**Олимпиада им. И.В.Савельева, 2015, Математика, 11 класс**

**Задание**

**1.** Для многочлена $P(t)=t^3+3t^2-9t-27$ найти $x$, при котором выражение $P\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)$ принимает наименьшее возможное значение.

**2.** Сколько пар чисел $(x;y)$, $0\le x\le 4\pi, -2\pi\le y\le 2\pi$, удовлетворяют системе $\begin{cases}\cos x+\sin y=1\\ \sin x+\cos y=\sqrt{2}\end{cases}$. Найти значения первой координаты $x$ таких решений.

**3.** Числа $x, y$ и $z$, не равные нулю, таковы, что их квадраты в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии, а числа $10x, 4y^2$ и $5z^3$ - последовательными членами геометрической прогрессии. Найти все такие тройки $x, y$ и $z$, если известно, что отношение $x:z$ рационально.

**4.** Маша строила числовое множество следующим образом. На первом шаге, она взяла точки $1$ и $16$ на числовой оси и написала между ними их среднее геометрическое. На втором и последующих шагах, между любыми двумя соседними числами, полученными на предыдущих этапах, она располагала их средние геометрические. Сколько чисел появится на числовой оси после десятого шага и какова их сумма? Какое число будет стоять на девятом месте, если считать, что полученное после десятого шага числовое множество упорядочено по возрастанию?

**5.** При каких значениях $a$ система уравнений $\begin{cases}|x\cos a+y\sin a|+|y\cos a-x\sin a|=1\\ x\sqrt{3}-y+\sqrt{2}=0\end{cases}$ имеет бесконечное число решений?

**6.** Точка $M$ - середина ребра $AD$ куба $ABCDA'B'C'D'$ с ребром $a$. Через точку $B'$ проведена прямая $L$, параллельная плоскостям $A'BM$ и $C'BD$. Найти длину отрезка прямой $L$, расположенного внутри куба.

**Решения**

**1.** Для многочлена $P(t)=t^3+3t^2-9t-27$ найти $x$, при котором выражение $P\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)$ принимает наименьшее возможное значение.

ЯГУ.ОВ РФ

По условию задачи $t = \sin x - \sqrt{3}\cos x.$ Перепишем это выражение в виде $t = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Следовательно, $t \in [-2;2]$. Надо найти наименьшее значение многочлена $P(t)$ на отрезке $[-2;2]$. Для этого найдем производную $P'(t)$ и разложим ее на множители: $P'(t) = 3t^2 + 6t - 9 = 3(t+3)(t-1).$

Так как на $[-2;1)$ $P'(t) < 0,$ а на $(1;2]$ $P'(t) > 0,$ то $t = 1$ − точка минимума. Таким образом, многочлен принимает минимальное значение при $t = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$. Решая это уравнение, получим

$$\left[\begin{array}{l} x - \pi/3 = \pi/6 + 2\pi k \\ x - \pi/3 = 5\pi/6 + 2\pi k \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi/2 + 2\pi k, \\ x = 7\pi/6 + 2\pi k, \ k \in Z \end{array}\right.$$

**2.** Перепишем систему $\begin{cases} \cos x + \sin y = 1 \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$ в виде $\begin{cases} \sin y = 1 - \cos x \\ \cos y = \sqrt{2} - \sin x \end{cases}$

Из того что правые части этой системы неотрицательны, следует что $\sin y \geq 0, \ \cos y \geq 0$.

Возводим оба уравнения полученной системы в квадрат $\begin{cases} \cos^2 y = \left(\sqrt{2} - \sin x\right)^2 \\ \sin^2 y = (1 - \cos x)^2 \end{cases}$ и складываем. В результате получим $1 = 3 - 2\cos x - 2\sqrt{2}\sin x + 1$ или $\sqrt{2}\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$.

Используя формулу дополнительного аргумента, перепишем это уравнение в виде: $\sin\left(x + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ Отсюда находим $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi n \\ x = \frac{2\pi}{3} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$, $\sin x \geq 0, \cos x \geq 0, \forall n, k \in Z$

Ягубов.рф

Вычислим $\sin x$ и $\cos x$ для $x=\frac{\pi}{3}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}+2\pi n$: $\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}}\\ \cos x=\frac{\sqrt{6}+3}{6}\end{cases}$. Аналогично, вычислим $\sin x$ и $\cos x$ для $x=\frac{2\pi}{3}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}+2\pi k$: $\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\\ \cos x=\frac{3-\sqrt{6}}{6}\end{cases}$. В обоих случаях условия $\sin x\ge 0, \cos x\ge 0$ выполнены.

1случай. $\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}}\\ \cos x=\frac{3+\sqrt{6}}{6}\end{cases}$. Тогда $\sin y=1-\cos x=\frac{3-\sqrt{6}}{6}$, а $\cos y=\sqrt{2}-\sin x=\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$. В этом случае решение системы можно записать в виде $\begin{cases}x=\arcsin\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}}+2\pi k\\ y=\arcsin\frac{3-\sqrt{6}}{6}+2\pi n\end{cases}$.

Условию $0\le x\le 4\pi, -2\pi\le y\le 2\pi$ удовлетворяют наборы с $k$=0,1 и с $n$=-1,0. Итого 4 решения.

2 случай. $\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\\ \cos x=\frac{3-\sqrt{6}}{6}\end{cases}$. Тогда $\sin y=1-\cos x=\frac{3+\sqrt{6}}{6}$, а $\cos y=\sqrt{2}-\sin x=\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}}$. В этом случае решение системы можно записать в виде $\begin{cases}x=\arcsin\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}+2\pi k\\ y=\arcsin\frac{3+\sqrt{6}}{6}+2\pi n\end{cases}$.

Условию $0\le x\le 4\pi, -2\pi\le y\le 2\pi$ удовлетворяют наборы с $k$=0,1 и с $n$=-1,0. Итого 4 решения.

ЛГУ00В.РФ

Всего получаем 8 решений. Выпишем значения первой координаты $x$ таких решений: $\arcsin\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}}$,

$\arcsin\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}}+2\pi$, $\arcsin\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$, $\arcsin\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}+2\pi$.

**3.** Запишем условия того, что квадраты чисел $x, y$ и $z$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, а числа $10x, 4y^2$ и $5z^3$ - последовательными членами геометрической прогрессии: $\begin{cases} x^2+z^2=2y^2 \\ 25xz^3=8y^4 \end{cases}$. Исключим переменную $y^2$ из второго уравнения системы:

$$\left(x^2+z^2\right)^2=4y^4 \to 2\left(x^2+z^2\right)^2=25xz^3 \to 2x^4+4x^2z^2+2z^4=25xz^3 .$$

Разделим правую и левую части уравнения на $z^4\neq 0$: $2\frac{x^4}{z^4}+4\frac{x^2}{z^2}+2=25\frac{x}{z}$. Обозначим $t=x:z$ и перепишем последнее уравнение в виде $2t^4+4t^2-25t+2=0$. По условию $t-$ рациональное число. Уравнение $2t^4+4t^2-25t+2=0$ может иметь рациональные корни только $t=\pm 0,5,\pm 1,\pm 2$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что только $t=2$ удовлетворяет уравнению, поэтому уравнение имеет только один рациональный корень $t=2$.

Тогда получим $\begin{cases} x=2z \\ 2y^2=5z^2 \end{cases}$. Записываем ответ $\begin{cases} x=2z \\ y=\pm z\sqrt{\frac{5}{2}} \\ z\in R, z\neq 0 \end{cases}$.

**4.** Если $a>0$, $b>0$ и $b>a$, то $a, \sqrt{ab}, b$ являются последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q=\sqrt{b/a}$. После $n-$го шага мы получим геометрическую прогрессию с первым членом $b_1=a$, знаменателем $q=\sqrt[2^n]{b/a}$ и числом членов $2^n+1$. В нашем случае $a=1$, $b=16$, $n=10$. Следовательно мы имеем геометрическую прогрессию, у которой первый член $b_1=1$,

Ягубов.рф

знаменатель прогрессии $q=\sqrt[1024]{16}=\sqrt[256]{2}$, а число членов равно $2^{10}+1=1025$. Сумма членов

$S_{1025}=\dfrac{b_1\left(q^{1025}-1\right)}{q-1}=\dfrac{16\sqrt[256]{2}-1}{\sqrt[256]{2}-1}$, на девятом месте стоит $b_9=b_1q^8=\left(\sqrt[256]{2}\right)^8=\sqrt[32]{2}$.

**5.** Первое уравнение системы $|x\cos a+y\sin a|+|y\cos a-x\sin a|=1$ задает квадрат. Найдем уравнения его сторон. Для этого рассмотрим всевозможные случаи раскрытия модулей.

Случай 1. Раскрытие модулей $+,+$: $x(\cos a-\sin a)+y(\sin a+\cos a)=1$. После преобразования этого уравнения получим $x\sqrt{2}\cos(a+\pi/4)+y\sqrt{2}\sin(a+\pi/4)=1$.

Случай 2. Раскрытие модулей $+,-$: $(\cos a+\sin a)+y(\sin a-\cos a)=1$. После преобразования этого уравнения получим $x\sqrt{2}\cos(a-\pi/4)+y\sqrt{2}\sin(a-\pi/4)=1$.

Случай 3. Раскрытие модулей $-,+$: $-x(\cos a+\sin a)-y(\sin a-\cos a)=1$. После преобразования этого уравнения получим $-x\sqrt{2}\cos(a-\pi/4)-y\sqrt{2}\sin(a-\pi/4)=1$.

Случай 4. Раскрытие модулей $-,-$: $x(\sin a-\cos a)-y(\sin a+\cos a)=1$. После преобразования этого уравнения получим $-x\sqrt{2}\cos(a+\pi/4)-y\sqrt{2}\sin(a+\pi/4)=1$.

Второе уравнение системы $x\sqrt{3}-y+\sqrt{2}=0$ задает прямую. Перепишем это уравнение в виде $-x\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}=1$. Система уравнений будет иметь бесконечное число решений, если эта прямая проходит через одну из сторон квадрата. Получаем четыре системы уравнений для нахождения параметра $a$:

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos(a+\pi/4)=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2}\sin(a+\pi/4)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\cos(a+\pi/4)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(a+\pi/4)=\dfrac{1}{2}\end{cases}\rightarrow(a+\pi/4)=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\rightarrow a=\frac{7\pi}{12}+2\pi k;$$

Ягубов.рф

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos(a-\pi/4)=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2}\sin(a-\pi/4)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\cos(a-\pi/4)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(a-\pi/4)=\dfrac{1}{2}\end{cases}\rightarrow(a-\pi/4)=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\rightarrow a=\frac{13\pi}{12}+2\pi k;$$

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos(a-\pi/4)=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2}\sin(a-\pi/4)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\cos(a-\pi/4)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(a-\pi/4)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\rightarrow(a-\pi/4)=\frac{11\pi}{6}+2\pi k\rightarrow a=\frac{25\pi}{12}+2\pi k;$$

$$\begin{cases}-\sqrt{2}\cos(a-\pi/4)=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ -\sqrt{2}\sin(a-\pi/4)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\cos(a+\pi/4)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(a+\pi/4)=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\rightarrow(a+\pi/4)=\frac{11\pi}{6}+2\pi k\rightarrow a=\frac{19\pi}{12}+2\pi k$$

Объединение случаев 1-4 дает ответ: $a=\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$.

**6.** Для решения этой задачи воспользуемся методом координат. Поместим начало координат в точку $A$. Проведем ось $X$ через точки $A$ и $D$ в направлении точки $D$, ось $Y$ – через точки $A$ и $B$ в направлении точки $B$, ось $Z$ – через точки $A$ и $A'$ в направлении точки $A'$. Запишем координаты вершин куба $A'(0;0;a)$, $B(0;a;0)$, $C'(a;a;a)$, $B(0;a;0)$, $D(a;0;0)$ и координаты точки $M\left(\frac{a}{2};0;0\right)$.

Плоскости $A'BM$ и $C'BD$ задаются уравнениями $2x+y+z-a=0$ и $x+y-z-a=0$, соответственно. Найдем направляющий вектор прямой, по которой пересекаются эти плоскости. Заметим, что точка $B$ принадлежит этой прямой, так как она принадлежит обеим плоскостям. Вторую точку на прямой (обозначим ее $K$) будем искать из условия $y=0$. Подставляя $y=0$ в уравнения плоскостей $A'BM$ и $C'BD$, получим $x=\frac{2}{3}a$, $z=-\frac{1}{3}a$. Вычислим $\vec{BK}=\left\{\frac{2}{3}a;-a;-\frac{1}{3}a\right\}$ и запишем уравнение прямой, проходящей через точку $B'(0;a;a)$ параллельно вектору $\vec{BK}$: $\frac{x}{2}=\frac{y-a}{3}=\frac{z-a}{1}$. Найдем точку

пересечения этой прямой с гранью куба $AA'D'D$ ($y=0$): $\frac{x}{2}=\frac{x-a}{3}=\frac{z-a}{1}\to x=\frac{-2a}{3}, z=\frac{2a}{3}$. Искомая

длина равна расстоянию между точкой $B'(0;a;a)$ и точкой $\left(\frac{-2a}{3};0;\frac{2a}{3}\right)$: $d=\sqrt{\frac{4a^2}{9}+a^2+\frac{a^2}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}a$.

Ягубов.рф