Вариант 2

1. *Ожерелье состоит из 175 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что у каждой красной бусинки разноцветные соседи, а на любом участке ожерелья между двумя зелёными бусинками есть хотя бы одна синяя. Какое наименьшее количество синих бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)*

Ответ: 30.

Решение 1. Покажем, что любой блок из шести последовательных бусинок содержит синюю бусинку. Можно считать, что в нем не более одной зеленой бусинки, иначе доказывать нечего. Если блок содержит 5 красных бусинок, то хотя бы 3 из них идут подряд, и средняя не удовлетворяет условию задачи. Поэтому в блоке не более четырех красных бусинок и, значит, есть синяя.

Фиксируем в ожерелье синюю бусинку, а остальные разобьем на 29 блоков по 6 бусинок. По доказанному каждый блок содержит хотя бы одну синюю бусинку. Значит, всего их в ожерелье не менее 30.

Осталось привести пример ожерелья, в котором синих бусинок ровно 30:

$$\text{ККЗККС; ККЗККС; } \ldots; \text{ ККЗККС (29 раз); С.} \quad \square$$

Решение 2. Фиксируем какую-нибудь зеленую или синюю бусинку, а остальные разобьем на 58 троек, идущих подряд. Каждая тройка содержит не более двух красных бусинок, иначе средняя красная бусинка имела бы одноцветных соседей. Поэтому всего в ожерелье красных бусинок не более $2 \cdot 58 = 116$, а синих и зеленых бусинок вместе — не менее $175 - 116 = 59$. Мысленно уберем все красные бусинки и заметим, что синих бусинок теперь не меньше половины, так как между любыми двумя зелеными бусинками есть синяя. Значит, синих бусинок не менее $\frac{59}{2} = 29\frac{1}{2}$, то есть их по крайней мере 30.

Осталось привести пример ожерелья, в котором синих бусинок ровно 30:

$$\text{ККЗККС; ККЗККС; } \ldots; \text{ ККЗККС (29 раз); С.} \quad \square$$

2. *У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 6 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.*

Ответ: $12a$ при $a = 1, 2, 3, 4$.

Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k a + 10^{k+1} n$, где a — десятичная цифра, k, m, n — неотрицательные целые числа, причем $m < 10^k$. Заменив цифру a нулем, мы получим число $m + 10^{k+1} n$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+1} n = 6\left(m + 10^{k+1} n\right) \iff 5m = 10^k (a - 50n).$$

Заметим, что $n = 0$, иначе m будет отрицательным. Кроме того, $k > 0$, в противном случае $m = 0$ и $a = 0$. Тогда равенство преобразуется к виду $m = 2a \cdot 10^{k-1}$. В силу условия число m оканчивается не на 0 и потому не делится на 10. Значит, $k = 1$, $m = 2a$, а исходное число равно $12a$. Так как $m < 10$, цифра a принимает значения 1, 2, 3, 4. $\square$

3. *Даны числа $x_1, \ldots, x_n$ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \left(\sqrt{\sin x_1} + \ldots + \sqrt{\sin x_n}\right) \cdot \left(\sqrt{\cos x_1} + \ldots + \sqrt{\cos x_n}\right).$$

Ответ: $\frac{n^2}{\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что при любых $a_1, \ldots, a_n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^4 \leqslant \left(n \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2 \leqslant n^3 \sum_{k=1}^{n} a_k^4.$$

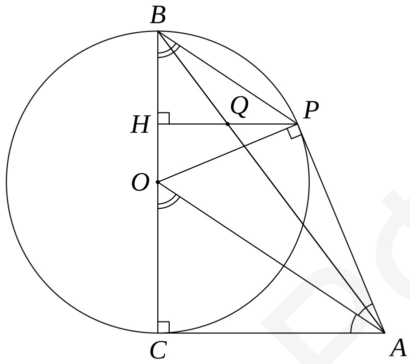
Отсюда в силу неравенства Коши

$$A^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sin x_k}\right)^4 + \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\cos x_k}\right)^4\right) \leqslant \frac{n^3}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k + \sum_{k=1}^{n}\cos^2 x_k\right) = \frac{n^4}{2}.$$

Поэтому $A \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}}$. Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{\pi}{4}$. $\square$

4. *Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На его катете BC длины 26 как на диаметре построена окружность. Из точки A к этой окружности проведена касательная AP, отличная от AC. Перпендикуляр PH, опущенный на отрезок BC, пересекает отрезок AB в точке Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH : CH = 4 : 9$.*

   Ответ: 24.



Решение. Пусть O — центр ω. Заметим, что

$$BH = \tfrac{4}{13}\,BC = 8, \quad CH = 18, \quad OH = \tfrac{1}{2}\,BC - BH = 5, \quad PH = \sqrt{OP^2 - OH^2} = 12.$$

Прямоугольные треугольники BHP и OCA подобны, поскольку

$$\angle CBP = \tfrac{1}{2}\angle COP = \tfrac{1}{2}\bigl(180^\circ - \angle CAP\bigr) = 90^\circ - \angle CAO = \angle COA.$$

Тогда

$$\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{AC}{OC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{PH}{BH} = \frac{3}{4}.$$

Из подобия треугольников BHQ и BCA мы получаем $QH = \frac{3}{4}\,BH = 6$. Поэтому

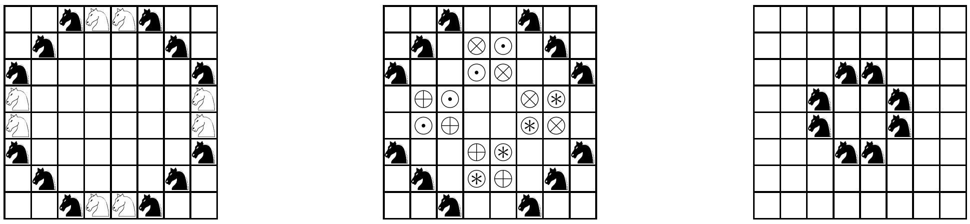
$$S_{BPQ} = \tfrac{1}{2}\cdot PQ\cdot BH = \tfrac{1}{2}\cdot(PH - QH)\cdot BH = \tfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24. \quad \square$$

5. *В каждой клетке шахматной доски стоит конь. Какое наименьшее количество коней можно убрать с доски так, чтобы на доске не осталось ни одного коня, бьющего ровно четырех других коней? (Конь бьет клетки, отстоящие от него на одну клетку по горизонтали и две по вертикали или наоборот.)*

   Ответ: 8 коней.

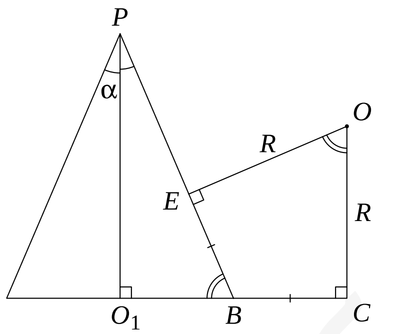
Решение. Покажем вначале, что снять придется не менее 8 коней. На левом рисунке отмечены все кони, которые бьют ровно 4 клетки доски (для удобства они выделены разными цветами). Назовем таких коней *плохими.* Чтобы конь перестал бить четырех других, нужно убрать с доски либо этого коня, либо одного из тех, кого он бьет. Покажем, что даже для того, чтобы избавиться от плохих черных коней, придется освободить не менее 8 клеток. На среднем рисунке кружочками отмечены клетки, находящиеся под боем плохих черных коней. Три плохих черных коня в левом верхнем углу бьют четыре клетки, отмеченные значком $\odot$. Если освободить лишь одну из этих клеток, то какой-то из черных коней останется плохим. Следовательно, для этой тройки коней необходимо очистить не менее двух клеток. Значит, для всех четырех троек нужно освободить не менее $4 \cdot 2 = 8$ клеток.

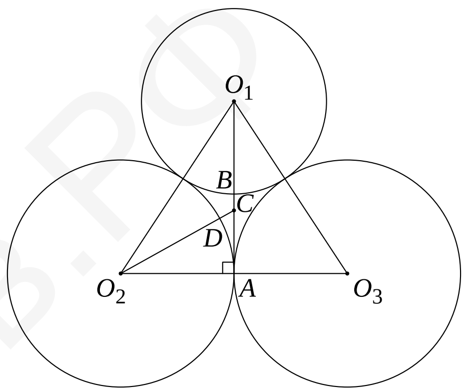
Приведем теперь пример, показывающий, что 8 коней достаточно. На правом рисунке отмечены кони, которых нужно снять с доски. $\square$



6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны* 1, 12 *и* 12, *а углы при вершине —* $4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $4\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ *и* $4\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ *соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). На стол положили шар, касающийся всех конусов. Найдите радиус шара.*

Ответ: $\frac{40}{21}$.





Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов, O — центр шара, R — радиус шара, C — точка касания шара со столом, 2α и 2β — углы при вершине первого и второго конусов. На левом рисунке показано сечение первого конуса плоскостью COO_1. Касание шара с первым конусом означает, что перпендикуляр OE, опущенный из точки O на образующую PB, равен R. Действительно, в этом случае шар и конус касаются плоскости, проходящей через образующую PB перпендикулярно сечению, и лежат по разные стороны от нее. Поэтому шар касается прямых BC и BE в точках C и E, откуда

$$OC = OE = R, \quad BC = BE \quad \text{и} \quad \angle BOC = \tfrac{1}{2}\angle EOC = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}.$$

Пусть B и D — точки пересечения отрезков CO_1 и CO_2 с основаниями конусов. Тогда

$$BC = R \cdot \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}\right) = R \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{R}{2}, \qquad CD = R \cdot \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\beta}{2}\right) = R \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{R}{5}.$$

На правом рисунке показано сечение конусов плоскостью стола. Заметим, что $AO_1 = 5$ и

$$\left(12 + \tfrac{1}{5}R\right)^2 = CO_2^2 = AO_2^2 + \left(AO_1 - BO_1 - BC\right)^2 = 144 + \left(4 - \tfrac{1}{2}R\right)^2 \Longleftrightarrow 21R^2 - 880R + 1600 = 0,$$

откуда $R = \frac{40}{21}$ или $R = 40$. Необходимо, чтобы шар касался образующих конусов, а не их продолжений за вершину. Это означает, что $R\cos\alpha \leqslant CO_1$ и $R\cos\beta \leqslant CO_2$. Первое условие эквивалентно

$$R\cos\alpha \leqslant BO_1 + BC \Longleftrightarrow \tfrac{4}{5}R \leqslant 1 + \tfrac{1}{2}R \Longleftrightarrow R \leqslant \tfrac{10}{3},$$

и ему удовлетворяет только $R = \frac{40}{21}$. Второе условие приводится к неравенству $\frac{5}{13}R \leqslant 12 + \frac{1}{5}R$, которое верно для $R = \frac{40}{21}$. $\square$