Вариант 5

1. *Ожерелье состоит из 50 синих и некоторого количества красных бусинок. Известно, что на любом отрезке ожерелья, содержащем 8 синих бусинок, есть не менее 4 красных. Какое наименьшее количество красных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)*

Ответ: 29.

Решение. Заметим, что любой отрезок ожерелья из 11 бусинок содержит не более 7 синих и не менее 4 красных бусинок (в противном случае он содержал бы 8 синих бусинок и не более 3 красных). Зафиксируем в ожерелье красную бусинку. Примыкающие к ней 7 последовательных отрезков из 11 бусинок не покрывают всего ожерелья, поскольку в эти отрезки входит не более 49 синих бусинок из 50. Таким образом, общее число красных бусинок не меньше, чем $7 \cdot 4 + 1 = 29$.

Приведем пример ожерелья, содержащего ровно 29 красных бусинок. Рассмотрим блок

$$\text{Б} = \text{КС КС КС КС; ССС},$$

состоящий из 4 красных и 7 синих бусинок. Тогда искомое ожерелье имеет вид

$$\text{Б}, \text{Б}, \ldots, \text{Б (7 раз); КС.} \quad \square$$

2. *У 100-значного натурального числа стерли одну из цифр (не старшую). В результате число уменьшилось в 13 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.*

Ответ: $1625 \cdot 10^{96}$, $195 \cdot 10^{97}$, $2925 \cdot 10^{96}$ и $13b \cdot 10^{98}$ при $b = 1, 2, 3$.

Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k a + 10^{k+1} n$, где k, m, n — неотрицательные целые числа, a — десятичная цифра. Стерев цифру a, мы получим число $m + 10^k n$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+1} n = 13\left(m + 10^k n\right) \Longleftrightarrow 12m = 10^k (a - 3n).$$

Цифра a должна делиться на 3, откуда $a = 3b$ при $b \in \{1, 2, 3\}$. Тогда $4m = 10^k (b - n)$. Цифра a не является старшей в исходном числе, поэтому $n > 0$. Заметим также, что $n \leqslant 3$, иначе $m < 0$. Значит, n будет старшей цифрой исходного числа, откуда $k = 98$. Рассмотрим три случая.

1) $b = n$. Тогда $m = 0$, а исходное число равно $13b \cdot 10^{98}$.

2) $b = n + 1$. Тогда $m = 25 \cdot 10^{96}$, пара (b, n) равна $(2, 1)$ или $(3, 2)$, а исходное число соответственно равно $1625 \cdot 10^{96}$ или $2925 \cdot 10^{96}$.

2) $b = n + 2$. Тогда $m = 5 \cdot 10^{97}$, $(b, n) = (3, 1)$, а исходное число равно $195 \cdot 10^{97}$. $\square$

3. *Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \big(2(\sin x_1 + \ldots + \sin x_n) + \cos x_1 + \ldots + \cos x_n\big) \cdot \big(\sin x_1 + \ldots + \sin x_n - 2(\cos x_1 + \ldots + \cos x_n)\big).$$

Ответ: $-\frac{5n^2}{2}$.

Решение. Для $k = 1, \ldots, n$ положим $t_k = 3\sin x_k - \cos x_k$, $s_k = \sin x_k + 3\cos x_k$. Тогда

$$\begin{aligned}
4A &= \left(\sum_{k=1}^{n}(4\sin x_k + 2\cos x_k)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(2\sin x_k - 4\cos x_k)\right) = \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}(3\sin x_k - \cos x_k) + \sum_{k=1}^{n}(\sin x_k + 3\cos x_k)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(3\sin x_k - \cos x_k) - \sum_{k=1}^{n}(\sin x_k + 3\cos x_k)\right) = \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)^2.
\end{aligned}$$

В силу неравенства Коши

$$\left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n} s_k^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n}\left(s_k^2+t_k^2\right) = n\sum_{k=1}^{n} 10\left(\sin^2 x_k+\cos^2 x_k\right) = 10n^2,$$

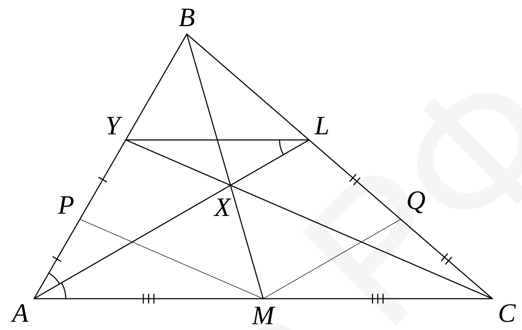
откуда

$$A \geqslant -\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)^2 \geqslant -\frac{5n^2}{2}.$$

Равенство реализуется, когда $\sin x_1 = \ldots = \sin x_n = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\cos x_1 = \ldots = \cos x_n = \frac{3}{\sqrt{10}}$. □

4. *Биссектриса AL и медиана BM треугольника ABC пересекаются в точке X. Прямая CX пересекает сторону AB в точке Y. Найдите площадь треугольника CYL, если известно, что $\angle BAC = 60^\circ$ и $AL = x$.*

Ответ: $\frac{x^2}{4\sqrt{3}}$.



Решение. Пусть P и Q — середины отрезков AY и CL. Тогда MP и MQ — средние линии треугольников ACY и ACL, откуда $MP \parallel CY$ и $MQ \parallel AL$. Поэтому

$$\frac{AY}{YB} = 2\cdot\frac{PY}{YB} = 2\cdot\frac{MX}{XB} = 2\cdot\frac{LQ}{LB} = \frac{CL}{LB}.$$

Отсюда вытекает, что треугольники YBL и ABC подобны. Поэтому $AC \parallel YL$ и

$$\angle ALY = \angle LAC = \tfrac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ.$$

Значит, AYL — равнобедренный треугольник с основанием x и углом при основании 30°. Мы получаем

$$S_{CYL} = S_{AYL} = \left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x^2}{4\sqrt{3}}. \quad \square$$

5. *Каждая из клеток доски $m\times n$ покрашена в черный или белый цвет. Известно, что для любой клетки доски количество клеток, имеющих с ней одинаковый цвет и хотя бы одну общую вершину, нечетно. Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых это возможно.*

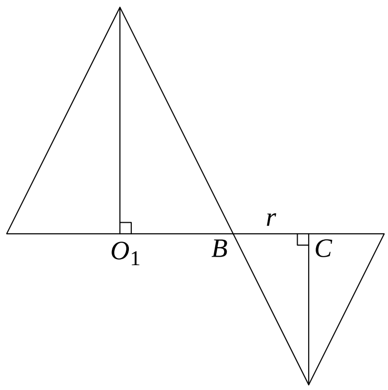
Ответ: n или m четно.

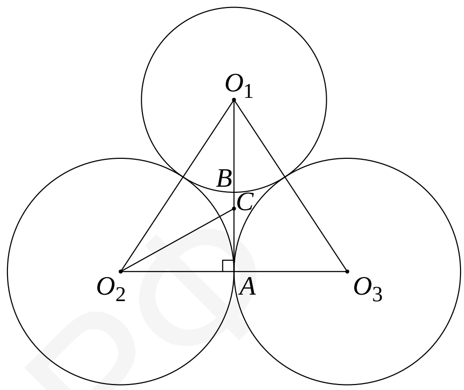
Решение. Назовем *соседними* клетки, имеющие общую вершину. Приведем пример раскраски, удовлетворяющей условию, если m или n четно. Пусть для определенности четно число строк. Покрасим первую и вторую строки в черный цвет, третью и четвертую — в белый, пятую и шестую — в черный, и так далее. Рассмотрим одноцветную «полоску» $2\times n$. Ее угловые клетки имеют по три соседние клетки того же цвета, а остальные — по пять. Поэтому такая раскраска удовлетворяет условию задачи.

Покажем, что для нечетных m и n требуемой раскраски не существует. В этом случае на доске нечетное число клеток и, значит, количество клеток одного из цветов тоже нечетно. Пусть для определенности нечетно число черных клеток. Рассмотрим множество $\mathcal{B}$ упорядоченных пар соседних черных клеток. Любая пара соседних черных клеток x и y учтена в множестве $\mathcal{B}$ два раза (как (x, y) и как (y, x)), поэтому количество элементов в множестве $\mathcal{B}$ четно. С другой стороны, у каждой черной клетки x существует нечетное число соседних черных клеток, поэтому для x имеется нечетное количество пар вида (x, y). Но выбрать x можно также нечетным числом способов. Значит, в $\mathcal{B}$ нечетное число элементов, что невозможно. $\square$

6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны* 6, 24 *и* 24. *На стол поставили меньшим основанием вниз усеченный конус, который имеет с каждым из остальных конусов общую образующую. Найдите радиус меньшего основания усеченного конуса.*

   Ответ: 2.





Решение. Пусть C — центр меньшего основания усеченного конуса, r — радиус этого основания, O_1, O_2, O_3 — центры оснований других конусов. Обозначим через $\mathcal{K}_0$ конус, дополняющий усеченный конус до обычного, а через $\mathcal{K}_1$ — конус с центром основания O_1. На левом рисунке показано сечение $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ плоскостью Π, проходящей через точки O_1 и C перпендикулярно столу. По условию $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ имеют общую образующую, которая лежит в Π, поскольку проходит через вершины конусов. Пусть B — точка пересечения этой образующей со столом. Тогда B лежит на границе оснований $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$, а также на отрезке CO_1, соединяющем центры оснований. Отсюда вытекает, что основания $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ касаются друг друга в точке B, то есть $BC = r$. Аналогично проверяется, что расстояние от C до оснований двух других конусов равно r. Таким образом, справедливы равенства

$$r = CO_1 - 6 = CO_2 - 24 = CO_3 - 24.$$

Тогда $CO_2 = CO_3$, то есть точка C лежит на общей касательной AO_1 к основаниям бóльших конусов (см. правый рисунок). Заметим, что

$$AO_1 = \sqrt{O_1O_2^2 - AO_2^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18.$$

Поэтому

$$(24 + r)^2 = CO_2^2 = 24^2 + AC^2 = 24^2 + (AO_1 - r - 6)^2 = 24^2 + (12 - r)^2, \quad \text{откуда } r = 2. \quad \square$$

ЯГУБОВ.РФ