

Задания заключительного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» 2014-2015 учебного года
Математика, 9 класс

1. Саша ехал в автобусе по улице и увидел через окно своего друга Колю, идущего по другой стороне улицы в противоположном направлении. Через две минуты автобус остановился на остановке. Саша быстро вышел из автобуса, перебежал улицу и побегал догонять Колю. Через сколько минут он догонит Колю, если он бежит в три раза быстрее, чем идет Коля и в пять раз медленнее, чем едет автобус? Время выхода из автобуса и перехода улицы не учитывать.

2. Доказать формулу «сложного корня» $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ и с ее помощью вычислить

величину $\left(\frac{\sqrt{13 + \sqrt{48}} - 1}{\sqrt{7 - \sqrt{24}} + 1} \right)^2$.

3. $\{a_k\}$ – арифметическая прогрессия, S_n – сумма первых n ее членов. Известно, что $S_m : S_n = m(m+2) : n(n+2)$ при любых целых, положительных m и n . Найти отношение $a_{2015} : a_{2014}$.

4. Найти целые x и y , для которых $x^4 - 3x^2y + 2y^2 = 35$.

5. Длины сторон параллелограмма равны 3 и 2. Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти отношение его площади к площади параллелограмма.

Ответы и решения

1. v_A, v_k, v_c – скорости автобуса, Коли и Саши соответственно, T – искомое время. Расстояние между Колей и Сашей в момент остановки автобуса: $2(v_A + v_k)$. Скорость их сближения: $v_c - v_k$, $v_c = 3v_k, v_A = 5v_c = 15v_k$ – условия задачи. $T = \frac{2(v_A + v_k)}{v_c - v_k} = \frac{2(15v_k + v_k)}{3v_k - v_k} = 16$

2. Данное в условии равенство $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$ доказывается возведением в квадрат.

1. $\sqrt{13 + \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{13 + \sqrt{169 - 48}}{2}} + \sqrt{\frac{13 - \sqrt{169 - 48}}{2}} = \sqrt{12} + 1$

2. $\sqrt{7 - \sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{49 - 24}}{2}} - \sqrt{\frac{7 - \sqrt{49 - 24}}{2}} = \sqrt{6} - 1$

3. $\frac{\sqrt{13 + \sqrt{48}} - 1}{\sqrt{7 - \sqrt{24}} + 1} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$.

3. $S_2 = 2a_1 + d, S_1 = a_1 \rightarrow S_2 : S_1 = \frac{2a_1 + d}{a_1} = \frac{8}{3} \rightarrow \frac{d}{a_1} = \frac{2}{3}$

$\frac{a_{2015}}{a_{2014}} = \frac{a_1 + d \cdot 2014}{a_1 + d \cdot 2013} = \frac{3 + 2 \cdot 2014}{3 + 2 \cdot 2013} = \frac{4031}{4029}$

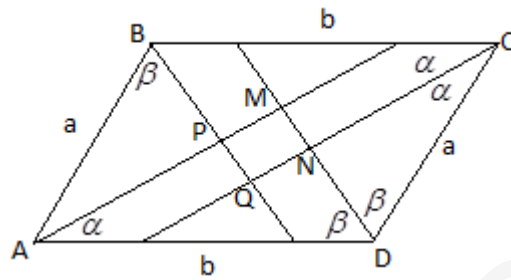
4. Разложим левую часть на множители: $(x^2 - y)(x^2 - 2y) = 35$. В целых числах это возможно в следующих восьми случаях:

$$1. \begin{cases} x^2 - y = 1 \\ x^2 - 2y = 35 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^2 - y = -1 \\ x^2 - 2y = -35 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x^2 - y = 5 \\ x^2 - 2y = 7 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x^2 - y = -5 \\ x^2 - 2y = -7 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x^2 - y = 7 \\ x^2 - 2y = 5 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x^2 - y = -7 \\ x^2 - 2y = -5 \end{cases} \quad 7. \begin{cases} x^2 - y = 35 \\ x^2 - 2y = 1 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x^2 - y = -35 \\ x^2 - 2y = -1 \end{cases}$$

Целые решения $\begin{cases} x = \pm 3 \\ y = 2 \end{cases}$ имеет только система 5., остальные системы целых решений не имеют.

5.



На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$ с острым углом 2α и четырехугольник $MNPQ$, образованный биссектрисами внутренних углов. Поскольку $\alpha + \beta = 90^\circ$ четырехугольник $MNPQ$ - прямоугольник. Вычислим его стороны.

$$MN = DM - DN = b \sin \alpha - a \sin \alpha = (b - a) \sin \alpha$$

$$QN = CQ - CN = b \cos \alpha - a \cos \alpha = (b - a) \cos \alpha$$

Тогда

$$S_{MNPQ} = MN \cdot QN = (b - a)^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{(b - a)^2}{2} \sin 2\alpha$$

$$S_{ABCD} = a \cdot b \cdot \sin 2\alpha$$

$$S_{MNPQ} : S_{ABCD} = \frac{(b - a)^2}{2ab}$$

Поскольку $a = 2$, $b = 3$, то $S_{MNPQ} : S_{ABCD} = 1 : 12$.