Олимпиада «Курчатов» — 2013

Финальный этап по математике, 19.05.2013

Необязательно решать все задачи: выбирайте те, которые Вам по вкусу и по силам. В скобках указаны классы, на которые рассчитана задача. Решать задачи более старших классов также можно.

1. (6) Разрежьте какой-нибудь клетчатый квадрат по границам клеток на 4 равные фигуры так, чтобы периметр каждой фигуры был равен периметру квадрата. (Фигуры равны, если они совпадают при наложении)

2. (6-7) Трехзначное число разделили на его сумму цифр. Какой наибольший остаток мог при этом получиться?

3. (6) Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф каждый день брали 2 бутылки молока, при этом одну выпивал один из них, а другую – двое остальных. В первый день Ниф-Ниф и Наф-Наф вместе выпили бутылку так же быстро, как Нуф-Нуф. Во второй Наф-Наф и Нуф-Нуф выпили вместе вдвое быстрее Ниф-Нифа. Во сколько раз быстрее Наф-Нафа выпьют свою бутылку вместе Ниф-Ниф и Нуф-Нуф на третий день?

4. (6-8) Для игры на автоматах есть жетоны восьми видов: они дают право играть 1 мин, 2 мин, 3 мин, 6 мин, 10 мин, 20 мин, полчаса и час. Петя купил X жетонов и играл Y минут. Докажите, что можно купить Y жетонов и играть ровно X часов.

5. (7-8) Можно ли в уравнения четырех прямых $y=ax+k$, $y=bx+l$, $y=cx+m$, $y=dx$ подставить вместо коэффициентов a,b,c,d,k,l,m семь различных простых чисел так, чтобы все эти прямые пересеклись в одной точке?

6. (7) У барона Мюнхгаузена есть набор из четырех треугольников. Он утверждает, что первый из треугольников не равен второму. И ещё говорит, что какой бы из четырёх не потерялся, из остальных трёх можно составить один треугольник побольше (без наложений и дыр). Могут ли все слова барона быть правдой?

7. (8-9) $ABCD$ – трапеция, M – середина основания AD, E – точка пересечения диагоналей. Известно, что $AD=2BC=6ME$. Докажите, что $AB^2+CD^2=BC^2$.

8. (8-11) Клетчатая доска 100×100 раскрашена в шахматном порядке. Какое наибольшее число черных клеток доски можно отметить так, чтобы не нашлось параллелограмма с вершинами в центрах отмеченных клеток?

9. (9) Решить уравнение $(x^2–x–2)^2–x^3=10$.

10. (9-11) Назовем натуральное число *крепким*, если оно не равно произведению цифр никакого другого числа. Докажите, что найдется такое натуральное N, что все числа $N+1$, $N+2$, …, $N+2013$ – крепкие.

11. (10-11) Известно, что $5a+2b+5c = 0$. Докажите, что у уравнения $ax^3+bx+c = 0$ на интервале (0, 2) есть хотя бы один корень.

12. (10-11) На плоскости даны n различных точек. Докажите, что их можно так обозначить буквами A_1, A_2, …, A_n, чтобы векторы $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_2A_3}$, …, $\mathbf{A_{n-1}A_n}$ были все различны.