

Межрегиональная олимпиада школьников  
«Будущие исследователи – будущее науки»  
2017-2018уч.г.

г.Саров, Нижегородская область

Математика  
Отборочный тур

9 класс

Решения и ответы необходимо набрать в редакторе **Word**,  
затем распечатать, **подписать каждую страницу**,  
после чего отсканировать в **ОДИН** файл формата **PDF**  
и прислать полученный **PDF-файл вместе с заявкой и тезисами**  
исследовательской работы  
по электронной почте **kh.read@expd.vniief.ru** до 15 ноября 2017 года

1. (10 баллов) Найти наименьшее натуральное число, большее 1 и дающее при делении на 2,3,4,5,6 остаток, равный 1.
2. (10 баллов) Найти количество упорядоченных троек натуральных чисел  $a, b, c$  если  $\text{НОД}(a, b, c) = 30$ ;  $\text{НОК}(a, b, c) = 2^8 \cdot 3^9 \cdot 5^{10}$ .
3. (10 баллов) Решить неравенство  $\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{(x-3)^2} \geq 0$ .
4. (20 баллов) Найти все значения параметра  $a$ , при которых вершины двух парабол  $y = x^2 + 4ax - a$  и  $y = -ax^2 + 4x + a + 2$  лежат по одну сторону от прямой  $y = -3$ .
5. (10 баллов) Три гонщика стартуют одновременно из одной точки шоссе, имеющих форму окружности, и едут в одном направлении с постоянными скоростями. Первый гонщик впервые после старта догнал второго, делая свой пятый круг, в точке, диаметрально противоположной старту, а через полчаса после этого он вторично обогнал третьего гонщика. Второй гонщик впервые догнал третьего через три часа после старта. Сколько кругов в час делает первый гонщик, если второй гонщик проходит круг не менее, чем за двадцать минут.
6. (10 баллов) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ \frac{x^3 + y^3}{x^5 + y^5} = \frac{7}{31} \end{cases}$$
7. (10 баллов) В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена высота, из другой — биссектриса, из третьей — медиана. Докажите, что проведенные биссектриса и медиана не могут разделить высоту на три равные части.
8. (20 баллов) На координатной плоскости рассматривается фигура  $M$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{xy}{3}} \geq 2x - y, \\ \frac{y - 8}{x^2 + y^2 - 64} > \frac{1}{10} \end{cases}$$

Изобразите фигуру  $M$ .

Межрегиональная олимпиада школьников  
«Будущие исследователи – будущее науки»  
2017-2018уч.г.

г.Саров, Нижегородская область

Математика  
Отборочный тур

10 класс

Решения и ответы необходимо набрать в редакторе **Word**,  
затем распечатать, **подписать каждую страницу**,  
после чего отсканировать в **ОДИН** файл формата **PDF**  
и прислать полученный **PDF-файл вместе с заявкой и тезисами**  
исследовательской работы  
по электронной почте **kh.read@expd.vniief.ru** до 15 ноября 2017 года

1. (10 баллов) Доказать, что квадрат простого числа, большего 5, при делении на 30 дает в остатке 1 или 19.
2. (10 баллов) Найти количество упорядоченных троек натуральных чисел  $a, b, c$  если  $\text{НОД}(a, b, c) = 30$ ;  $\text{НОК}(a, b, c) = 2^8 \cdot 3^9 \cdot 5^{10}$ .
3. (10 баллов) Решить неравенство  $\sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{12x + \frac{169}{4}} \geq x$ .
4. (20 баллов) Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(ax^2 - (a^2 + 16)x + 16a)\sqrt{x + 5} = 0$  имеет ровно два различных корня.
5. (10 баллов) Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50% от второго ее члена. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй ее член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.
6. (10 баллов) Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ \frac{x^3 + y^3}{x^5 + y^5} = \frac{7}{31} \end{cases}$$
7. (10 баллов) В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $CD$  перпендикулярна основаниям,  $O$  - точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника  $OCD$  взята точка  $S$ , диаметрально противоположная точке  $O$ . Докажите, что  $\angle BSC = \angle ASD$ .
8. (20 баллов) На координатной плоскости рассматривается фигура  $M$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{xy}{3}} \geq 2x - y, \\ \frac{y - 8}{x^2 + y^2 - 64} > \frac{1}{10} \end{cases}$$

Изобразите фигуру  $M$ .

Межрегиональная олимпиада школьников  
«Будущие исследователи – будущее науки»  
2017-2018уч.г.

г.Саров, Нижегородская область

Математика  
Отборочный тур

11 класс

Решения и ответы необходимо набрать в редакторе **Word**,  
затем распечатать, **подписать каждую страницу**,  
после чего отсканировать в **ОДИН** файл формата **PDF**  
и прислать полученный **PDF-файл вместе с заявкой и тезисами**  
исследовательской работы  
по электронной почте **kh.read@expd.vniief.ru** до 15 ноября 2017 года

1. (10 баллов) Доказать, что ни при какой натуральном  $n$  число  $1 + 2 + \dots + n$  не может оканчиваться ни одной из цифр 2,4,7,9.

2. (10 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 3y + 5z = 1, \\ 4x + 5y - 2z = 4 \end{cases}$$

в целых числах.

3. (10 баллов) Решить неравенство  $\frac{\sqrt{-x^2-2x+3}}{|x^2+2x-3|-|x^2+6x+5|} \geq 0$ .

4. (20 баллов) Найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(ax^2 - (a^2 + 16)x + 16a)\sqrt{x+5} = 0$

имеет ровно два различных корня.

5. (10 баллов) Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвертый член арифметической прогрессии составляет 50% от второго ее члена. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй ее член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.

6. (10 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{\log_3(xy)} - \log_3\left(\frac{1}{xy}\right) = 3, \\ \log_3(3 + xy) - 2 \log_9(y) = \log_3(y - 1). \end{cases}$$

7. (10 баллов) В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $CD$  перпендикулярна основаниям,  $O$  - точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника  $OCD$  взята точка  $S$ , диаметрально противоположная точке  $O$ . Докажите, что  $\angle BSC = \angle ASD$ .

8. (20 баллов) На координатной плоскости рассматривается фигура  $M$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{xy}{3}} \geq 2x - y, \\ \frac{y-8}{x^2+y^2-64} > \frac{1}{10} \end{cases}$$

Изобразите фигуру  $M$  и найдите ее площадь.