Вариант 9

1. *Ожерелье состоит из 80 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что на любом участке ожерелья между двумя синими бусинками есть хотя бы одна красная, а на любом участке ожерелья между двумя красными есть хотя бы одна зеленая. Какое наименьшее количество зелёных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)*

Ответ: 27.

Решение. Если синие бусинки расположены по кругу, то число пар соседних бусинок равно количеству бусинок. Так как между любыми двумя синими бусинками есть красная, красных бусинок в ожерелье не меньше, чем синих. Аналогичным образом доказывается, что зеленых бусинок в ожерелье не меньше, чем красных. Значит, зеленых бусинок не меньше, чем $\frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$, то есть их по крайней мере 27. Приведем пример ожерелья, содержащего ровно 27 зеленых бусинок:

$$\text{ЗКС; ЗКС; } \ldots \text{; ЗКС (26 раз); ЗК.} \quad \square$$

2. *У 100-значного натурального числа стерли две соседние цифры. В результате число уменьшилось в 87 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.*

Ответ: $435 \cdot 10^{97}$, $1305 \cdot 10^{96}$, $2175 \cdot 10^{96}$, $3045 \cdot 10^{96}$.

Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k a + 10^{k+2} n$, где a, k, m, n — неотрицательные целые числа, причем $m < 10^k$ и $a < 100$. Стерев цифры в k-м и $(k+1)$-м разрядах, мы получим число $m + 10^k n$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+2} n = 87\left(m + 10^k n\right) \iff 86m = 10^k\,(a + 13n).$$

Число $a + 13n$ положительно и делится на 43. Кроме того, $a + 13n < 86$, иначе $m \geqslant 10^k$. Поэтому $a + 13n = 43$, и пара (n, a) принимает значения $(0, 43)$, $(1, 30)$, $(2, 17)$, $(3, 4)$. В первом случае число разрядов равно $(k+2)$, откуда $k = 98$. Тогда $m = 5 \cdot 10^{97}$, а исходное число равно

$$m + 10^k a = 5 \cdot 10^{97} + 43 \cdot 10^{98} = 435 \cdot 10^{97}.$$

В остальных случаях число разрядов равно $(k+3)$, откуда $k = 97$. Тогда $m = 5 \cdot 10^{96}$, а исходными числами будут

$$10^{99} + 30 \cdot 10^{97} + 5 \cdot 10^{96}, \qquad 2 \cdot 10^{99} + 17 \cdot 10^{97} + 5 \cdot 10^{96}, \qquad 3 \cdot 10^{99} + 4 \cdot 10^{97} + 5 \cdot 10^{96},$$

что и дает ответ. $\square$

3. *Даны числа $x_1, \ldots, x_n \in (0, 1)$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt{1 - x_1} + \ldots + \sqrt{1 - x_n}}{\sqrt{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{n}}{2}$.

Решение. Заметим, что при любых $a_1, \ldots, a_n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Отсюда в силу неравенства для среднего гармонического и среднего арифметического

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}} \leqslant \frac{\sqrt{x_1} + \ldots + \sqrt{x_n}}{n\sqrt{n}}.$$

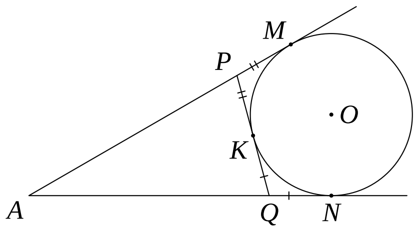
Тогда по неравенству Коши

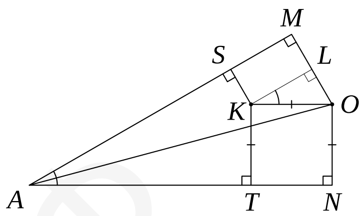
$$A \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k}\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)}{n\sqrt{n}} \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k}\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)^2}{2n\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (1-x_k) + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{2}$. $\square$

4. *Внутри угла раствора* 30° *с вершиной* A *выбрана точка* K, *расстояния от которой до сторон угла равны 1 и 2. Через точку* K *проводятся всевозможные прямые, пересекающие стороны угла. Найдите минимальный периметр треугольника, отсекаемого прямой от угла.*

   Ответ: $4\left(2+\sqrt{3}\right)$.





Решение. Проведем такую окружность ω, касающуюся сторон угла в точках M и N, что K лежит на малой дуге MN (см. левый рисунок). Обозначим через p периметр треугольника, отсекаемого от угла касательной к ω в точке K. Тогда

$$p = AP + PK + KQ + AQ = AP + PM + QN + AQ = AM + AN = 2 \cdot AN.$$

Заметим, что в этом рассуждении можно заменить K любой другой точкой, лежащей на малой дуге MN.

Покажем, что периметр p будет минимальным. Пусть ℓ — секущая к ω, проходящая через точку K. Проведем параллельно ей прямую ℓ_1, касающуюся малой дуги MN. Прямые ℓ и ℓ_1 отсекают от угла подобные треугольники. Прямая ℓ_1 дает меньший треугольник, периметр которого равен p. Значит, на ℓ минимум не реализуется.

Пусть T и S — проекции точки K на стороны угла, где $KT = 2$ и $KS = 1$. Построим окружность ω. Обозначим через O точку пересечения биссектрисы угла с прямой, проходящей через K параллельно AT (см. правый рисунок). Пусть M и N — проекции точки O на лучи AS и AT, L — проекция K на OM. Тогда

$$OM = ON = KT = 2, \quad LO = OM - LM = OM - KS = 1 \quad \text{и} \quad OK = 2,$$

поскольку $\angle LKO = \angle MAN = 30^\circ$. Значит, O — центр искомой окружности ω. По доказанному выше

$$p = 2 \cdot AN = 2 \cdot ON \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ = 4 \cdot \frac{1+\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 4\left(2+\sqrt{3}\right). \quad \square$$

5. *В клетках таблицы* 80×80 *расставлены попарно различные натуральные числа. Каждое из них либо простое, либо является произведением двух простых чисел (возможно, совпадающих). Известно, что для любого числа* a *из таблицы в одной строке или в одном столбце с ним найдется такое число* b, *что* a *и* b *не являются взаимно простыми. Какое наибольшее количество простых чисел может быть в таблице?*

   Ответ: 4266.

Решение. Будем говорить, что составное число a *обслуживает* простое число p, если числа a и p не взаимно просты (то есть a делится на p). Для каждого простого числа в таблице есть обслуживающее его составное. Поскольку каждое составное число имеет не более двух различных простых делителей, оно обслуживает не более двух простых чисел. Таким образом, если таблица содержит n составных чисел, то простых — не более $2n$. Следовательно, общее количество чисел в таблице не превосходит $3n$. Тогда

$$3n \geqslant 80^2 \Longrightarrow n \geqslant \tfrac{80^2}{3} = 2133\tfrac{1}{3} \Longrightarrow n \geqslant 2134 \Longrightarrow 80^2 - n \leqslant 80^2 - 2134 = 4266.$$

Значит, количество простых чисел в таблице не превосходит 4266.

Покажем теперь, как можно разместить в таблице 4266 простых чисел. Воспользуемся следующим алгоритмом заполнения строк и столбцов.

1) Первые 52 позиции заполняем различными простыми числами $p_1, p_2, \ldots, p_{52}$. Эти числа должны быть новыми, то есть не использовавшимися ранее в таблице.

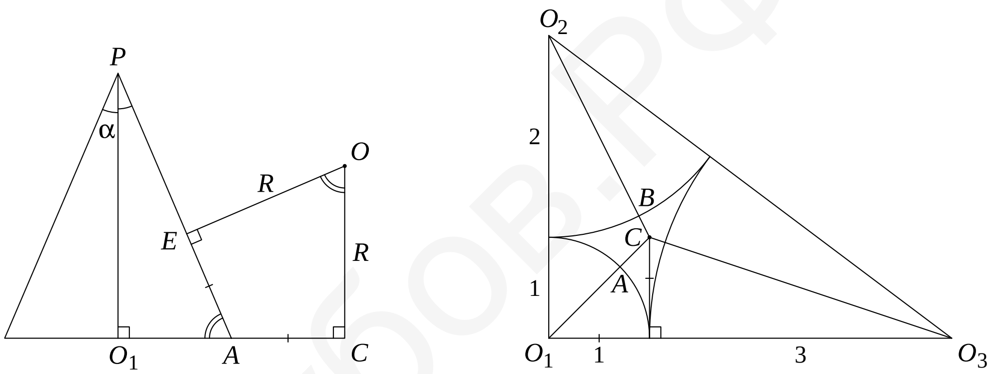
2) В следующих 26 клетках размещаем числа $p_1p_2, p_3p_4, \ldots, p_{51}p_{52}$.

3) Последние две позиции оставляем незаполненными.

Применим этот алгоритм последовательно сначала к строкам $1, 2, \ldots, 80$, а затем к двум последним столбцам. Тем самым мы расставим $80 \cdot 52 + 2 \cdot 52 = 4264$ простых числа. Осталось заполнить клетки квадрата 2×2 из правого нижнего угла. В нем на одной диагонали мы поставим пару новых простых чисел, а на другой — их квадраты. В итоге мы разместим 4266 различных простых чисел. $\square$

6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Высоты у конусов одинаковые, а радиусы их оснований равны* 1, 2 *и* 3. *На стол положили шар, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от всех точек касания конусов. Найдите радиус шара.*

Ответ: 1.



Решение: Пусть O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов, O — центр шара, R — радиус шара, C — точка касания шара со столом, 2α и 2β — углы при вершине первого и второго конусов, A и B — точки пересечения отрезков CO_1 и CO_2 с основаниями конусов. На левом рисунке показано сечение первого конуса плоскостью COO_1. Касание шара с первым конусом означает, что перпендикуляр OE, опущенный из точки O на образующую PA, равен R. Действительно, в этом случае шар и конус касаются плоскости, проходящей через образующую PA перпендикулярно сечению, и лежат по разные стороны от нее. Тогда шар касается прямых AC и AE в точках C и E, откуда

$$OC = OE = R, \quad AC = AE \quad \text{и} \quad \angle AOC = \tfrac{1}{2}\angle EOC = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}.$$

Поэтому $AC = R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ и, аналогично, $BC = R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$. Положим

$$\lambda = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}\right), \quad \mu = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\beta}{2}\right).$$

Так как $O_1O_2 = 3$, $O_1O_3 = 4$, $O_2O_3 = 5$, треугольник $O_1O_2O_3$ является прямоугольным. В силу условия точка C равноудалена от точек касания оснований конусов. Тогда C лежит на пересечении биссектрис треугольника $O_1O_2O_3$ и, значит, является центром его вписанной окружности, радиус которой равен 1. Вычисляя CO_1^2 и CO_2^2 двумя способами, мы получим

$$\left\{\begin{array}{l}(1+\lambda R)^2 = 2,\\ (2+\mu R)^2 = 5\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda^2R^2 + 2\lambda R = 1,\\ \mu^2R^2 + 4\mu R = 1\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda^2R^2 + 2\lambda R - 1 = 0,\\ \left(\lambda^2 - \mu^2\right)R^2 = 2R\left(2\mu - \lambda\right)\end{array}\right. \qquad (*)$$

(мы вычли второе уравнение из первого). Заметим, что

$$\frac{1}{\lambda}-\lambda=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}-\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=2\operatorname{tg}\alpha \quad \text{и, аналогично,} \quad \frac{1}{\mu}-\mu=2\operatorname{tg}\beta.$$

В силу равенства высот конусов справедливо соотношение $\operatorname{tg}\beta=2\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому

$$1-\mu^2=\frac{2\mu}{\lambda}\left(1-\lambda^2\right) \quad \text{и} \quad \lambda^2-\mu^2=\lambda^2-1+1-\mu^2=\frac{\left(1-\lambda^2\right)(2\mu-\lambda)}{\lambda}.$$

Второе из уравнений $(*)$ дает

$$R=\frac{2(2\mu-\lambda)}{\left(\lambda^2-\mu^2\right)}=\frac{2\lambda}{\left(1-\lambda^2\right)} \Longleftrightarrow R-\lambda^2R=2\lambda.$$

Из первого уравнения системы $(*)$ вытекает, что $\lambda R=\sqrt{2}-1$. Исключая λ, мы получим

$$R-\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{R}=\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{R} \Longleftrightarrow R^2=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=1 \Longleftrightarrow R=1. \quad \square$$