Задания заключительного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» 2014-2015 учебного года
Математика, 11 класс

1. Найти наибольшее значение выражения $x-2y$ для $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $4x^2+9y^2=25$.

2. Найти все решения $(x;y)$ уравнения $\left(2\sin(x+y)+3\right)\left(\cos(2x-y)-1\right)=-10$, лежащие на прямой $6x+5y=15\pi$.

3. Найти зависимость от n числа целых неотрицательных решений уравнения $x_1+x_2+...+x_n=m$ при $m=2$ и $m=3$. При каком n число решений для $m=3$ будет в четыре раза большим, чем число решений для $m=2$?

4. В гостиной находится двое часов с боем, показывающих разное время. Каждый час они производят звуковые сигналы в количестве, на которое указывает часовая стрелка, при этом минутная стрелка направлена на 12. Интервал между сигналами для первых часов 3 сек., для вторых – 4 сек. Часы начали и закончили бой одновременно. Петя, находясь в соседней комнате, насчитал 13 ударов, принимая совпадающие сигналы за один. Какое время показывали первые и вторые часы в момент первого удара боя? Продолжительность одного сигнала мала и ее можно не учитывать, качество сигнала у обоих часов одинаковое.

5. Для всех целых $k<0$ найти целые решения x и y системы уравнений $\begin{cases} x^2+xy^2-ky^2=0 \\ x^2-xy+ky^2=0 \end{cases}$.

6. Волк окружен собаками, расположенными в точках M,N,P и Q на сторонах квадрата $ABCD$, $M\in[A;B], N\in[B;C], P\in[C;D], Q\in[D;A]$ так, что $AM:MB=BN:NC=CP:PD=DQ:QA=1:3$. Волк, находящийся внутри квадрата в точке пересечения прямых MP и NQ, может бежать со скоростью v_w по прямой в любом направлении. Собаки бегают только по сторонам квадрата со скоростью, не превосходящей v_c. Волк может вырваться из окружения, если на границе квадрата встретит не более одной собаки. При каких значениях отношения v_c/v_w волк имеет шанс спастись?

Ответы и решения

1. Если $\varphi\in[0;2\pi]$, то числа $x=\frac{5}{2}\cos\varphi$ и $y=\frac{5}{3}\sin\varphi$ удовлетворяют уравнению. Тогда

$$x-2y=\frac{5}{2}\cos\varphi-\frac{10}{3}\sin\varphi=\frac{5}{6}(3\cos\varphi-4\sin\varphi)=\frac{25}{6}\left(\frac{3}{5}\cos\varphi-\frac{4}{5}\sin\varphi\right)=$$

$$=\frac{25}{6}(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)=\frac{25}{6}\cos(\varphi+\theta),$$

где $\theta=\arccos\dfrac{3}{5}$. Поскольку наибольшим возможным значением $\cos(\varphi+\theta)$, $\varphi\in[0;2\pi]$ является 1, то $(x-2y)_{\max}=\dfrac{25}{6}$.

2. Поскольку $\left|2\sin(x+y)+3\right|\le 5,\ \left|\cos(2x-y)-1\right|\le 2$, равенство возможно только при

$$\begin{cases}\sin(x+y)=1\\ \cos(2x-y)=-1\end{cases}\to\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\\ 2x-y=\pi+2\pi n\end{cases}\to\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2\pi}{3}(m+n)\\ y=\dfrac{2\pi}{3}(2m-n)\end{cases},\ m,n\in Z\ .$$

Подставляя найденные x и y в уравнение прямой, получим

$$3\pi+4\pi(m+n)+\frac{10\pi}{3}(2m-n)=15\pi\to 32m+2n=36\to\begin{cases}m=t\\ n=18-16t\end{cases},t\in Z\ .\ \text{Тогда}\ \begin{cases}x=\dfrac{5\pi}{2}(5-4t)\\ y=12\pi(t-1)\end{cases},t\in Z\ .$$

3. 1) Обозначим через k_n^m число неотрицательных решений уравнения $x_1+x_2+...+x_n=m$.
Для $m=2$ число решений , для которых $x_i=2$, а $x_j=0,\ j\ne i$ равно $C_n^1=n$. Число решений, для которых $x_i=1,\ x_j=1,\ x_k=0,k\ne i,j$, равно $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$. Тогда $k_n^2=n+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}=C_{n+1}^2$.
Для $m=3$ число решений, для которых $x_i=3$, а $x_j=0,\ j\ne i$ равно $C_n^1=n$. Число решений, для которых $x_i=2,\ x_j=1,\ x_k=0,k\ne i,j$, равно $A_n^2=2!C_n^2=n(n-1)$. Число решений, для которых $x_i=1,\ x_j=1,\ x_k=1,\ x_r=0,\ r\ne i,j,k$, равно $C_n^3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Тогда

$$k_n^3=C_n^1+2C_n^2+C_n^3=n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=n+\frac{n(n-1)(n+4)}{6}=$$
$$=\frac{n}{6}(n^2+3n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=C_{n+2}^3.$$

2) Условие $k_n^3=4k_n^2$ приводит к равенству $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}=4\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}\to n+2=12\to n=10$

4. Пусть $t_1,\ t_2-$ время на первых и вторых часах. $L=3\cdot(t_1-1)=4\cdot(t_2-1)-$ время от первого до последнего удара часов. $t_1=4k+1,t_2=3k+1,L=12k,k\in Z$. Количество совпадающих сигналов, включая первый и последний, равно $k+1$. Общее число сигналов, услышанных Петей, равно $t_1+t_2-k-1=6k+1=13\to k=2\to t_1=9,t_2=7.$

5. Складываем и вычитаем уравнения

$$\begin{cases}x(2x+y(y-1))=0\\ y(x(y+1)-2ky)=0\end{cases}\to 1)x=0\to y=0,\forall\ k<0\ \ 2)\ y=0\to x=0,\forall\ k<0$$

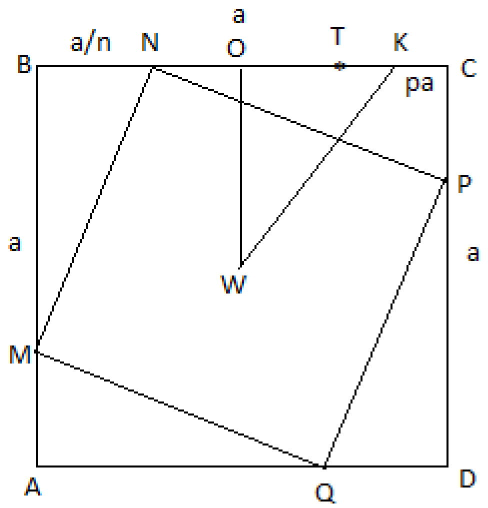
$$3)\ x\ne 0,\ \ y\ne 0\to\begin{cases}x(y+1)=2ky\\ 2x=-y(y-1)\end{cases}\to\begin{cases}y^2=1-4k\\ x=-\dfrac{y(y-1)}{2}\end{cases}$$

С учетом целочисленности y имеем: $1-4k=m^2,m\in Z\to k=\dfrac{(1-m)(1+m)}{4}<0\to|m|>1$. Целочисленность k достигается только при нечетном m, т.е. $m=2l+1,\ l\ne 0,-1,\ l\in Z$. При $k=-l(l+1)$, $l\ne 0,-1,\ l\in Z$, помимо $x=0,y=0$, система имеет решения:

$$\begin{cases}y_1=m=2l+1,\\ x_1=-l(2l+1)\end{cases}\ \text{и}\ \begin{cases}y_2=-m=-2l-1\\ x_2=-(l+1)(2l+1)\end{cases}$$

При $k<0,k\in Z,k\ne -l(l+1),\forall l\in Z$ имеется только нулевое решение.

6.



Пусть $AM:MB = BN:NC = CP:PD = DQ:QA = 1:n$, $a -$ сторона квадрата $ABCD$, волк находится в точке W - центре квадрата $MNPQ$. Точка T на стороне BC определена условием $NT = TC + CP = a/2$, $TC = \dfrac{n-2}{2n}a$, $K -$ точка выхода волка на границу квадрата, $KC = p \cdot a$, $p -$ параметр.

Случай 1. $K \in [T;C] \to p \in \left[0;\dfrac{n-2}{2n}\right]$

$$WK = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2p+2p^2},\ NK = \frac{a(n-1-pn)}{n} \geq \frac{a}{2}$$

$t_w = \dfrac{a\sqrt{1-2p+2p^2}}{v_w\sqrt{2}} -$ время попадания волка в точку K,

$t_c = \dfrac{a(n-1-pn)}{nv_c} -$ время появления двух собак в точке K.

$t_w < t_c$ – условие спасения волка. $\dfrac{t_c}{t_w} > 1 \to \varphi_1(p) = \dfrac{t_c}{t_w} = \dfrac{v_w\sqrt{2}}{nv_c} \cdot \dfrac{n-1-pn}{\sqrt{1-2p+2p^2}} > 1$.

Функция монотонно убывает при $p \in \left[0;\dfrac{n-2}{2n}\right]$ (проверяется дифференцированием), поэтому максимум $\varphi(p)$ на отрезке достигается в точке $p = 0$.

Если $\varphi_1(0) = \dfrac{v_w(n-1)\sqrt{2}}{nv_c} > 1$, то прорыв волка на границе $[K;C]$ возможен при $\dfrac{v_c}{v_w} < \dfrac{(n-1)\sqrt{2}}{n}$.

Случай 2. $K \in [N;T]$, $p \in \left[\dfrac{n-2}{2n};\dfrac{n-1}{n}\right]$

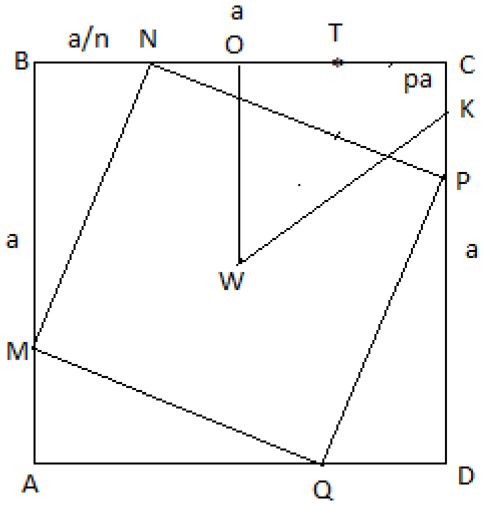
$t_c = (pa + \dfrac{a}{n})/v_c = \dfrac{a(pn+1)}{nv_c} -$ время появления в точке K двух собак,

$t_w = \dfrac{a\sqrt{1-2p+2p^2}}{v_w\sqrt{2}} -$ время появления волка в точке K.

$$\frac{t_c}{t_w} > 1 \to \varphi_2(p) = \frac{t_c}{t_w} = \frac{v_w\sqrt{2}}{nv_c} \cdot \frac{pn+1}{\sqrt{1-2p+2p^2}} > 1.$$

Функция $\varphi_2(p)$ возрастает при $p\in\left[\frac{n-2}{2n};\frac{n-1}{n}\right]$, поэтому при ее максимум достигается на правом конце отрезка: если $\varphi_2\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{v_w n\sqrt{2}}{v_c\sqrt{n^2-2n+2}}>1$, то прорыв волка на отрезке $[N;T]$ границы возможен. т.е. если $\frac{v_c}{v_w}<\frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n^2-2n+2}}$ волк может спастись через участок границы $[N;T]$

Случай 3. Участок границы $[C;P]$



$CK=p\cdot a,\ \ p\in\left[0;\frac{1}{n}\right]$, $t_c=(\frac{n-1}{n}a+pa):v_c=\frac{a(pn+n-1)}{nv_c}$, $t_w=\frac{a\sqrt{2p^2-2p+1}}{v_w\sqrt{2}}$

$\frac{t_c}{t_w}>1\rightarrow\varphi_3(p)=\frac{t_c}{t_w}=\frac{v_w\sqrt{2}}{nv_c}\cdot\frac{n-1+pn}{\sqrt{1-2p+2p^2}}>1$ хотя бы в одной точке $p\in\left[0;\frac{1}{n}\right]$.

Функция $\varphi_3(p)$ возрастает на отрезке $p\in\left[0;\frac{1}{n}\right], n\geq 2$, поэтому если $\varphi_3\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{nv_w\sqrt{2}}{v_c\sqrt{n^2-2n+2}}>1$,то волк может покинуть квадрат через отрезок $[C;P]$ границы квадрата, т.е. $\frac{v_c}{v_w}<\frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n^2-2n+2}}$.

В варианте 1 $n=3$, случай 1 дает условие $\frac{v_c}{v_w}<\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0,94$, случаи 2 и 3 приводят к неравенству $\frac{v_c}{v_w}<\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\approx 1,89$, поэтому волк имеет шанс покинуть квадрат, если $\frac{v_c}{v_w}<\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\approx 1,89$