Московская математическая олимпиада

8 класс, 2017 год

1. Замените в выражении $AB^C = DE^F$ буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным, использовав каждую цифру от 1 до 6 ровно один раз. (Пояснение: AB^C — двузначное число из цифр A и B, возведённое в степень C. Достаточно привести один способ замены.)

2. На плоскости даны треугольник ABC и 10 прямых, среди которых нет параллельных друг другу. Оказалось, что каждая из прямых равноудалена от каких-то двух вершин треугольника ABC. Докажите, что хотя бы три из этих прямых пересекаются в одной точке.

3. По кругу написано 100 ненулевых чисел. Между каждыми двумя соседними числами написали их произведение, а прежние числа стёрли. Количество положительных чисел не изменилось. Какое минимальное количество положительных чисел могло быть написано изначально?

4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны и $AD = BE = CF$. Докажите, что в него можно вписать окружность (то есть внутри шестиугольника существует окружность, касающаяся всех его сторон).

5. Преподаватель выставил оценки по шкале от 0 до 100. В учебной части могут менять верхнюю границу шкалы на любое другое натуральное число, пересчитывая оценки пропорционально и округляя до целых. Нецелое число при округлении меняется до ближайшего целого; если дробная часть равна 0,5, направление округления учебная часть может выбирать любое, отдельно для каждой оценки. (Например, оценка 37 по шкале 100 после пересчёта в шкалу 40 перейдёт в $37 \cdot (40/100) = 14{,}8$ и будет округлена до 15.) Студенты Петя и Вася получили оценки a и b, отличные от 0 и 100. Докажите, что учебная часть может сделать несколько пересчётов так, чтобы у Пети стала оценка b, а у Васи — оценка a (пересчитываются одновременно обе оценки).

6. Кузнечик умеет прыгать по клетчатой полоске шириной в 1 клетку на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону. (Прыжок на k клеток означает, что между начальным и конечным положениями прыжка находятся $k - 1$ клеток.) Будем называть натуральное число n *пропрыгиваемым*, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти полоску длины n, побывав на каждой клетке ровно один раз. Докажите, что существует непропрыгиваемое n, большее 50.