гармонического и среднего арифметического

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}} \leqslant \frac{\sqrt[4]{x_1} + \ldots + \sqrt[4]{x_n}}{n^2}.$$

Заметим, что при любых $a_1, \ldots, a_n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^4 \leqslant \left(n \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2 \leqslant n^3 \sum_{k=1}^{n} a_k^4.$$

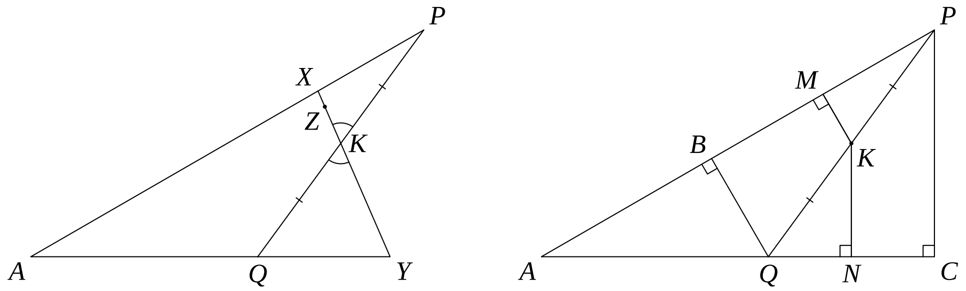
Отсюда в силу неравенства Коши

$$A^2 \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[4]{1 - x_k}\right)^2 \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[4]{x_k}\right)^2}{n^4} \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[4]{1 - x_k}\right)^4 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[4]{x_k}\right)^4}{2n^4} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (1 - x_k) + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому $A \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{2}$. $\square$

4. *Внутри угла раствора 30° с вершиной A выбрана точка K, расстояния от которой до сторон угла равны 1 и 2. Через точку K проводятся всевозможные прямые, пересекающие стороны угла. Найдите минимальную площадь треугольника, отсекаемого прямой от угла.*

Ответ: 8.



Решение 1. Выберем на сторонах угла точки P и Q таким образом, чтобы точка K была серединой отрезка PQ. Покажем, что прямая PQ отсекает треугольник наименьшей площади. Возьмем другую прямую, проходящую через точку K. Пусть она пересекает стороны угла в точках X и Y. Переставляя при необходимости P с Q и X с Y, мы можем считать, что X лежит на отрезке AP. Нам достаточно доказать, что $KX < KY$. Действительно, в этом случае

$$S_{KXP} = \tfrac{1}{2} \cdot KX \cdot KP \cdot \sin\angle XKP = \tfrac{1}{2} \cdot KX \cdot KQ \cdot \sin\angle YKQ < \tfrac{1}{2} \cdot KY \cdot KQ \cdot \sin\angle YKQ = S_{KYQ},$$

откуда $S_{AXY} = S_{APQ} - S_{KXP} + S_{KYQ} > S_{APQ}$. Допустим, что $KX \geqslant KY$. Отметим на отрезке KX такую точку Z, что $KZ = KY$ (см. левый рисунок). Треугольники KQY и KPZ равны по двум сторонам и углу, откуда

$$\angle KQY = \angle KPZ \quad \text{и} \quad \angle ZPQ + \angle AQP = 180^\circ.$$

Но это невозможно, поскольку точка Z лежит внутри треугольника APQ и

$$\angle ZPQ + \angle AQP \leqslant \angle APQ + \angle AQP = 150^\circ < 180^\circ.$$

Осталось вычислить площадь треугольника APQ. Пусть M и N — проекции точки K на лучи AP и AQ, где $KN = 2$ и $KM = 1$. Обозначим проекцию P на прямую AQ через C, а проекцию Q на прямую AP — через B (см. правый рисунок). Тогда $BQ = 2$, $PC = 4$ и

$$S_{APQ} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot BQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{PC}{\sin 30^\circ} \cdot BQ = 8. \quad \square$$

Решение 2. Пусть прямая, проходящая через точку K, пересекает стороны угла в точках X и Y, причем расстояния от K до AX и AY равны соответственно 2 и 1. Положим $x = AX$, $y = AY$. Тогда

$$\tfrac{1}{4}\, xy = \tfrac{1}{2} \cdot AX \cdot AY \cdot \sin 30^\circ = S_{AXY} = S_{AXK} + S_{AKY} = \tfrac{1}{2}\,(2x + y) \iff y(x-2) = 4x.$$

Очевидно, что $x > 2$. Площадь треугольника AXY выражается функцией

$$S(x) = \frac{x^2}{x-2}, \quad \text{откуда} \quad S'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

Значит, производная S отрицательна при $x \in (2,4)$ и положительна при $x > 4$. Поэтому наименьшее значение S достигается при $x = 4$ и равно 8. $\square$

5. *В клетках таблицы 75×75 расставлены попарно различные натуральные числа. Каждое из них имеет не более трех различных простых делителей. Известно, что для любого числа a из таблицы*

в одной строке или в одном столбце с ним найдется такое число b, что a и b не являются взаимно простыми. Какое наибольшее количество простых чисел может быть в таблице?

Ответ: 4218.

Решение. Будем говорить, что составное число a *обслуживает* простое число p, если числа a и p не взаимно просты (то есть a делится на p). Для каждого простого числа в таблице есть обслуживающее его составное. Поскольку каждое составное число имеет не более трех различных простых делителей, оно обслуживает не более трех простых чисел. Таким образом, если таблица содержит n составных чисел, то простых — не более $3n$. Следовательно, общее количество чисел в таблице не превосходит $4n$. Тогда

$$4n \geqslant 75^2 \Longrightarrow n \geqslant \frac{75^2}{4} = 1406\tfrac{1}{4} \Longrightarrow n \geqslant 1407 \Longrightarrow 75^2 - n \leqslant 75^2 - 1407 = 4218.$$

Значит, количество простых чисел в таблице не превосходит 4218.

Покажем теперь, как можно разместить в таблице 4218 простых чисел. Воспользуемся следующим алгоритмом заполнения строк и столбцов.

1) Первые 54 позиции заполняем различными простыми числами $p_1, p_2, \ldots, p_{54}$. Эти числа должны быть новыми, то есть не использовавшимися ранее в таблице.

2) В следующих 18 клетках размещаем числа $p_1p_2p_3$, $p_4p_5p_6, \ldots, p_{52}p_{53}p_{54}$.

3) Последние три позиции оставляем незаполненными.

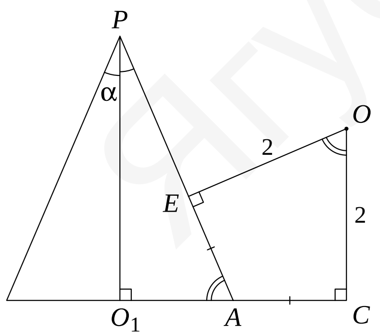
Применим этот алгоритм последовательно сначала к строкам $1, 2, \ldots, 75$, а затем к трем последним столбцам. Тем самым мы расставим $75 \cdot 54 + 3 \cdot 54 = 4212$ простых числа. Осталось заполнить клетки квадрата 3×3 из правого нижнего угла. Выберем новые простые числа $q_1, \ldots, q_6$ и расставим их так:

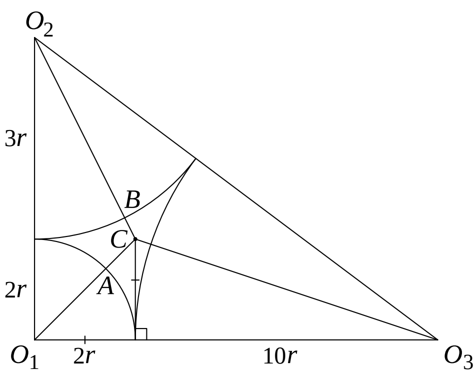
$$\begin{pmatrix} q_1q_2 & q_3q_4 & q_5q_6 \\ q_1 & q_3 & q_5 \\ q_2 & q_4 & q_6 \end{pmatrix}.$$

В итоге мы разместим 4218 различных простых чисел. □

6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Высоты у конусов одинаковые, а радиусы их оснований равны $2r$, $3r$ и $10r$. На стол положили шар радиуса 2, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от всех точек касания конусов. Найдите r.*

Ответ: 1.





Решение: Пусть O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов, O — центр шара, R — радиус шара, C — точка касания шара со столом, 2α и 2β — углы при вершине первого и второго конусов, A и B — точки пересечения отрезков CO_1 и CO_2 с основаниями конусов. На левом рисунке показано сечение первого конуса плоскостью COO_1. Касание шара с первым конусом означает, что перпендикуляр OE, опущенный из точки O на образующую PA, равен R. Действительно, в этом случае шар и конус касаются плоскости, проходящей через образующую PA перпендикулярно сечению, и лежат по разные стороны от нее. Тогда шар касается прямых AC и AE в точках C и E, откуда

$$OC = OE = 2, \quad AC = AE \quad \text{и} \quad \angle AOC = \tfrac{1}{2}\angle EOC = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}.$$

Поэтому $AC = 2\,\mathrm{tg}\bigl(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\bigr)$ и, аналогично, $BC = 2\,\mathrm{tg}\bigl(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\bigr)$. Положим

$$\lambda = \mathrm{tg}\bigl(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}\bigr), \quad \mu = \mathrm{tg}\bigl(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\beta}{2}\bigr).$$

Так как $O_1O_2 = 5r$, $O_1O_3 = 12r$, $O_2O_3 = 13r$, треугольник $O_1O_2O_3$ является прямоугольным. В силу условия точка C равноудалена от точек касания оснований конусов. Тогда C лежит на пересечении биссектрис треугольника $O_1O_2O_3$ и, значит, является центром его вписанной окружности, радиус которой равен $2r$. Вычисляя CO_1^2 и CO_2^2 двумя способами, мы получим

$$\left\{\begin{array}{l}(2r+2\lambda)^2 = 8r^2,\\(3r+2\mu)^2 = 13r^2\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}4\lambda^2 + 8\lambda r = 4r^2,\\4\mu^2 + 12\mu r = 4r^2\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda^2 + 2\lambda r - r^2 = 0,\\\lambda^2 - \mu^2 = r\,(3\mu - 2\lambda)\end{array}\right. \qquad (*)$$

(мы вычли второе уравнение из первого). Заметим, что

$$\frac{1}{\lambda} - \lambda = \frac{1+\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}} - \frac{1-\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \text{и, аналогично,} \quad \frac{1}{\mu} - \mu = 2\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

В силу равенства высот конусов справедливо соотношение $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{3}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Поэтому

$$1 - \mu^2 = \frac{3\mu}{2\lambda}\bigl(1-\lambda^2\bigr) \quad \text{и} \quad \lambda^2 - \mu^2 = \lambda^2 - 1 + 1 - \mu^2 = \frac{(1-\lambda^2)(3\mu-2\lambda)}{2\lambda}.$$

Второе из уравнений $(*)$ дает

$$r = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{3\mu - 2\lambda} = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right).$$

Из первого уравнения системы $(*)$ вытекает, что $\lambda = r\,(\sqrt{2}-1)$. Исключая λ, мы получим

$$2r = \frac{\sqrt{2}+1}{r} - (\sqrt{2}-1)r \Longleftrightarrow \sqrt{2}+1 = (\sqrt{2}+1)r^2 \Longleftrightarrow r = 1. \quad \square$$