Задания заключительного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» 2014-2015 учебного года
Математика, 10 класс

1. Для каждого целого, положительного x найти наибольший общий делитель чисел
$P_1(x) = x^3 + 5x^2 + 4x + 15$ и $P_2(x) = x^4 + 5x^3 + 15x + 3$.

2. Вычислить значение $\cos^2 2x$ для всех допустимых значений x, если

$$tg^4 x - 4tg^2 x + 1 = 0.$$

3. Доказать, что выражение $2\cdot 6^n - 25n^2 + 15n - 2$ делится без остатка на 125 при любом натуральном $n > 1$.

4. При каких значениях a три корня уравнения $4x^3 + 4ax^2 + (a^2 - 2a - 4)x - a^2 - 2a = 0$ могут быть пятым, седьмым и девятым членами некоторой геометрической прогрессии? Найти квадрат знаменателя этой прогрессии.

5. Острый угол треугольника ABC равен 30^0. Найти максимальное возможное значение отношения $r : R$, где r и R - радиусы вписанной и описанной окружностей.

Ответы и решения

1. Свойство НОД: НОД$(a,b) =$ НОД$(a + b\cdot c, b)$ $\forall c \in Z$

$$\text{НОД}\left(x^3+5x^2+4x+15;\, x^4+5x^3+15x+3\right) =$$
$$= \text{НОД}\left(x^3+5x^2+4x+15;\, x^4+5x^3+15x+3 - x\left(x^3+5x^2+4x+15\right)\right) =$$
$$= \text{НОД}\left(x^3+5x^2+4x+15;\, x^2+3\right) = \text{НОД}\left(x^2+3;\, x^3+5x^2+4x+15 - x\cdot(x^2+3)\right) =$$
$$= \text{НОД}\left(x^2+3;\, 5x^2+x+15\right) = \text{НОД}\left(x^2+3;\, 5x^2+x+15-5\cdot(x^2+3)\right) =$$
$$= \text{НОД}\left(x^2+3;\, x\right) = \text{НОД}\left(3;\, x\right)$$

Тогда, если x делится на 3, то НОД=3, если x не делится на 3, то НОД=1.

2. Заметим, что для допустимых значений x, $tgx \neq 0$. Разделим на $tg^2 x$ правую и левую часть уравнения. В результате получим

$$tg^2 x + ctg^2 x = 4 \to \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 4 \to \frac{\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)^2 + 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4\cos^2 2x}{\sin^2 2x} + 2 = 4 \to$$
$$\to \frac{\cos^2 2x}{1 - \cos^2 2x} = \frac{1}{2} \to 2\cos^2 2x = 1 - \cos^2 2x \to \cos^2 2x = \frac{1}{3}$$

3. $6^n = \left(1+5\right)^n = 1 + 5n + \dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 25 + k\cdot 125$ для некоторого k, зависящего от n. Тогда

$$2\left(6^n - 1\right) = 10n + 25n(n-1) + 2k\cdot 125 \to 2\left(6^n - 1\right) - 25n^2 + 15n = 2k\cdot 125,$$

т.е. выражение делится на 125.

4.

1. Нахождение корней уравнения. Заметим, что $x = 1$ является решением уравнения при любых a. Тогда левая часть уравнения раскладывается на множители:

$$\left(x-1\right)\left(4x^2+4(a+1)x+a(a+2)\right)=0 \to \left(x-1\right)\left(2x+a\right)\left(2x+a+2\right)=0$$

Поэтому уравнение имеет такие корни: $x_1 = 1,\ x_2 = -\dfrac{a}{2},\ x_3 = -\dfrac{(a+2)}{2}$

2. Рассмотрим различные варианты.

Случай 1. $b_5 = x_2,\ b_7 = x_1,\ b_9 = x_3$ или $b_5 = x_3,\ b_7 = x_1,\ b_9 = x_2$

Тогда из условия прогрессии $x_2 \cdot x_3 = x_1^2 \to \dfrac{a(a+2)}{4} = 1 \to a^2+2a-4=0 \to \left[\begin{array}{l} a_1 = -1-\sqrt{5} \\ a_2 = -1+\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Поскольку $b_5 = b_7 / q^2$, а $b_9 = b_7 \cdot q^2$, то все три числа $b_5,\ b_7,\ b_9$ должны быть одного знака.

Для $a_1 = -1-\sqrt{5}$ и $b_5 = x_2 = -\dfrac{a}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0,\ b_7 = x_1 = 1 > 0,\ b_9 = x_3 = -\dfrac{a+2}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$

это условие выполняется.

Для $a_2 = -1+\sqrt{5}$ и $b_5 = x_2 = -\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} > 0,\ b_7 = x_1 = 1 > 0,\ b_9 = x_3 = -\dfrac{a+2}{2} = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} < 0$

условие не выполняется.

Случай 2. $b_5 = x_1,\ b_7 = x_2,\ b_9 = x_3$ или $b_5 = x_3,\ b_7 = x_2,\ b_9 = x_1$.

Из условия прогрессии $x_1 \cdot x_3 = x_2^2 \to -\dfrac{a+2}{2} = \dfrac{a^2}{4} \to a^2+2a+4=0 \to a \in \varnothing$

Случай 3. $b_5 = x_1,\ b_7 = x_3,\ b_9 = x_2$ или $b_5 = x_2,\ b_7 = x_3,\ b_9 = x_1$.

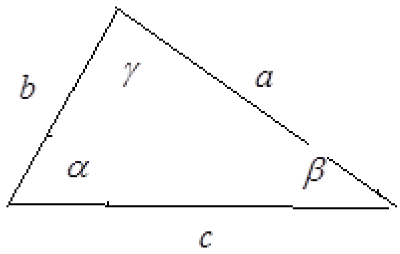
Из условия прогрессии $x_1 \cdot x_2 = x_3^2 \to -\dfrac{a}{2} = \dfrac{\left(a+2\right)^2}{4} \to a^2+6a+4=0 \to \left[\begin{array}{l} a_3 = -3-\sqrt{5} \\ a_4 = -3+\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Для $a_3 = -3-\sqrt{5}$ и $b_5 = x_1 = 1 > 0,\ b_7 = x_3 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0,\ b_9 = x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 0$ условие равного знака выполняется.

Для $a_4 = -3+\sqrt{5}$ и $b_5 = x_1 = 1 > 0,\ b_7 = x_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0,\ b_9 = x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$ условие равного знака не выполняется. Искомыми значениями параметра a являются $a = a_1 = -1-\sqrt{5}$ и $a = a_3 = -3-\sqrt{5}$. Для $a = a_1 = -1-\sqrt{5}$ (случай 1) квадрат знаменателя прогрессии $q^2 = b_7 : b_5 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $q^2 = b_7 : b_5 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Для $a = a_3 = -3-\sqrt{5}$ (случай 3) квадрат знаменателя прогрессии $q^2 = b_7 : b_5 = x_3 : x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ или $q^2 = b_7 : b_5 = x_3 : x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5.



$$a = 2R\sin\alpha,\ b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha},\ c = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha},\ r = \frac{bc\sin\alpha}{a+b+c} = \frac{a\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$$

$$r : R = \frac{2\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)} = \frac{4\sin\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{2\sin\beta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta-\sin\frac{\alpha}{2}(1-\cos\beta)\right) = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

Максимальное значение отношения достигается при $\beta+\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} \to \beta^* = \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$ и оно равно $\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Поскольку $\alpha = 30^0$, то $(r:R)_{\max} = \frac{1-\sin(15^0)}{\cos(15^0)}$. Отсюда

$$\sin^2 15^0 = 0,5(1-\cos 30^0) = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \to \cos^2 15^0 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1-\sin(15^0)}{\cos(15^0)} = \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}-(2-\sqrt{3})$$