

Задание

1. Вычислить значение выражения $\frac{xy + \text{НОК}(x, y)}{\text{НОД}(x, y) + 1}$ для $x = 90, y = 28$.
2. Петя и Вова братья. Если из возраста их мамы вычесть 16, а из возраста папы 23, то разность квадратов полученных величин будет равна 41. Сколько лет папе и маме, если папа старше мамы не более, чем на 7 лет?
3. Натуральное число a делится на 3 и 11, а при делении на 5 дает в остатке 2. Найти наибольшее трехзначное число, удовлетворяющее этим условиям.
4. Длина пути, соединяющего дома Пети и Вовы, равна s . Вова вышел из своего дома в направлении дома Пети со скоростью 4км/час. После 2 часов пути Вова решил вернуться домой, но, пройдя в обратном направлении 1 час, сделал привал на 1 час, а затем продолжил путь домой с прежней скоростью. Одновременно с Вовой, в направлении его дома, вышел Петя и прошел весь путь, не останавливаясь со скоростью 2км/час. Известно, что он встретил на своем пути Вову 4 раза. Найти при каких значениях s это возможно?
5. Населенные пункты A и B находятся по разные стороны реки шириной 50м, на расстоянии 300м и 100м от ее берегов. Расстояние между A и B по реке равно 300м. В каком месте реки нужно построить мост, перпендикулярный береговой линии, чтобы путь, соединяющий A и B , имел наименьшую длину. Найти длину этого пути, если берега реки – параллельные прямые, A и B - точки на плоскости, расстояние между A и B по реке – длина отрезка между основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и B на береговую линию.

Решения

1. Преобразуем исходное выражение:

$$\frac{xy + \text{НОК}(x, y)}{\text{НОД}(x, y) + 1} = \frac{\text{НОК}(x, y) \times \text{НОД}(x, y) + \text{НОК}(x, y)}{\text{НОД}(x, y) + 1} = \frac{\text{НОК}(x, y)(\text{НОД}(x, y) + 1)}{\text{НОД}(x, y) + 1} = \text{НОК}(x, y).$$

Для нахождения $\text{НОК}(x, y)$ разложим x и y на простые множители: $x = 90 = 2 \times 3^2 \times 5$, $y = 28 = 2^2 \times 7$.

Тогда $\text{НОК}(x, y) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$.

2. Пусть m – возраст мамы, а n – возраст папы. Тогда по условию: $(m-16)^2 - (n-23)^2 = \pm 41$. Заметим также, что $m < n$, так как возраст мамы меньше возраста папы.

Случай 1. $(m-16)^2 - (n-23)^2 = 41 \rightarrow (m-n+7)(m+n-39) = 41$.

Число 41 простое, поэтому возможны варианты:

$$1.а) \begin{cases} m-n+7=41 \\ m+n-39=1 \end{cases} \quad 1.б) \begin{cases} m-n+7=1 \\ m+n-39=41 \end{cases} \quad 1.в) \begin{cases} m-n+7=-41 \\ m+n-39=-1 \end{cases} \quad 1.г) \begin{cases} m-n+7=-1 \\ m+n-39=-41 \end{cases}$$

Вариант 1.а дает $m=37, n=3$, что не удовлетворяет условию задачи.

Вариант 1.б дает $m=37, n=43$, что удовлетворяет условию задачи.

Вариант 1.в дает $m=-5, n=43$, что не удовлетворяет условию задачи.

Вариант 1.г дает $m=-5, n=3$, что не удовлетворяет условию задачи.

Случай 2. $(m-16)^2 - (n-23)^2 = -41 \rightarrow (n-m-7)(n+m-39) = 41$, что приводит к вариантам

$$2.а) \begin{cases} n-m-7=41 \\ n+m-39=1 \end{cases} \quad 2.б) \begin{cases} n-m-7=1 \\ n+m-39=41 \end{cases} \quad 2.в) \begin{cases} n-m-7=-41 \\ n+m-39=-1 \end{cases} \quad 2.г) \begin{cases} n-m-7=-1 \\ n+m-39=-41 \end{cases}$$

Вариант 2.а дает $m=-4, n=44$, что не удовлетворяет условию задачи.

Вариант 2.б дает $m=36, n=44$, что не удовлетворяет условию задачи, поскольку $n-m=8 > 7$.

Вариант 2.в дает $m=36, n=2$, что не удовлетворяет условию задачи, поскольку $m > n$.

Вариант 2.г дает $m=-4, n=2$, что не удовлетворяет условию задачи.

Таким образом, задача имеет единственное решение $m=37, n=43$.

3. Так как число a делится на 3 и на 11, то его можно записать в виде $a=33k, k \in \mathbb{Z}, k > 0$. Кроме того, при делении на 5 это число дает в остатке 2, то есть $a=5m+2, m \in \mathbb{Z}$. Получаем равенство

$$33k=5m+2. \text{ Тогда } 33k-5m=2 \rightarrow \begin{cases} k=-1+5s \\ m=-7+33s, s \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ и } a=33(5s-1)=165s-33, s \in \mathbb{Z}.$$

Наибольшее трехзначное число $a=957$ соответствует $s=6$.

Замечание. Задачу можно решать продуманным перебором.

4. На рис. изображена зависимость пути от времени для Вовы и Пети.

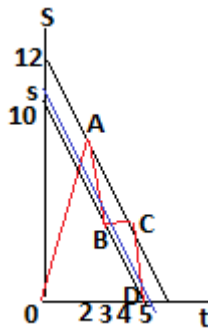


Рис. 1

Красным цветом отмечен путь Вовы, синим – Пети. Отправление Пети происходит из точки на оси OS с ординатой s .

Путь Вовы состоит из 4 отрезков: OA , AB , BC и CD . На каждом из них должна состояться их встреча.

Определим, при каких значениях s это возможно.

Случай 1, встреча на отрезке OA . $t_1 \in (0, 2)$ – время встречи, $6 \times t_1 = s \rightarrow t_1 = \frac{s}{6} \in [0; 2] \rightarrow s \in [0; 12]$

Случай 2, встреча на отрезке AB . $t_2 \in [2; 3]$ – время встречи, $s - 2t_2 = 4 \times 2 - 4(t_2 - 2) \rightarrow$

$$t_2 = \frac{16-s}{2} \in [2; 3] \rightarrow s \in [10; 12]$$

Случай 3, встреча на отрезке BC . $t_3 \in [3; 4]$ – время встречи, $s - 2t_3 = 4 \times 3 - 4(t_3 - 3) = \frac{s-4}{2} \in [3; 4] \rightarrow$

$$s \in [10; 12]$$

Случай 4, встреча на отрезке CD . $t_4 \in [4; 5]$ – время встречи, $s - 2t_4 = 4 \times 4 - 4(t_4 - 4) = 20 - 4t_4 \rightarrow$

$$t_4 = \frac{20-s}{4} \in [4; 5] \rightarrow s \in [10; 12]$$

Поскольку значению $s=10$ соответствует 3 встречи, а $s=12$ – две встречи (см. рис.), то ответом

является интервал $s \in (10, 12)$

5. Обозначим через C и D точки, через которые проходит мост (см. рис 1). По условию задачи длина

моста s равна 50 м.

