Заключительный тур олимпиады Росатом, весна, 2016, Математика, 8 класс

Задание

1. При каких целых a уравнение $(ax-8)(2x-a)=0$ имеет ровно два целых решения. Найти эти решения.

2. В стеклянной банке разместилась коллекция жуков. Часть жуков имеет 6 лапок, остальные – по 8 лапок. Коля внимательно пересчитал все лапки, их оказалось 86 штук. Какое минимально возможное количество жуков могло находиться в банке?

3. Найти ближайшую к числу 5 дробь вида $\dfrac{19p-3}{p-2}$, где $p-$ целое число.

4. Пятизначное четное число a, являющееся квадратом целого числа, делится на 21. Найти минимальное a, удовлетворяющее этим условиям.

5. На плоскости расположены три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Построить на плоскости треугольник MNP, подобный треугольнику ABC, в котором точки A, B и C являются серединами его сторон. Найти площадь такого треугольника, если площадь треугольника ABC равна 4. Возможно ли построить треугольник MNP, подобный треугольнику ABC, на сторонах которого находятся точки A, B и C, но они не являются их серединами?

Решения

1. При $a=0$ уравнение имеет одно целое решение $x=0$. При $a\neq 0$ уравнение имеет решения $x_1=\dfrac{8}{a}$ и $x_2=\dfrac{a}{2}$, которые совпадают при $a^2=16\to a=\pm 4$. Решение x_1 целое, если $a=\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$. Решение x_2 целое, если $a-$ четное число. Условиям задачи удовлетворяют $a=\pm 2$ и $a=\pm 8$. При $a=2$ имеем: $x_1=4,\ x_2=1$, при $a=-2$ имеем: $x_1=-4,\ x_2=-1$, при $a=8$ имеем: $x_1=1,\ x_2=4$, при $a=-8$ имеем: $x_1=-1,\ x_2=-4$.

2. Пусть n жуков имеют по 6 лапок, а m жуков имеют по 8 лапок. Тогда общее число лапок равно $6n+8m=86$ или $3n+4m=43$. Запишем общее решение этого уравнения: $\begin{cases} n=4t-43\geq 1 \\ m=43-3t\geq 1 \end{cases}, t\in\mathbb{Z}.$.

Так как $n\geq 1$ и $m\geq 1$, то $t=11,12,13,14$. Общее число жуков равно $n+m=t$, следовательно, наименьшее число жуков равно 11.

3. Рассмотрим $\left|\dfrac{19p-3}{p-2}-5\right|=\left|\dfrac{14p+7}{p-2}\right|=7\left|\dfrac{2p+1}{p-2}\right|=7\left|2+\dfrac{5}{p-2}\right|$.

Следовательно, нам нужно найти целочисленное p, при котором минимально выражение $\left|2+\dfrac{5}{p-2}\right|$.

Заметим, что при $p>2$ это выражение больше 2. Рассмотрим $p<2$. При $p=1$ имеем

$\left|2+\dfrac{5}{1-2}\right|=\left|-3\right|=3$, при $p=0$ имеем $\left|2+\dfrac{5}{0-2}\right|=\left|-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$, при $p=-1$ имеем $\left|2+\dfrac{5}{-1-2}\right|=\left|-\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{1}{3}$, при $p=-2$ имеем $\left|2+\dfrac{5}{-2-2}\right|=\left|-\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{3}{4}$, и т. д., с уменьшением p выражение будет стремиться к 2.

Таким образом, $p=-1$ обеспечивает наименьшее отклонение, а искомое число равно $\dfrac{22}{3}$.

4. Число $a=m^2$ может делиться на 21только в том случае, если m делится на 3 и на 7, т.е. $m=21k \to a=441k^2$. Из того, что число $a=m^2$ п $a=m^2$, пятизначное следует неравенство $10000 \le 441k^2 \le 99999 \to 23 \le k^2 \le 226$. Минимальное четное $k=6$, поэтому $a_{\min}=441\cdot 36=15876$

5. Дадим ответ на первый вопрос задачи. На рис.1 изображен произвольный треугольник MNP.

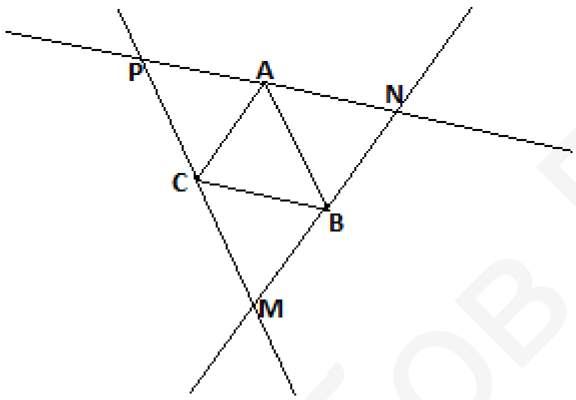


Рис.1

Через точку A проведем прямую L_A, параллельную BC, через точку B - прямую L_B, параллельную AC, и через точку C - прямую L_C, параллельную AB. Построенные прямые попарно пересекаются в точках M, N и P. Четырехугольники $ACMB$ и $ACBN-$ параллелограммы (по построению), $MB=CA=BN$, т.е. $B-$ середина стороны MN . Аналогично, для других сторон. Треугольник MNP подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k=2$, поэтому его площадь в 4 раза больше площади треугольника ABC, т.е. $S_{MNP}=16$.

Для ответа на второй вопрос задачи построим треугольник MNP, подобный треугольнику ABC, на сторонах которого находятся точки A, B и C, но они не являются их серединами.

Сначала укажем ГМТ на плоскости, из которых заданный отрезок AB виден под заданным углом γ. Таким ГМТ является дуга окружности, у которой отрезок AB является хордой, стягивающей дугу с центральным углом 2γ. Построение такой дуги изображено на рис.2

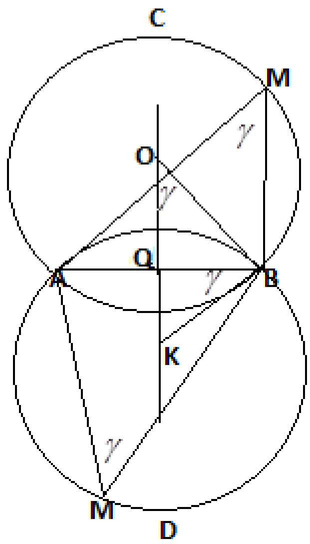


Рис.2

Опишем это построение:

1) Строим отрезок BK под углом γ к отрезку AB, точка K лежит на срединном перпендикуляре к отрезку AB;

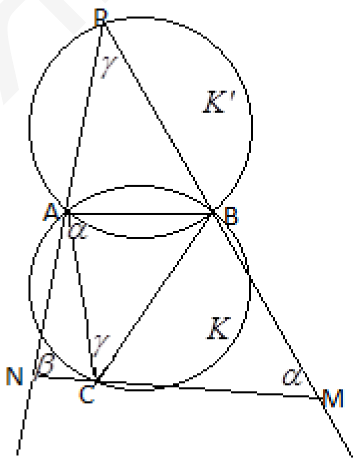
2) Через точку B проводим перпендикуляр BO к отрезку BK, точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB;

3) строим окружность с центром в точке O и радиусом, равным длине отрезка BO;

4) Из любой точки M дуги ACB (и ей симметричной дуги ADM) отрезок AB виден под углом γ

Докажем это. BK – касательная к окружности, поэтому дуга между касательной и хордой AB измеряется центральным углом 2γ, а вписанный в окружность угол AMB равен половине этой дуги, т.е. γ.

Перейдем теперь к построению треугольника MNP, подобного ABC:



1) Окружность K описана около $\triangle ABC$. Окружность K' симметрична окружности K относительно прямой AB. На дуге окружности K' с хордой AB, из точек которой отрезок AB виден под углом $\gamma = \measuredangle ACB$, выбираем любую точку P, так чтобы стороны угла APB были не параллельны AC и BC, а точка C располагалась внутри угла APB.

2) Через точку C проводим прямую так, чтобы она образовывала угол $\beta = \measuredangle ABC$ с одной из сторон угла APB. Точки пересечения этой прямой со сторонами угла APB обозначим через M и N.

3) треугольник MNP подобен $\triangle ABC$ по двум углам. Точки A, B и C лежат на сторонах треугольника MNP и не являются его серединами. Треугольник MNP построен.