ЗАДАНИЕ 22. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

Нужно понять, что базовое число – это 1. Это аналог 100%.

Если 200 умножить на 1, то изменится ли число? Нет, оно так и останется 1.

Если 200 умножить на 0,95, то изменится ли число? Да, получится 190. В этом примере мы **отняли 5%** от числа.

Если 200 умножить на 1,6, то изменится ли число? Да, получится 320. В этом примере мы **прибавили 60%** к числу.

Процент	**Число, на которое умножать**	**Пример**
100%	1	$150 \cdot 1 = 150$
85% *(100% – 15%)*	0,85	$200 \cdot 0{,}85 = 170$
120% *(100% + 20%)*	1,2	$300 \cdot 1{,}2 = 360$
1% *(100% – 99%)*	0,01	$1500 \cdot 0{,}01 = 15$

ПРИМЕР №1

В течение августа помидоры подешевели на 40%, а затем в течение сентября подорожали на 70%. Какая цена больше: в начале августа или в конце сентября – и на сколько процентов?

Пусть до августа цена была **x** руб.
Значит, в августе от этой цены осталось **0,6x** (т.к. цена снизилась на 40%, то осталось 60%).
Далее цена увеличилась на 70%, т.е. её надо умножить на **1,7**:
$\mathbf{0{,}6x \cdot 1{,}7 = 1{,}02x}$

Итак, сначала цена была x (или 1x), а стала 1,02x.
Разница составила 0,02, это 2%.

Ответ: в конце сентября цена больше на 2%.

ПРИМЕР №2

На пост губернатора области претендовало три кандидата: Климов, Лебедев, Мишин. Во время выборов за Мишина было отдано в 1,5 раза меньше голосов, чем за Климова, а за Лебедева – в 7 раз больше, чем за Климова и Мишина вместе. Сколько процентов голосов было отдано за победителя?

Пусть x% голосов было отдано за Мишина.
Тогда 1,5x% голосов было отдано за Климова.
Тогда 7(x + 1,5x)% – за Лебедева.
Всего должно быть 100% голосов.

$x + 1{,}5x + 7(x + 1{,}5x) = 100\%$
$2{,}5x + 7x + 10{,}5x = 100\%$
$20x = 100\%$
$x=5$

Значит, за Мишина отдали 5% голосов.
За Климова отдали $1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5\%$ голосов.
За Лебедева отдали $7\,(5 + 7{,}5) = 87{,}5\%$ голосов.

Ответ: 87,5.

ЗАДАЧИ НА СВЕЖИЕ И ВЫСУШЕННЫЕ ФРУКТЫ

1) Ищем долю **сухого** вещества в **свежих** фруктах;
2) Ищем долю **сухого** вещества в **высушенных** фруктах;
3) **Делим 1) на 2)** и получаем, во сколько раз в высушенных фруктов сухого вещества больше;
4) **Умножаем** это число на количество кг высушенных фруктов (если дано количество кг высушенных); *или*
Делим на это число количество кг свежих фруктов (если дано количество кг свежих).

ПРИМЕР №1

Свежие фрукты содержат 80% воды, а высушенные – 4%. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 2 кг высушенных фруктов?

Свежие фрукты	**Высушенные фрукты**
80% воды 20% сухого вещества *(100% – 80% = 20%)*	4% воды 96% сухого вещества *(100% – 4% = 96%)*

Сухое вещество остаётся **неизменным**! Поэтому нас интересует только сухое вещество.
В высушенных фруктах **в 4,8 раза больше сухого вещества** (96% : 20% = 4,8).

Значит, для получения 2 кг высушенных фруктов **нужно в 4,8 больше свежих фруктов** (в них будет одинаковое количество сухого вещества):
4,8 · 2 = 9,6 кг.

Ответ: 9,6 кг.

ПРИМЕР №2

Свежие фрукты содержат 72% воды, а высушенные – 20%. Сколько сухих фруктов получится из 100 кг свежих фруктов?

Свежие фрукты	**Высушенные фрукты**
72% воды 28% сухого вещества *(100% – 72% = 28%)*	20% воды 80% сухого вещества *(100% – 20% = 80%)*

Сухое вещество остаётся **неизменным**! Поэтому нас интересует только сухое вещество.
В высушенных фруктах **в 80/28 раза больше сухого вещества** (80% : 28% = 80/28).

Значит, для из 100 кг свежих фруктов **получится в 80/28 раз меньше высушенных фруктов** (в них будет одинаковое количество сухого вещества):

$$100 : \frac{80}{28} = \frac{100 \cdot 28}{80} = 35$$

Ответ: 35 кг.

ЗАДАЧИ НА СПЛАВЫ, РАСТВОРЫ И СМЕСИ

Говоря о **смесях**, **растворах** и **сплавах**, будем употреблять термин **«смесь»**:

• смесь состоит из **«чистого вещества»** и **«примеси»**. Что есть «чистое вещество», определяется в каждой задаче отдельно, при этом все остальные вещества, составляющие смесь, относятся к примеси;

• **долей (α) чистого вещества в смеси** называется отношение количества чистого вещества **(m)** в смеси при условии, что они измерены одной и той же единицей массы или объёма:

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{m}{M}}$$

тогда:

$$\boldsymbol{m = \alpha M}$$

$$\boldsymbol{M = \frac{m}{\alpha}}$$

где

α – доля чистого вещества в смеси (0 < a < 1);

m – количество чистого вещества в смести;

M – общее количество смеси.

Когда смешивают два раствора и получают третий, действует следующая формула:

$$\boldsymbol{\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 = \alpha_3 m_3 \alpha}$$

***α_1** – доля кислоты в первом растворе*

***α_2** – доля кислоты во втором растворе*

***α_3** – доля кислоты в растворе, который получился после смешивания*

***m_1** – масса первого раствора*

***m_2** – масса второго раствора*

***m_3** – масса раствора, который получился после смешивания*

ПРИМЕР №1

Смешали некоторое количество 11% – го раствора некоторого вещества с таким же количеством 21% – го раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Формула:

$$\boldsymbol{\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 = \alpha_3 m_3 \alpha}$$

***α_1** – доля кислоты в первом растворе*

***α_2** – доля кислоты во втором растворе*

***α_3** – доля кислоты в растворе, который получился после смешивания*

***m_1** – масса первого раствора*

***m_2** – масса второго раствора*

***m_3** – масса раствора, который получился после смешивания*

11% нужно представить как 0,11, а 21% – как 0,21.

Нам сказано, что масса первого раствора равна массе второго раствора. Обозначим эту массу как х. После смешивания масса будет равна 2х.

$$\boldsymbol{0,11x + 0,21x = \alpha_3 \cdot 2x\alpha}$$

$$\boldsymbol{0,32x = \alpha_3 \cdot 2x\alpha}$$

$$0,32x = \alpha_3 \cdot 2x\alpha$$

α

$$\alpha_3 = \frac{0,32x}{2x} = 0,16 = 16\%\alpha$$

Ответ: 16.

ПРИМЕР №2

Имеется два сплава с разным содержанием меди: в первом содержится 60%, а во втором – 45% меди. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 55% меди?

Формула:

$$\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 = \alpha_3 m_3 \alpha$$

α_1 *– доля меди в первом сплаве*
α_2*α– доля меди во втором сплаве*
α_3 *– доля меди в новом сплаве*
m_1 *– масса первого сплава*
m_2*α– масса второго сплава*
m_3 *– масса нового сплава (она равна* m_1*α+*m_2*)*

60% нужно представить как 0,6, а 45% – как 0,45.

$$\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 = \alpha_3 (m_1 + m_2)\alpha$$

$$0,6m_1 + 0,45m_2 = 0,55(m_1 + m_2)\alpha$$

$$0,6m_1 + 0,45m_2 = 0,55m_1 + 0,55m_2\alpha$$

$$0,05m_1 = 0,1m_2\alpha$$

$$m_1 = \frac{0,1m_2}{0,05}\alpha$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{0,1}{0,05}\alpha$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{0,1}{0,05} = \frac{2}{1}\alpha$$

Соотношение должно быть 2 : 1.

Ответ: 2 : 1.

ПРИМЕР №3

Имеются два сосуда, содержащие 20 и 16 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 41% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 43% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

Формула:

$$\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 = \alpha_3 m_3 \alpha$$

α_1 *– доля кислоты в первом растворе*
α_2*α– доля кислоты во втором растворе*

α_3 *доля кислоты в растворе, который получился после смешивания*
m_1 *– масса первого раствора*
m_2 *– масса второго раствора*
m_3 *– масса раствора, который получился после смешивания (она равна* ***$m_1 + m_2$****)*

Составим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 20a_1 + 16a_2 = 0{,}41 \cdot (20 + 16) \\ a_1 m_1 + a_2 m_1 = 0{,}43 \cdot 2m_1 \end{cases}$$

Во втором уравнении можно разделить обе части на m_1.

$$\begin{cases} 20a_1 + 16a_2 = 0{,}41 \cdot 36 \\ a_1 + a_2 = 0{,}43 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20a_1 + 16a_2 = 14{,}76 \\ a_1 = 0{,}86 - a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20(0{,}86 - a_2) + 16a_2 = 14{,}76 \\ a_1 = 0{,}86 - a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17{,}2 - 20a_2 + 16a_2 = 14{,}76 \\ a_1 = 0{,}86 - a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a_2 = -2{,}44 \\ a_1 = 0{,}86 - a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = 0{,}61 \\ a_1 = 0{,}86 - 0{,}61 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = 0{,}61 \\ a_1 = 0{,}25 \end{cases}$$

В первом растворе 0,25 · 20 = 5 кг кислоты.

Ответ: 5.

ЗАДАЧИ НА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ, РАБОТУ

$$p = \frac{A}{t}$$

тогда:

$$A = pt$$

$$t = \frac{A}{p}\alpha$$

где

p – производительность;
A – вся работа;
t – время работы.

Нужно знать:

• при **совместной работе** нескольких объектов, выполняющих одновременно работу, их **общая производительность** является **суммой производительностей отдельных объектов**;

• во многих задачах на работу точный характер этой работы не определён, тогда удобно **принять объём всей работы за единицу** и **измерять части такой работы в долях от единицы**.

ПРИМЕР №1

Три бригады изготовили вместе 173 детали. Известно, что вторая бригада изготовила деталей в 3 раза больше, чем первая и на 12 деталей меньше, чем третья. На сколько деталей больше изготовила третья бригада, чем первая?

В этой задаче формулу применять не требуется. Нужно лишь составить уравнение.

Пусть **первая** бригада изготовила **x** деталей.
Тогда **вторая** бригада изготовила **3x** деталей.
Тогда **третья** бригада изготовила **3x + 12** деталей (если вторая изготовила на 12 меньше, чем третья, значит, третья изготовила на 12 больше, чем вторая).
Вместе они изготовили **173** детали.

x + 3x + 3x + 12 = 173
7x = 161
x = 23

Получается, **первая** бригада изготовила **23** детали.
Третья бригада изготовила 3 · 23 + 12 = **81** деталь.

На сколько деталей больше изготовила третья бригада, чем первая?
81 – 13 = 58.

Ответ: 58.

ПРИМЕР №2

Первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй, и заканчивает работу над заказом, состоящим из 60 деталей, на 3 часа раньше, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Обозначим производительность второго рабочего как **x**, а его время работы как **y**.

	Вся работа – **A**	Время работы – **t**	Производительность $\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{t}}$
Первый рабочий	60	y – 3	x + 10
Второй рабочий	60	y	x

Если $p = \frac{A}{t}$, то $A = pt$.

$$\begin{cases}(x+10)(y-3) = 60 \\ xy = 60\end{cases}$$

$$\begin{cases}xy + 10y - 3x - 30 = 60 \\ xy = 60\end{cases}$$

$$\begin{cases}60 + 10y - 3x - 30 = 60 \\ y = \dfrac{60}{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}10y - 3x - 30 = 0 \\ y = \dfrac{60}{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}10 \cdot \dfrac{60}{x} - 3x - 30 = 0 \\ y = \dfrac{60}{x}\end{cases}$$

Решим первое уравнение системы.

$$10 \cdot \frac{60}{x} - 3x - 30 = 0$$

$$\frac{600}{x} - 3x - 30 = 0$$

$$600 - 3x^2 - 30x = 0$$

$$x^2 + 10x - 200 = 0$$

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-200)}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 30}{2} = -5 \pm 15}$$

x_1 = -20 и x_2 = 10

Количество деталей не может быть отрицательным. Поэтому правильный ответ – 10 деталей.

Ответ: 10.

ПРИМЕР №3

Игорь и Паша красят забор за 3 часа. Паша и Володя красят этот же забор за 6 часов, а Володя и Игорь – за 4 часа. За сколько минут мальчики покрасят забор, работая втроём?

Переведём часы в минуты. 3 часа = 180 минут. 6 часов = 360 минут. 4 часа = 240 минут.

Найдём **производительность**:
Игорь и Паша за 180 минут красят 1 забор.
Игорь и **Паша** за 1 минуту красят **1/180** забора.
Паша и Володя за 360 минут красят 1 забор.
Паша и **Володя** за 1 минуту красят **1/360** забора.
Володя и Игорь за 240 минут красят 1 забор.
Володя и **Игорь** за 1 минуту красят **1/240** забора.

Сложим все производительности и **поделим на 2** (так как мы получим удвоенную производительность каждого мальчика).

$$\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{360}+\frac{1}{240}\right):2=\left(\frac{4+2+3}{720}\right):2=\frac{9}{720}:2=\frac{1}{80}:2=\boldsymbol{\frac{1}{160}}$$

За одну минуту они красят **1/160 забора**. Значит, чтобы покрасить весь забор, нужно **160 минут**.

Можно это записать и в виде формулы:

$$p=\frac{A}{t}$$

$$\frac{1}{160}=\frac{1}{t}$$

$$t=160$$

Ответ: 160.

ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

$$\boldsymbol{S = Vt}$$

тогда:

$$\boldsymbol{V = \frac{S}{t}\alpha}$$

$$\boldsymbol{t = \frac{S}{V}\alpha}$$

где

S – пройденное **расстояние**,
V – **скорость** равномерного движения,
t – **время** движения.

В таких задачах **рисунки облегчают составление уравнений**:
• **путь** можно изобразить в виде **отрезка**;
• **место** встречи движущихся с разных сторон объектов **точкой** на отрезке и т.п.

При решении задач нужно знать следующее:
1) Чтобы найти **среднюю скорость**, нужно **разделись всё расстояние на всё время**.
Складывать скорости нельзя – получится неверный ответ!

$$V_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}}$$

2) Объекты, **начавшие двигаться навстречу друг другу одновременно**, движутся **до момента встречи** одинаковое время:

$$\boldsymbol{t = \frac{S}{V_1 + V_2}}$$

3) При движении объектов **в одну сторону** ($V_1 > V_2$) **время**, через которое первый объект догонит второй объект, равно:

$$\boldsymbol{t = \frac{S}{V_1 - V_2}\alpha}$$

где

t – **время**, через которое первый догонит второго
S – **начальное расстояние** между объектами;
V_1 – **скорость более быстрого** объекта
V_2 – **скорость более медленного** объекта

4) При движении **по течению реки** скорость объекта **складывается** из его скорости в стоячей воде и **скорости течения реки**; при движении **против течения реки**, скорость объекта равна **разности** его скорости в стоячей воде и скорости течения реки.

Движущийся **плот** всегда имеет **скорость течения реки**.

5) В качестве **x** удобно обозначить то, что нужно найти в задаче.

ПРИМЕР №1

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Нам нужно найти ответ в метрах. Поэтому переведём км/ч в м/с.

1 км = 1000 м; 1 ч = 60 мин = 3600 с.

$$60\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 60 \cdot \frac{1000}{3600} = \frac{1000}{60} = \frac{50}{3}\,\text{м/с}$$

$$S = Vt = \frac{50}{3} \cdot 30 = 500 \text{ м}$$

Ответ: 500.

ПРИМЕР №2

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 54 км/ч, проезжает мимо идущего параллельно путям со скоростью 6 км/ч навстречу ему пешехода за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Поезд и пешеход идут навстречу друг другу. Поэтому скорости нужно сложить: 54 + 6 = 60 км/ч.

Нам нужно найти ответ в метрах. Поэтому переведём км/ч в м/с.

1 км = 1000 м; 1 ч = 60 мин = 3600 с.

$$60 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 60 \cdot \frac{1000}{3600} = \frac{1000}{60} = \frac{50}{3} \text{ м/с}$$

$$S = Vt = \frac{50}{3} \cdot 30 = 500 \text{ м}$$

Ответ: 500.

ПРИМЕР №3

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 65 км/ч, проезжает мимо идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 5 км/ч пешехода за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Поезд и пешеход идут в одну сторону. Поэтому из скорости поезда нужно вычесть скорость пешехода: 65 – 5 = 60 км/ч.

Нам нужно найти ответ в метрах. Поэтому переведём км/ч в м/с.

1 км = 1000 м; 1 ч = 60 мин = 3600 с.

$$60 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 60 \cdot \frac{1000}{3600} = \frac{1000}{60} = \frac{50}{3} \text{ м/с}$$

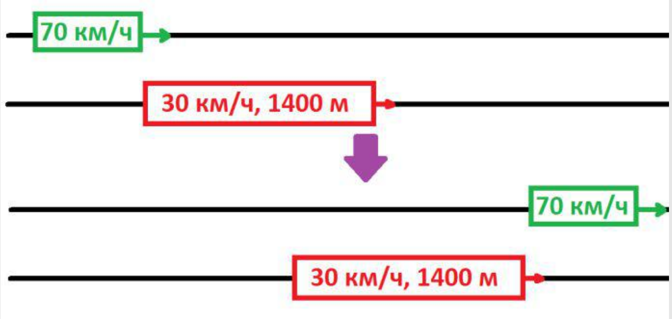
$$S = Vt = \frac{50}{3} \cdot 30 = 500 \text{ м}$$

Ответ: 500.

ПРИМЕР №4

По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 70 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 1400 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно 3 минутам. Ответ дайте в метрах.

Изобразим ситуацию до обгона и после обгона.



Так как они идут в одну сторону, то скорости вычитаем: 70 – 30 = **40 км/ч**. С такой скоростью идёт быстрый пассажирский поезд **относительно медленного товарного**. За 3 минуты он проезжает расстояние, равное товарному поезду + расстояние, равное себе (пассажирскому поезду).

Нам нужно найти ответ в метрах. Поэтому переведём км/ч в м/мин.

1 км = 1000 м; 1 ч = 60 мин.

$$40\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 40 \cdot \frac{1000}{60} = \frac{2000}{3}\,\text{м/мин}$$

$$S = Vt = \frac{2000}{3} \cdot 3 = 2000\ \text{м}$$

Получается, длина двух поездов равна 2000 м. Значит, длина пассажирского поезда равна:

$$2000 - 1400 = 600\ \text{м}$$

Ответ: 600.

ПРИМЕР №5

Первые 2 часа автомобиль ехал со скоростью 55 км/ч, следующий час – со скоростью 70 км/ч, а последние 3 часа – со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Составим табличку. В ней также найдём расстояние на каждом отрезке пути.

	Начало пути	**Середина пути**	**Конец пути**
Скорость (V)	55 км/ч	70 км/ч	90 км/ч
Время (t)	2 часа	1 час	3 часа
Расстояние (S)	55 · 2 = 110 км	70 · 1 = 70 км	90 · 3 = 270 км

Чтобы найти **среднюю скорость**, нужно **разделись всё расстояние на всё время**.
Складывать скорости нельзя – получится неверный ответ!

$$V_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}} = \frac{110 + 70 + 270}{2 + 1 + 3} = 75\ (\text{км/ч})$$

Ответ: 75 км/ч.

ПРИМЕР №6

Первую половину трассы автомобиль проехал со скоростью 56 км/ч, а вторую – со скоростью 84 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Составим табличку. Обозначим расстояние на каждой половине как **x**.

	Первая половина	**Вторая половина**

Скорость (V)	56 км/ч	84 км/ч
Время (t)	x/56 часов	x/84 часов
Расстояние (S)	x км	x км

Чтобы найти **среднюю скорость**, нужно **разделись всё расстояние на всё время**.
Складывать скорости нельзя – получится неверный ответ!

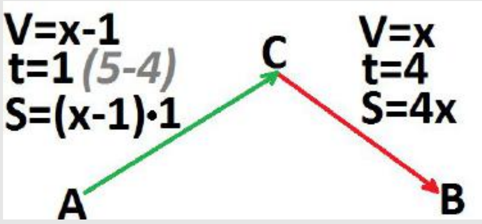
$$V_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}} = \frac{x + x}{\frac{x}{56} + \frac{x}{84}} = \frac{2x}{\frac{3x + 2x}{168}} = \frac{2x}{\frac{5x}{168}} = \frac{2x \cdot 168}{5x} = 67{,}2\ (\text{км/ч})$$

Ответ: 67,2 км/ч.

ПРИМЕР №7

Дорога между пунктами А и В состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 19 км. Турист прошёл путь из А в В за 5 часов, из которых спуск занял 4 часа. С какой скоростью турист шёл на спуске, если его скорость на подъёме меньше его скорости на спуске на 1 км/ч?

Сделаем рисунок. Обозначим как **x** скорость на спуске.



Расстояние на подъёме + Расстояние на спуске = 19 км (по условию)

Значит:
(x – 1) · 1 + 4x = 19
5x = 20
x = 4 км/ч

Ответ: 4 км/ч.

ПРИМЕР №8

Два автомобиля отправляются в 340 – километровый пробег. Первый едет со скоростью на 17 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Сделаем табличку. Обозначим как **x** скорость первого автомобиля.

	Первый автомоб.	**Второй автомоб.**
Скорость (V)	x км/ч	(x + 17) км/ч
Время (t)	$\frac{340}{x}$ часов	$\frac{340}{x+17}$ часов
Расстояние (S)	340 км	340 км

Нам сказано, что первый прибывает на 1 час раньше. Значит, время первого минус время второго равно 1.

$$\frac{340}{x} - \frac{340}{x + 17} = 1$$

$$\frac{340}{x} - \frac{340}{x+17} - 1 = 0$$

$$\frac{340(x+17) - 340x - x(x+17)}{x(x+17)} = 0$$

$$340(x+17) - 340x - x(x+17) = 0 \text{ при } x \neq 0 \text{ и } x \neq -17$$

$$340x + 5780 - 340x - x^2 + 17x = 0$$

$$-x^2 + 17x + 5780 = 0$$

$$x^2 - 17x - 5780 = 0$$

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5780)}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm \sqrt{23409}}{2} = \frac{-10 \pm 153}{2}}$$

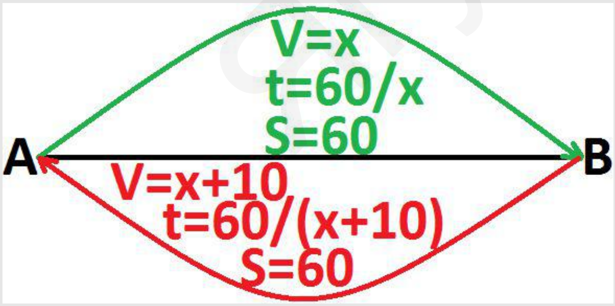
x_1 = -81,5 и x_2 = 71,5

Скорость не может быть отрицательной. Поэтому правильный ответ – 71,5 км/ч.

Ответ: 71,5 км/ч.

ПРИМЕР №9

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. Отдохнув, он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В.



В условии сказано, что **путь АВ = путь ВА + остановка 3 часа**. Значит:

$$\frac{60}{x} = \frac{60}{x+10} + 3$$

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} - 3 = 0$$

$$\frac{60(x+10) - 60x - 3x(x+30)}{x(x+10)} = 0$$

$$60(x+10) - 60x - 3x(x+30) = 0 \text{ при } x \neq 0 \text{ и } x \neq -10$$

$$60x + 600 - 60x - 3x^2 - 90x = 0$$

$$-3x^2 - 60x + 600 = 0$$

$$x^2 + 10x - 200 = 0$$

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-200)}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 30}{2} = -5 \pm 15}$$

x_1 = -20 и x_2 = 10

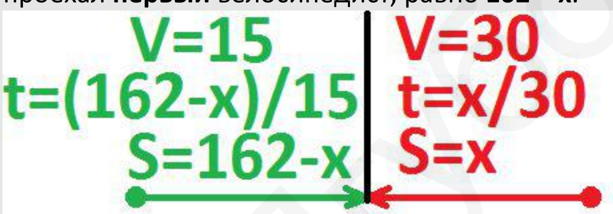
Скорость не может быть отрицательной. Поэтому правильный ответ – 10 км/ч.

Ответ: 10 км/ч.

ПРИМЕР №10

Из двух городов одновременно навстречу друг другу отправляются два велосипедиста. Проехав некоторую часть пути, первый велосипедист сделал остановку на 6 минут, а затем продолжил движение до встречи со вторым велосипедистом. Расстояние между городами составляет 162 км, скорость первого велосипедиста равна 15 км/ч, скорость второго – 30 км/ч. Определите расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи.

Для начала переведём минуты в часы. 6 минут = 0,1 часа.
Обозначим расстояние, которое проехал **второй** велосипедист, как **x**. Тогда расстояние, которое проехал **первый** велосипедист, равно **162 – x**.



Время первого велосипедиста + 0,1 часа = время второго велосипедиста

$$\frac{162 - x}{15} + 0{,}1 = \frac{x}{30}$$

$$\frac{162 - x}{15} + 0{,}1 - \frac{x}{30} = 0$$

$$\frac{2(162 - x) + 30 \cdot 0{,}1 - x}{30} = 0$$

$$324 - 2x + 3 - x = 0$$

$$-3x = -327$$

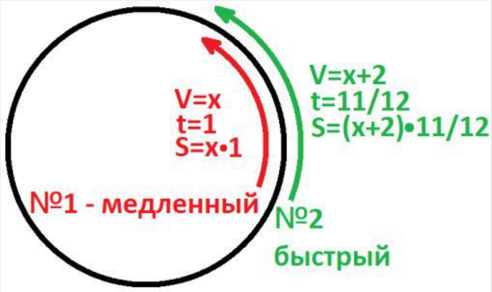
$$x = 109$$

Ответ: 109 км.

ПРИМЕР №11

Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 5 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 2 км/ч меньше скорости второго.

Переведём минуты в часы. 5 минут – это 1/12 часа.
Обозначим скорость первого (медленного) бегуна как **x**. Тогда скорость второго будет равна **x + 2**.
Если спустя час второй бегун прошёл первый круг 5 минут назад, то, получается, он прошёл первый круг за 55 минут, т.е. за 11/12 часа.



Приравняем расстояния друг к другу с учётом того, что расстояние первого на 1 км больше, чем у второго: $S_1 + 1 = S_2$.

$$x \cdot 1 + 1 = (x+2) \cdot \frac{11}{12}$$

$$x + 1 = \frac{11}{12}x + \frac{22}{12}$$

$$x - \frac{11}{12}x = -1 + \frac{22}{12}$$

$$\frac{1}{12}x = \frac{10}{12}$$

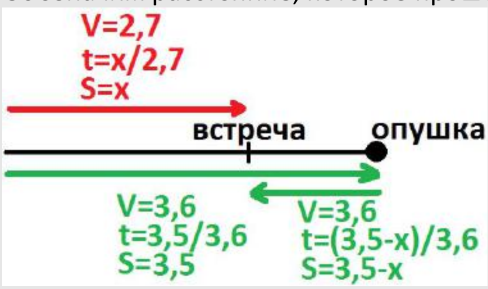
$$x = \frac{10}{12} : \frac{1}{12} = \frac{10}{12} \cdot \frac{12}{1} = 10$$

Ответ: 10 км/ч.

ПРИМЕР №12

Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 3,5 км от места отправления. Один идёт со скоростью 2,7 км/ч, а другой – со скоростью 3,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча?

Обозначим расстояние, которое прошёл медленный человек, как **x**.



По времени медленный шёл столько же, сколько и быстрый. Поэтому приравняем их время.

$$\frac{3{,}5}{3{,}6} + \frac{3{,}5 - x}{3{,}6} = \frac{x}{2{,}7}$$

$$\frac{3{,}5 + 3{,}5 - x}{3{,}6} - \frac{x}{2{,}7} = 0$$

$$\frac{7 - x}{3{,}6} - \frac{x}{2{,}7} = 0$$

Наименьший общий знаменатель равен **10,8**.

$$\frac{3 \cdot (7 - x) - 3x}{10{,}8} = 0$$

$$3 \cdot (7 - x) - 3x = 0$$

$$21 - 4x - 3x = 0$$

$$-7x = -21$$

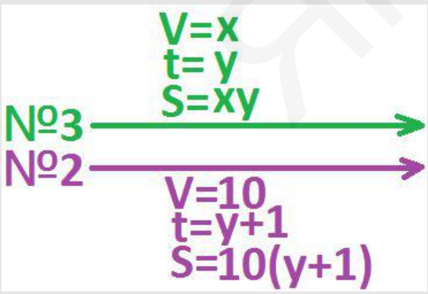
$$x = \frac{-21}{-7} = 3$$

Ответ: 3 км.

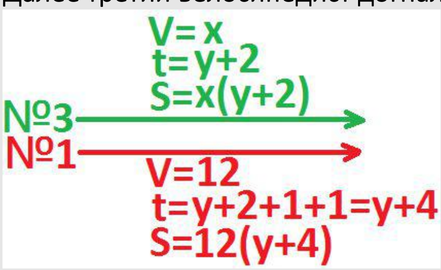
ПРИМЕР №13

Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 12 км/ч. Через час после него со скоростью 10 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 2 часа после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

Сначала третий велосипедист догнал второго.
Обозначим **скорость третьего** как **x**. Его **время, когда он догонял второго,** обозначим как **y**.



Далее третий велосипедист догнал первого.



Расстояния на **первом** рисунке **равны** и **расстояния** на **втором** рисунке тоже **равны**. Получается система.

$$\begin{cases} xy = 10(y+1) \\ x(y+2) = 12(y+4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{10(y+1)}{y} \\ \dfrac{10(y+1)(y+2)}{y} = 12(y+4) \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы.

$$\frac{10(y+1)(y+2)}{y} = 12(y+4)$$

$$\frac{10(y+1)(y+2)}{y} - 12(y+4) = 0$$

$$\frac{10(y+1)(y+2) - 12y(y+4)}{y} = 0$$

$$10(y+1)(y+2) - 12y(y+4) = 0 \text{ при } y \neq 0$$

$$10y^2 + 10y + 20y + 20 - 12y^2 - 48y = 0$$

$$-2y^2 - 18y + 20 = 0$$

$$y^2 + 9y - 10 = 0$$

$$\boldsymbol{y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\boldsymbol{y_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 11}{2}}$$

y_1 = -10 и y_2 = 1

Время не может быть отрицательным, поэтому **y = 1**.

Найдём теперь **x**.

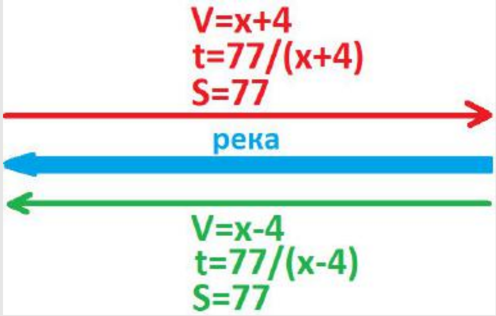
$$x = \frac{10(y+1)}{y} = \frac{10(1+1)}{1} = 20$$

Ответ: 20 км/ч.

ПРИМЕР №14

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Обозначим скорость лодки в неподвижной воде как **x**. Тогда **против** течения она плывёт со скоростью **x – 4** км/ч, а **по** течению **x + 4** км/ч.



Обратный путь занял на 2 часа меньше. Приравняем время, вычтя из обратного времени 2.

$$\frac{77}{x+4} = \frac{77}{x-4} - 2$$

$$\frac{77}{x+4} - \frac{77}{x-4} + 2 = 0$$

$$\frac{77(x-4) - 77(x+4) + 2(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-4)} = 0$$

$$77(x-4) - 77(x+4) + 2(x+4)(x-4) = 0 \text{ при } x \neq -4 \text{ и } x \neq 4$$

$$77x - 308 - 77x - 308 + 2(x^2 - 16) = 0$$

$$-616 + 2x^2 - 32 = 0$$

$$2x^2 = 648$$

$$x^2 = 324$$

$$x = -18 \text{ или } x = 18$$

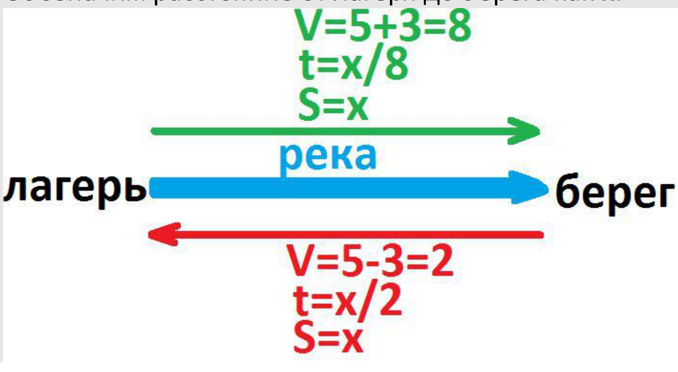
Скорость не может быть отрицательной. Поэтому скорость равна 18 км/ч.

Ответ: 18.

ПРИМЕР №15

Туристы проплыли на лодке от лагеря некоторое расстояние вверх по течению реки, затем причалили к берегу и, погуляв 3 часа, вернулись обратно через 7 часов от начала путешествия. На какое расстояние от лагеря они отплыли, если скорость течения реки равна 3 км/ч, а собственная скорость лодки 5 км/ч?

Обозначим расстояние от лагеря до берега как **x**.



Вернулись они через 7 часов. Из них 3 часа гуляли. Значит, **в пути они провели** 7 – 3 = **4 часа**.

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{2}=4$$

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{2}-4=0$$

$$\frac{x+4x-32}{8}=0$$

$$x+4x-32=0$$

$$5x=32$$

$$x=\frac{32}{5}=6,4$$

Ответ: 6,4 км.

ПРИМЕР №16

Расстояние между пристанями А и В равно 60 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в пункт А. К этому времени плот прошёл 36 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Обозначим скорость лодки в неподвижной воде как **x**.
Заметим, что скорость плота равна скорости течения реки. Раз плот за 4 прошёл 36 км, то на это он потратил **9 часов** (36 : 4 = 9).

Раз лодка выехала на час раньше, то всего она в пути была 8 часов (9 – 1 = 8).

$$\frac{60}{x+4}+\frac{60}{x-4}=8$$

$$\frac{60}{x+4}+\frac{60}{x-4}-8=0$$

$$\frac{60(x-4)+60(x+4)-8(x-4)(x+4)}{(x+4)(x-4)}=0$$

$$60(x-4)+60(x+4)-8(x-4)(x+4)=0 \text{ при } x \neq -4 \text{ и } x \neq 4$$

$$60x-240+60x+240-8(x-4)(x+4)=0$$

$$120x-8(x^2-16)=0$$

$$15x-(x^2-16)=0$$

$$15x-x^2+16=0$$

$$x^2-15x-16=0$$

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2-4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1}=\frac{15 \pm 17}{2}}$$

x_1 = -1 и x_2 = 16

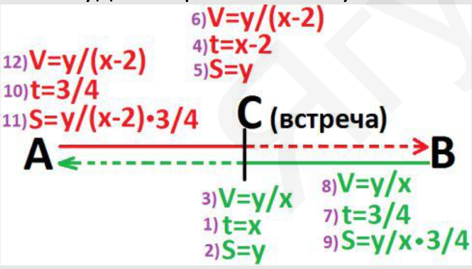
Скорость лодки не может быть отрицательный, поэтому её скорость равна 16 км/ч.

Ответ: 16 км/ч.

ПРИМЕР №17

Из городов А и В навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в В на 2 часа раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 45 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из В в А велосипедист?

Обозначим **путь велосипедиста из В в А** как **x**. Также обозначим **всё расстояние** как **y**.
Не забудем перевести минуты в часы: 45 минут = 3/4 часа.



AB = AC + CB

Сложим расстояния:

$$y=\frac{3}{4} \cdot \frac{y}{x-2}+\frac{3}{4} \cdot \frac{y}{x}$$

$$y=\frac{3y}{4(x-2)}+\frac{3y}{4x}$$

Разделим обе части уравнения на **y**:

$$1=\frac{3}{4(x-2)}+\frac{3}{4x}$$

$$\frac{}{4(x-2)}+\frac{}{4x}-1=0$$

$$\frac{3x+3(x-2)-4x(x-2)}{4x(x-2)}=0$$

$$3x+3(x-2)-4x(x-2)=0 \text{ при } x\neq 2$$

$$3x+3x-6-4x^2+8x=0$$

$$-4x^2+14x-6=0$$

$$2x^2-7x+3=0$$

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm 5}{4}}$$

x_1 = 0,5 и x_2 = 3

Велосипедист не мог проехать всё расстояние за 0,5 часа (30 минут), т.к. до места встречи он ехал уже 45 минут. Поэтому правильный ответ – 3 часа.

Ответ: 3 часа.