Задания заключительного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» 2014-2015 учебного года
Математика, 8 класс

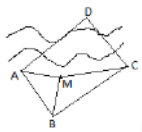
1. Петр Иванович родился в двадцатом веке. В 2014 году его возраст был в три раза большим, чем сумма цифр года его рождения. В каком году родился Петр Иванович?

2. Найти все целые n , при которых выражение n^2-2n-3 делится на 13 без остатка.

3. Среди простых делителей натурального числа a содержатся только 2 и 3, причем двоек в два раза больше, чем троек. Найти число a , если общее число его возможных делителей на 63 меньше числа всех делителей a^2 .

4. Среди обыкновенных дробей вида $\frac{p}{q}$, для которых $p+q=55$, найти дробь наименее удаленную на числовой прямой от числа $\frac{3}{4}$.

5. Перед Петей стоит вполне практическая задача. На рис. указано расположение точек A,B,C на одной стороне реки, точки D на другой и точки M , в которой находится Петя. Расстояние от точки M до точек A,B,C Петя измерил: $MA=20,\ MB=30,\ MC=40$. Пете и вам нужно вычислить расстояние от точки M до точки D , если известно, что $ABCD-$ прямоугольник, а плавать Петя не умеет.



Ответы и решения

1. Пусть $19xy-$ год рождения Петра Ивановича. Из условия имеем

$$2014-1900-10x-y=3(1+9+x+y)\rightarrow 84=13x+4y\rightarrow\begin{cases}x=4t\\ y=21-13t,\end{cases} t\in Z-$$ общее решение. С учетом цифры $t=1\rightarrow x=4,\ y=8$, т.е. год рождения Петра Ивановича - 1948.

2. Выражение $A=n^2-2n-3=(n+1)(n-3)$ делится на 13, если один сомножителей $n+1$ или $n-3$ делится на 13. Отсюда

$$\left[\begin{array}{l}n+1=13k\\ n-3=13k,\ k\in Z\end{array}\right.\rightarrow\left[\begin{array}{l}n=13k-1\\ n=13k+3,\ k\in Z\end{array}\right. .$$

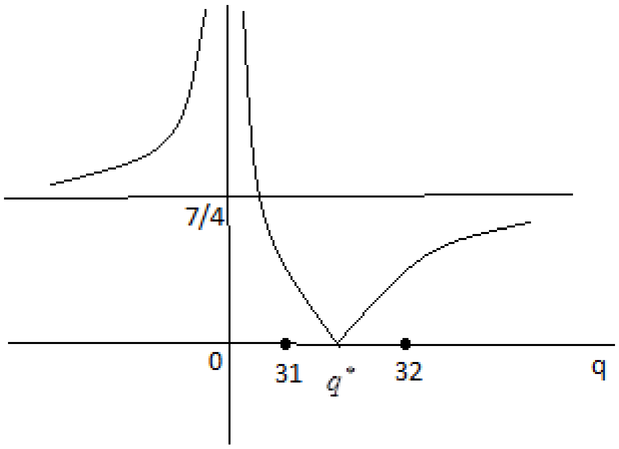
3. По условию $a=2^{2m}\cdot 3^m$. Общее число его делителей, включая единицу, равно $(2m+1)(m+1)$.Общее число делителей $a^2=2^{4m}\cdot 3^{2m}$ равно $(4m+1)(2m+1)$. Их разность

$$(4m+1)(2m+1)-(2m+1)(m+1)=3m(2m+1)$$

по условию равна 63: $2m^2+m-21=0$.

Последнее уравнение имеет только одно целое решение $m=3$. Тогда число $a=2^6\cdot 3^3=1728$.

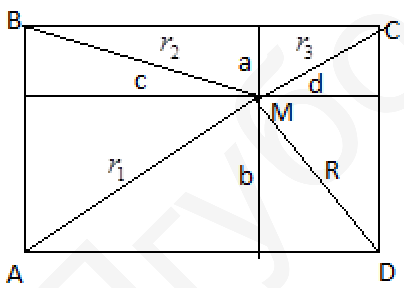
4. Необходимо найти целое q , для которого величина $\Delta = \left|\frac{3}{4} - \frac{55-q}{q}\right| = \left|\frac{7q-220}{4q}\right|$ принимает наименьшее значение. На рис. изображен график зависимости Δ от q:



$q^* = \frac{220}{7} \approx 31,4 -$ ноль функции Δ. $q_1 = 31, \quad q_2 = 32$ - ближайшие к q^* целые числа.

$\Delta(q_1) = \frac{3}{128} < \Delta(q_2) = \frac{4}{128}$. Искомая дробь $\frac{24}{31}$ соответствует $q = 31$.

5. Пусть $a, b -$ расстояния от точки M до сторон BC и CD , а $c, d -$ расстояния от точки M до сторон AB и CD .



Обозначим через r_1, r_2, r_3 и R - расстояния точки M до вершин A, B, C и D . Тогда

$$c^2 + b^2 = r_1^2,\ a^2 + c^2 = r_2^2,\ a^2 + d^2 = r_3^2,\ d^2 + b^2 = R^2.$$

Заметим, что $r_1^2 + r_3^2 = r_2^2 + R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Откуда $R^2 = r_1^2 + r_3^2 - r_2^2$. Так как

$$r_1 = 20,\ r_2 = 30,\ r_3 = 30,$$

то $R^2 = 20^2 + 40^2 - 30^2 = 1100 \to R = 10\sqrt{11}$.