Вариант 8

1. *На нитке надеты 75 синих, 75 красных и 75 зеленых бусинок. Назовем пятерку подряд идущих бусинок хорошей, если среди них ровно 3 зеленых бусинки и по одной красной и синей. Какое наибольшее количество хороших пятерок может быть на этой нитке?*

Ответ: 123.

Решение. Заметим, что первая и последняя зеленые бусинки входят не более чем в три хорошие пятерки, вторая и предпоследняя — не более чем в четыре пятерки, а остальные — не более чем в пять пятерок. Если сложить эти неравенства, то в правой части получится $2\cdot 3+2\cdot 4+71\cdot 5=369$, а в левой — утроенное количество хороших пятерок, поскольку каждая будет учтена трижды. Значит, всего может быть не более 123 хороших пятерок.

Приведем пример расположения бусинок, дающего ровно 123 хороших пятерки:

$$\text{КСЗЗЗ; КСЗЗЗ; } \ldots\text{; КСЗЗЗ (25 раз); КС } \ldots$$

(многоточие в конце означает произвольную комбинацию синих и красных бусинок). Хорошими будут пятерки, начинающиеся с позиций $1, 2, \ldots, 123$, и только они. $\square$

2. *У 200-значного натурального числа одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 5 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.*

Ответ: $125a\cdot 10^{97}$ при $a=1,2,3$.

Решение. Представим исходное число в виде $m+10^k a+10^{k+1}n$, где a — десятичная цифра, k, m, n — неотрицательные целые числа, причем $m<10^k$. Заменив цифру a нулем, мы получим число $m+10^{k+1}n$. По условию

$$m+10^k a+10^{k+1}n=5\left(m+10^{k+1}n\right)\Longleftrightarrow 4m=10^k\,(a-40n).$$

Заметим, что $n=0$, иначе $m<0$. Поэтому a будет старшей цифрой исходного числа, откуда $k=199$. Тогда

$$4m=10^k a=10^{199}a\Longleftrightarrow m=25a\cdot 10^{197},$$

и исходное число равно $125a\cdot 10^{197}$. Так как $m<10^{199}$, цифра a принимает значения 1, 2, 3. $\square$

3. *Даны числа $x_1,\ldots,x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A=\frac{\cos^2 x_1+\ldots+\cos^2 x_n}{\sqrt{n}+\sqrt{\operatorname{ctg}^4 x_1+\ldots+\operatorname{ctg}^4 x_n}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{n}}{4}$.

Решение. Заметим, что при любых $a_1,\ldots,a_n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\leqslant n\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

Отсюда в силу неравенства для среднего гармонического и среднего арифметического

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{\operatorname{ctg}^4 x_1+\ldots+\operatorname{ctg}^4 x_n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^2 x_k}=\frac{\sqrt{n}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2 x_k}}\leqslant\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k.$$

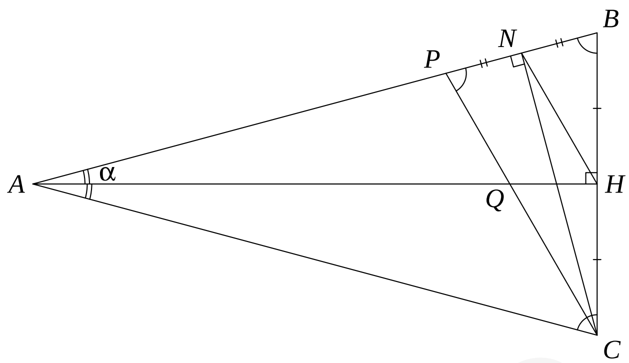
Тогда по неравенству Коши

$$A\leqslant\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sin^2 x_k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\cos^2 x_k\right)}{n\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{4n\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k+\sum_{k=1}^{n}\cos^2 x_k\right)^2=\frac{\sqrt{n}}{4}.$$

Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{\pi}{4}$. $\square$

4. *На основание BC равнобедренного треугольника ABC опущена высота AH. На стороне AB отмечена такая точка P, что $CP = BC$. Отрезок CP пересекает высоту AH в точке Q. Оказалось, что площадь треугольника BHQ в 4 раза меньше площади треугольника APQ. Найдите углы треугольника ABC.*

   Ответ: $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$.



Решение 1. Поскольку треугольник ABC равнобедренный, его высота AH является также биссектрисой и медианой, откуда $BH = CH$ и $\angle CAH = \angle BAH$. Пусть N — середина отрезка BP. Тогда NH — средняя линия треугольника PBC и, значит, $NH \parallel PC$. Треугольник BCP равнобедренный, поэтому отрезок CN будет его высотой. В силу условия

$$4 = \frac{S_{APQ}}{S_{BHQ}} = \frac{S_{APQ}}{S_{CHQ}} = \frac{AQ \cdot PQ}{QH \cdot QC} \Longrightarrow \frac{PQ}{QC} = 4 \cdot \frac{QH}{AQ} = 4 \cdot \frac{PN}{AP}.$$

Так как AQ — биссектриса треугольника APC, мы получим

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{QC} = 4 \cdot \frac{PN}{AP}.$$

Положим $x = \frac{AN}{AB}$. Тогда

$$\frac{PN}{AB} = \frac{BN}{AB} = 1 - x, \quad \frac{AP}{AB} = 1 - 2 \cdot \frac{PN}{AB} = 2x - 1,$$

и из предыдущего равенства

$$(2x-1)^2 = \left(\frac{AP}{AB}\right)^2 = 4 \cdot \frac{PN}{AP} \cdot \frac{AP}{AB} = 4 \cdot \frac{PN}{AB} = 4 - 4x \Longleftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $x = \frac{AN}{AC} = \cos \angle BAC$, угол BAC равен 30°, а углы ABC и ACB равны 75°. $\square$

Решение 2. Заметим, что по двум катетам равны прямоугольные треугольники AHB и AHC, а также QHB и QHC. Тогда $\angle BAH = \angle CAH$; обозначим общее значение этих углов через α. Треугольники BCP и BAC — равнобедренные, поэтому

$$\angle CPB = \angle PBC = \angle ACB = 90^\circ - \alpha \quad \text{и} \quad \angle APC = 90^\circ + \alpha.$$

Треугольники AQB и AQC равны по двум сторонам и углу, откуда

$$\angle PBQ = \angle ACQ = 180^\circ - \angle APC - \angle PAC = 90^\circ - 3\alpha \quad \text{и} \quad \angle QBH = \angle QCH = \angle ACB - \angle ACQ = 2\alpha.$$

По формуле для площади треугольника

$$\tfrac{1}{2}AQ\cdot PQ\cdot\sin\angle AQP=S_{APQ}=4S_{BHQ}=4S_{CHQ}=2CQ\cdot HQ\cdot\sin\angle CQH=2CQ\cdot HQ\cdot\sin\angle AQP.$$

Таким образом,

$$4\cdot\frac{CQ}{AQ}=\frac{PQ}{HQ}=\frac{PQ}{BQ\sin\angle QBH}=\frac{PQ}{BQ\sin 2\alpha}\,.$$

По теореме синусов для треугольников CQA и PBQ

$$\frac{CQ}{AQ}=\frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ-3\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha}\quad\text{и}\quad\frac{PQ}{BQ}=\frac{\sin(90^\circ-3\alpha)}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Подставляя эти соотношения в предыдущее равенство, мы получим

$$4\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha}=4\cdot\frac{CQ}{AQ}=\frac{PQ}{BQ\sin 2\alpha}=\frac{\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}\,.$$

Следовательно,

$$\cos^2 3\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha\sin 2\alpha=2\sin^2 2\alpha,$$

откуда

$$\cos 3\alpha=\sqrt{2}\,\sin 2\alpha\Longleftrightarrow 1-4\sin^2\alpha=2\sqrt{2}\,\sin\alpha\Longleftrightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\Longleftrightarrow\alpha=15^\circ.\quad\square$$

5. *Из n^2 лампочек собрали табло $n\times n$. Каждая лампочка имеет два состояния — включенное и выключенное. При нажатии на произвольную лампочку ее состояние сохраняется, а все лампочки, находящиеся с ней в одной строке или в одном столбце, меняют свое состояние на противоположное. Изначально все лампочки на табло выключены. Вася последовательно нажал на несколько лампочек, из которых никакие две не лежат в одной строке или в одном столбце. Какое наибольшее количество лампочек мог зажечь Вася?*

Ответ: $\frac{n^2}{2}$ при четном n и $\frac{n^2-1}{2}$ при нечетном n.

Решение. Назовем *реверсированием* набора лампочек смену состояния всех лампочек этого набора на противоположное. Отметим два простых факта.

1) *Нажатие на лампочку эквивалентно реверсированию строки и столбца, в которых эта лампочка стоит.* Действительно, при таких реверсированиях нажимаемая лампочка меняет свое состояние дважды, то есть не меняет его, а остальные лампочки в той же строке или том же столбце меняют свое состояние один раз.

2) *При последовательном нажатии нескольких лампочек соответствующие им реверсирования можно производить в любом порядке.* Действительно, для любой лампочки число смен ее состояний равно суммарному количеству реверсирований строк и столбцов, которым она принадлежит.

Пусть было сделано k нажатий на лампочки. Тогда мы реверсировали k различных строк и k различных столбцов. При этом изменят свое состояние по сравнению с исходным (то есть включатся) в точности те лампочки, которые стоят в реверсированной строке и нереверсированном столбце или наоборот. Тех и других лампочек имеется $k(n-k)$, поэтому в результате будет гореть $2k(n-k)$ лампочек. Покажем, что

$$2k(n-k)\leqslant\frac{n^2}{2}\ \text{при четном } n\quad\text{и}\quad 2k(n-k)\leqslant\frac{n^2-1}{2}\ \text{при нечетном } n.\tag{$*$}$$

Рассмотрим выражение $2k(n-k)$ как квадратный трехчлен относительно k. Его график представляет собой параболу с вершиной $k=\frac{n}{2}$. Так как коэффициент при k^2 отрицателен, наибольшее значение трехчлена достигается в вершине и равно $\frac{n^2}{2}$. Тогда $2k(n-k)\leqslant\frac{n^2}{2}$, и первое из неравенств $(*)$ доказано. Для обоснования второго нужно еще заметить, что число $2k(n-k)$ целое, поэтому

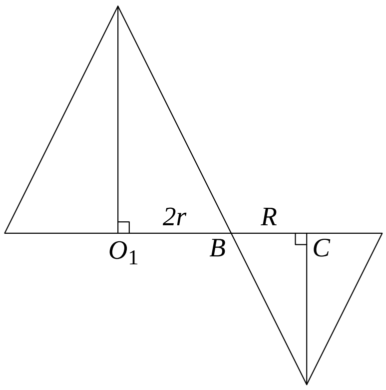
$$2k(n-k)\leqslant\left[\frac{n^2}{2}\right]=\frac{n^2-1}{2}.$$

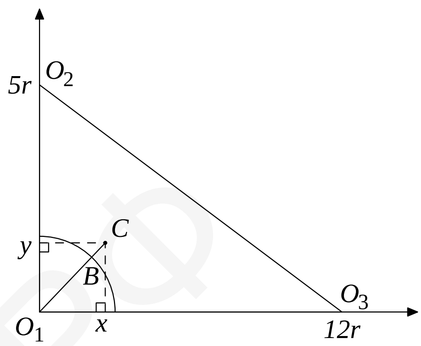
Осталось показать, что в неравенствах $(*)$ могут достигаться равенства. Нажмем в исходном состоянии $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ различных лампочек на главной диагонали табло. При четном n мы получим $\frac{n^2}{2}$ зажженных лампочек, а при нечетном n их число составит

$$2 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \left(n - \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n^2-1}{2}. \quad \square$$

6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны $2r$, $3r$ и $10r$. На стол поставили меньшим основанием вниз усеченный конус, который имеет с каждым из остальных конусов общую образующую. Найдите r, если радиус меньшего основания усеченного конуса равен 15.*

Ответ: 29.





Решение. Пусть C — центр меньшего основания усеченного конуса, O_1, O_2, O_3 — центры оснований других конусов, $R = 15$. Обозначим через $\mathcal{K}_0$ конус, дополняющий усеченный конус до обычного, а через $\mathcal{K}_1$ — конус с центром основания O_1. На левом рисунке показано сечение $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ плоскостью Π, проходящей через точки O_1 и C перпендикулярно столу. По условию $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ имеют общую образующую, которая лежит в Π, поскольку проходит через вершины конусов. Пусть B — точка пересечения этой образующей со столом. Тогда B лежит на границе оснований $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$, а также на отрезке CO_1, соединяющем центры оснований. Отсюда вытекает, что основания $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ касаются друг друга в точке B, то есть $BC = R$. Аналогично проверяется, что расстояние от C до оснований двух других конусов равно R. Заметим, что

$$O_1O_2 = 5r, \quad O_1O_3 = 12r, \quad O_2O_3 = 13r,$$

то есть треугольник $O_1O_2O_3$ — прямоугольный. Направим координатные оси вдоль лучей O_1O_3 и O_1O_2 (см. правый рисунок). Пусть точка C имеет координаты (x, y). Так как

$$CO_1 = BO_1 + BC = 2r + R, \quad CO_2 = 3r + R, \quad CO_3 = 10r + R,$$

справедливы равенства

$$(2r+R)^2 - x^2 = y^2 = (10r+R)^2 - (12r-x)^2 \iff 4r^2 + 4rR = 20rR + 24rx - 44r^2 \iff 3x = 6r - 2R,$$

а также

$$(2r+R)^2 - y^2 = x^2 = (3r+R)^2 - (5r-y)^2 \iff 4r^2 + 4rR = 6rR + 10ry - 16r^2 \iff 5y = 10r - R.$$

Поскольку $x^2 + y^2 = CO_1^2 = (2r+R)^2$, мы получим

$$225\,(2r+R)^2 = (30r - 10R)^2 + (30r - 3R)^2 \iff 225r^2 - 420Rr - 29R^2 = 0.$$

Это уравнение относительно r имеет единственное положительное решение $r = \frac{29}{15}\,R = 29. \quad \square$