Вариант 4

1. *На нитке надеты 150 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что среди любых шести бусинок, идущих подряд, есть хотя бы одна зеленая, а среди любых одиннадцати, идущих подряд, — хотя бы одна синяя. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть на нитке?*

   Ответ: 112.

   Решение. Мы можем выбрать $\left[\frac{150}{11}\right] = 13$ последовательных блоков по 11 бусинок. Так как каждый блок содержит хотя бы одну синюю бусинку, всего на нитке не менее 13 синих бусинок. Кроме того, мы можем сгруппировать все бусинки в 25 последовательных блоков по 6 бусинок. Каждый из блоков содержит хотя бы одну зеленую бусинку, поэтому всего их на нитке не менее 25. Значит, число красных бусинок не больше $150 - 25 - 13 = 112$.

   Приведем пример, когда нитка содержит ровно 112 красных бусинок. Разместим зеленые бусинки на позициях, кратных 6, а синие — на местах с номерами

$$11, 22, 33, 44, 55;\ 65, 76, 87, 98, 109;\ 119, 130, 141.$$

Остальные позиции заполним красными бусинками. □

2. *У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 9 раз. Сколько существует чисел, для которых это возможно?*

   Ответ: 7.

   Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k a + 10^{k+1} n$, где a — десятичная цифра, k, m, n — неотрицательные целые числа, причем $m < 10^k$. Заменив цифру a нулем, мы получим число $m + 10^{k+1} n$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+1} n = 9\left(m + 10^{k+1} n\right) \iff 8m = 10^k\left(a - 80n\right).$$

Заметим, что $n = 0$ (иначе m будет отрицательным), откуда $8m = 10^k a$. Таким образом, нулем заменяется старшая цифра исходного числа. Кроме того, $k > 0$, иначе $m = a = 0$. Тогда число $8m$ кратно 10 и потому оканчивается на 0. В силу условия число m оканчивается не на 0. Значит, последняя цифра m равна 5 и число m нечетно. Поэтому $8m$ не делится на 16, откуда $k \leqslant 3$. Рассмотрим три случая.

1) Пусть $k = 3$. Тогда $m = 125a$. Так как число m нечетно и меньше 1000, цифра a может принимать значения 1, 3, 5, 7, что дает нам 4 варианта.

2) Пусть $k = 2$. Тогда $m = \frac{25a}{2}$. Так как число m нечетно и меньше 100, цифра a равна 2 или 6. Эти значения дают нам еще 2 варианта.

3) Пусть $k = 1$. Тогда $m = \frac{5a}{4}$. Так как число m нечетно и меньше 10, мы получаем $a = 4$.

Заметим, что в 1) получатся четырехзначные числа, в 2) — трехзначные, в 3) — двузначные. Поэтому каждое число, удовлетворяющее условию задачи, входит ровно в один из наборов 1) – 3). Значит, общее количество вариантов равно $4 + 2 + 1 = 7$. □

3. *Числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяют условию $x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant 1$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \big(3(x_1 + \ldots + x_n) - 5(y_1 + \ldots + y_n)\big) \cdot \big(5(x_1 + \ldots + x_n) + 3(y_1 + \ldots + y_n)\big).$$

   Ответ: $17n$.

   Решение. Для $k = 1, \ldots, n$ положим $t_k = 4x_k - y_k$, $s_k = x_k + 4y_k$. Тогда

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n}(4x_k - y_k) - \sum_{k=1}^{n}(x_k + 4y_k)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(4x_k - y_k) + \sum_{k=1}^{n}(x_k + 4y_k)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)^2.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} t_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(t_k^2 + s_k^2\right) = 17 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 + y_k^2\right) \leqslant 17,$$

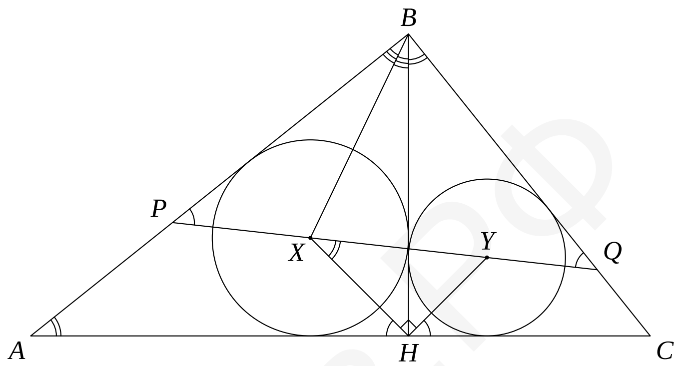
откуда

$$A \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} t_k \right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} t_k^2 \leqslant 17n.$$

Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{4}{\sqrt{17n}}$ и $y_1 = \ldots = y_n = -\frac{1}{\sqrt{17n}}$. $\square$

4. *В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. Точки X и Y — центры окружностей, вписанных в треугольники ABH и CBH соответственно. Прямая XY пересекает катеты AB и BC в точках P и Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH = h$.*

   Ответ: $\frac{h^2}{2}$.



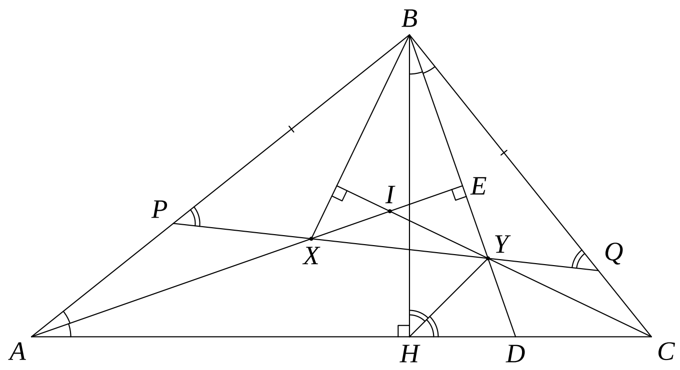
Решение 1. Прямые HX и HY — биссектрисы прямых углов AHB и BHC, откуда

$$\angle AHX = \angle BHX = \angle BHY = \angle CHY = 45^\circ \quad \text{и} \quad \angle XHY = 90^\circ.$$

Отрезки HX и HY относятся как радиусы окружностей, вписанных в подобные треугольники AHB и BHC, поэтому $\frac{HX}{HY} = \frac{AB}{BC}$. Значит, треугольники XHY и ABC подобны. Тогда

$$\angle BAC = \angle HXY = 180^\circ - \angle PXH,$$

и четырехугольник $AHXP$ будет вписанным. Следовательно, $\angle QPB = \angle AHX = 45^\circ$, то есть треугольник BPQ равнобедренный. Заметим, что треугольники PBX и HBX равны. Действительно, сторона BX у них общая, $\angle BPX = \angle BHX = 45^\circ$, а углы PBX и HBX равны, поскольку BX — биссектриса угла PBH. Тогда $BP = BH = h$ и $S_{BPQ} = \frac{BP^2}{2} = \frac{h^2}{2}$. $\square$



Решение 2. Обозначим через I центр вписанной окружности треугольника ABC. Покажем, что I — ортоцентр треугольника BXY. Пусть BD — биссектриса треугольника CBH, E — точка пересечения прямых AX и BY (см. рисунок). Тогда

$$\angle DAE = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\left(90^\circ - \angle ABH\right) = \frac{1}{2}\angle CBH = \angle DBH.$$

Таким образом, в треугольниках DAE и DBH имеются две пары одинаковых углов. Поэтому равны и их третьи углы, то есть $\angle AED = \angle BHD = 90^\circ$. Аналогично проверяется, что $YI \perp BX$. Значит, $BI \perp PQ$, поэтому луч BI будет одновременно биссектрисой и высотой треугольника BPQ. Следовательно, $\triangle BPQ$ равнобедренный, откуда $\angle BQP = 45^\circ$.

Заметим далее, что треугольники BHY и BQY равны, поскольку у них есть общая сторона BY и две пары одинаковых углов:

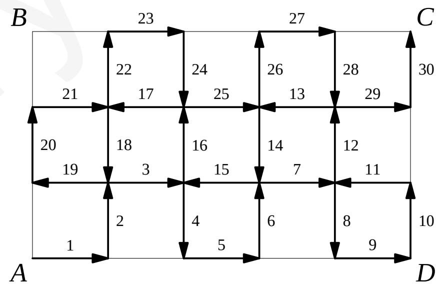
$$\angle HBY = \angle QBY \quad \text{и} \quad \angle BHY = \frac{1}{2}\angle BHC = 45^\circ = \angle BQY.$$

Поэтому $BP = BQ = BH = h$ и $S_{BPQ} = \frac{BQ^2}{2} = \frac{h^2}{2}$. $\square$

5. *Прямоугольник* 3×5 *разбит на 15 квадратов* 1×1. *Назовем путем перемещение по сторонам единичных квадратов, при котором ни одна из сторон не проходится дважды. Какую наибольшую длину может иметь путь, соединяющий две противоположные вершины прямоугольника?*

Ответ: 30.

Решение. Обозначим прямоугольник через $ABCD$, и пусть путь соединяет его вершины A и C. Назовем стороны квадратов 1×1 *ребрами*, вершины этих квадратов — *узлами*, а число ребер, примыкающих к узлу — *кратностью* узла. Заметим, что квадраты 1×1 порождают 38 различных ребер. Если путь проходит через узел кратности 3, то по одному ребру он приходит в узел, по другому — выходит из узла, а третье ребро, примыкающее к узлу, не может принадлежать пути. Пусть X — множество узлов, лежащих на ломаной BAD, за исключением точек B и D. Оно состоит из точки A и шести узлов кратности 3. Заметим, что точка A имеет кратность 2, а путь в нее не приходит. Поэтому к каждому узлу из X примыкает ребро, свободное от пути (независимо от того, проходит путь через даный узел или нет). Для несмежных узлов эти ребра заведомо разные, а пар смежных узлов не может быть больше 3. Значит, множество X дает не менее 4 ребер, свободных от пути. Те же рассуждения справедливы для ломаной BCD. Таким образом, всего имеется не меньше $2\cdot 4 = 8$ ребер, свободных от пути, а длина пути не превосходит $38 - 8 = 30$. Пример пути длины 30 показан на рисунке. $\square$



6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны* 72, 28 *и* 28, *а углы при вершине —* $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ *и* $\frac{2\pi}{3}$ *соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). Над столом подвесили шар, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от всех точек касания конусов. Найдите радиус шара.*

Ответ: $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов, O — центр шара, C — его проекция на стол, R — радиус шара. Точка C тоже равноудалена от точек касания оснований конусов, поэтому она лежит на пересечении биссектрис треугольника $O_1O_2O_3$ (см. правый рисунок). Значит, C является центром вписанной окружности $\triangle O_1O_2O_3$, а отрезок AC — радиус этой окружности. Заметим, что периметр треугольника $O_1O_2O_3$ равен 256 и

$$AO_1 = \sqrt{O_1O_2^2 - AO_2^2} = \sqrt{100^2 - 28^2} = 96,$$

откуда

$$AC = \frac{AO_2 \cdot AO_1}{128} = \frac{28 \cdot 96}{128} = 21.$$

Пусть B и D — точки пересечения отрезков CO_1 и CO_2 с основаниями конусов. Тогда

$$BC = AO_1 - AC - BO_1 = 96 - 21 - 72 = 3 \quad \text{и} \quad CD = \sqrt{AO_2^2 + AC^2} - DO_2 = \sqrt{28^2 + 21^2} - 28 = 7.$$

Касание шара с первым конусом означает, что перпендикуляр из точки O на образующую конуса, лежащую в плоскости COO_1, равен R (см. левый рисунок). Действительно, в этом случае шар и конус касаются плоскости, проходящей через эту образующую перпендикулярно COO_1, и лежат по разные стороны от нее. Поэтому

$$R = BC \cdot \cos\tfrac{\pi}{6} + OC \cdot \sin\tfrac{\pi}{6} \Longleftrightarrow OC = 2R - 3\sqrt{3}.$$

Применяя эти рассуждения к другому конусу, мы получим

$$R = CD \cdot \cos\tfrac{\pi}{3} + OC \cdot \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{7}{2} + R\sqrt{3} - \tfrac{9}{2} = R\sqrt{3} - 1 \Longleftrightarrow R = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right).$$

Необходимо также проверить, что шар касается образующих конусов, а не их продолжений за вершину. Это равносильно условиям

$$R\cos\tfrac{\pi}{6} \leqslant CO_1 = 75 \quad \text{и} \quad R\cos\tfrac{\pi}{3} \leqslant CO_2 = 35,$$

которые, очевидно, выполняются. $\square$