

ЗАДАНИЕ 21. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

УРАВНЕНИЯ

При решении уравнений обычно нужно:

1) Перенести все значения в левую часть уравнения

2) Найти повторяющиеся значения:
х, выражение в скобках или даже два выражения в скобках

3) Вынести повторяющееся значение за скобку

4) Приравнять все множители к нулю

Повторение:

Корни квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ находятся по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ФОРМУЛА	ПРИМЕР
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$11^2 - 6x^2 = (11-6x)(11+6x)$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(5-x)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + x^2$

ПРИМЕР №1

Решите уравнение $x^3 = 4x^2 + 5x$

1) Переносим все значения в левую часть уравнения:

$$x^3 - 4x^2 - 5x = 0$$

2) Видим, что у каждого значения есть общее – это x .

3) Выносим x за скобку:

$$x(x^2 - 4x - 5) = 0$$

4) Приравняем оба множителя к нулю.

4.1) $x = 0$

4.2) $x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3$$

$x_1 = 5$ и $x_2 = -1$.

Ответ: -1; 0; 5.

ПРИМЕР №2

Решите уравнение $(x + 7)^3 = 49(x + 7)$

1) Переносим все значения в левую часть уравнения:

$$(x + 7)^3 - 49(x + 7) = 0$$

2) Видим, что повторяется $(x + 7)$.

3) Выносим $(x + 7)$ за скобку:

$$(x + 7)((x + 7)^2 - 49) = 0$$

4) Приравняем оба множителя к нулю.

$$4.1) x + 7 = 0$$

$$x = -7$$

$$4.2) (x + 7)^2 - 49 = 0$$

Применим формулу сокращённого умножения:

$$(x + 7)^2 - 7^2 = 0$$

$$(x + 7 - 7)(x + 7 + 7) = 0$$

$$x(x + 14) = 0$$

Далее опять приравняем оба множителя к нулю:

$$4.2.1) x = 0$$

$$4.2.2) x + 14 = 0$$

$$x = -14$$

Ответ: -14; -7; 0.

ПРИМЕР №3

Решите уравнение $x^3 + x^2 = 9x + 9$.

1) Переносим все значения в левую часть уравнения:

$$x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$$

2) Видим, что у первых двух значений есть общее – это x^2 . У вторых двух значений тоже есть общее – это -9.

3.1) Выносим x^2 и -9 за скобку:

$$x^2(x + 1) - 9(x + 1) = 0$$

3.2) Видим, что $(x + 1)$ тоже можно вынести за скобку:

$$(x + 1)(x^2 - 9) = 0$$

4) Приравняем оба множителя к нулю.

$$4.1) x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$4.2) x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 - 3^2 = 0$$

Применим формулу сокращённого умножения:

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

Далее приравняем оба множителя к нулю:

$$4.2.1) x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$4.2.2) x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Ответ: -3; -1; 3.

ПРИМЕР №4

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

1) Все значения уже стоят в левой части уравнения.

2) Видим, что у $3x^2$ и -3 общее – это 3. У x^3 и $-x$ тоже есть общее – это x .

$$\text{Группируем: } (x^3 - x) + (3x^2 - 3) = 0$$

3.1) Выносим x и 3 за скобку:

$$x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1) = 0$$

3.2) Видим, что $(x^2 - 1)$ тоже можно вынести за скобку:

$$(x^2 - 1)(x + 3) = 0$$

4) Приравняем оба множителя к нулю.

$$4.1) x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 - 1^2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 1) = 0$$

Приравняем оба множителя к нулю:

$$4.1.1) x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$4.1.2) x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$4.2) x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Ответ: -3; -1; 1.

ПРИМЕР №5

Решите уравнение $(x - 2)(x - 3)(x - 4) = (x - 2)(x - 3)(x - 5)$

1) Переносим все значения в левую часть уравнения:

$$(x - 2)(x - 3)(x - 4) - (x - 2)(x - 3)(x - 5) = 0$$

2) Видим, что $(x - 2)(x - 3)$ повторяется два раза.

3) Выносим $(x - 2)(x - 3)$ за скобку:

$$(x - 2)(x - 3)((x - 4) - (x - 5)) = 0$$

4) Приравняем все множители к нулю:

$$4.1) x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$4.2) x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$4.3) (x - 4) - (x - 5) = 0$$

$$x - 4 - x + 5 = 0$$

$$1 = 0$$

нет корней

Ответ: 2; 3.

ПРИМЕР №6

Решите уравнение $x(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)$

1) Переносим все значения в левую часть уравнения:

$$x(x^2 + 2x + 1) - 2(x + 1) = 0$$

2) Обращаем внимание, что $x^2 + 2x + 1$ — это формула сокращённого умножения.

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Выполним преобразование:

$$x(x + 1)^2 - 2(x + 1) = 0$$

Видим, что $(x + 1)$ повторяется.

3) Выносим $(x + 1)$ за скобку:

$$(x + 1)(x(x + 1) - 2) = 0$$

4) Приравняем оба множителя к нулю:

$$4.1) x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$4.2) x(x + 1) - 2 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -2 \text{ и } x_2 = 1$$

Ответ: -2; -1; 1.

ПРИМЕР №7

Решите уравнение $(x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 4(x + 2)$

1) Переносим все значения в левую часть уравнения:

$$(x - 1)(x^2 + 4x + 4) - 4(x + 2) = 0$$

2) Обращаем внимание, что $x^2 + 4x + 4$ — это формула сокращённого умножения.

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2.$$

Выполним преобразование:

$$(x - 1)(x + 2)^2 - 4(x + 2) = 0$$

Видим, что $(x + 2)$ повторяется.

3) Выносим $(x + 2)$ за скобку:

$$(x + 2)((x - 1)(x + 2) - 4) = 0$$

4) Приравняем оба множителя к нулю:

$$4.1) x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

$$4.2) (x - 1)(x + 2) - 4 = 0$$

$$x^2 - x + 2x - 2 - 4 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = -3 \text{ и } x_2 = 2$$

Ответ: -3; -2; 2.

Ягубов.РФ

Выражение в квадрате + Выражение в квадрате = 0. Как решать?

Если встретилось задания, вида $a^2 + b^2 = 0$ (т.е. когда сумма двух квадратов равна нулю), то нужно понимать следующее:

Квадрат никогда не может быть отрицательным. Он или равен нулю, или больше нуля. Но если хотя бы один из двух квадратов больше нуля, то сумма никак не получится равной нулю.

Поэтому **если сумма двух квадратов равна нулю, то каждый из двух квадратов должен быть равен нулю**: $a^2 = 0$ и $b^2 = 0$

Пример:

$$(x^2 - 25)^2 + (x^2 + 3x - 10)^2 = 0$$

Такое уравнение преобразуется в систему:

$$\begin{cases} (x^2 - 25)^2 = 0 \\ (x^2 + 3x - 10)^2 = 0 \end{cases}$$

Решением системы являются НЕ ВСЕ корни, а те, которые подойдут **и** к первому уравнению, **и** ко второму.

ПРИМЕР №1

Решите уравнение $(x^2 - 25)^2 + (x^2 + 3x - 10)^2 = 0$

Квадрат никогда не может быть отрицательным. Он или равен нулю, или больше нуля. Но если хотя бы один из двух квадратов больше нуля, то сумма никак не получится равной нулю.

Поэтому **если сумма двух квадратов равна нулю, то каждый из двух квадратов должен быть равен нулю**:

$$\begin{cases} (x^2 - 25)^2 = 0 \\ (x^2 + 3x - 10)^2 = 0 \end{cases}$$

Решением системы являются НЕ ВСЕ корни, а те, которые подойдут **и** к первому уравнению, **и** ко второму.

Решим первое уравнение системы.

$$(x^2 - 25)^2 = 0$$

$$x^2 - 25 = 0$$

Применяем формулу сокращённого умножения:

$$(x - 5)(x + 5) = 0$$

Приравниваем оба множителя к нулю.

$$1.1) x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$1.2) x + 5 = 0$$

$$x = -5$$

Решим второе уравнение системы.

$$(x^2 + 3x - 10)^2 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = -5 \text{ и } x_2 = 2$$

И первому, и второму уравнению системы удовлетворяет только корень $x = -5$.

Ответ: -5.

Ягубов.РФ

ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ

При решении уравнений и неравенств часто требуется найти **область допустимых значений (ОДЗ)**:

- 1) Знаменатель дроби не может быть равен нулю
- 2) Выражение под корнем не может быть отрицательным

ПРИМЕР №1

Решите уравнение $\frac{2x^2+7x+3}{x^2-9} = 1$

Область допустимых значений (ОДЗ)

Знаменатель дроби не может быть равен нулю.

$$x^2 - 9 \neq 0$$

$$x^2 - 3^2 \neq 0$$

Применяем формулу сокращённого умножения:

$$(x - 3)(x + 3) \neq 0$$

$$1.1) x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$1.2) x + 3 \neq 0$$

$$x \neq -3$$

Решение уравнения

2) Перемещаем единицу в правую часть уравнения:

$$\frac{2x^2 + 7x + 3}{x^2 - 9} - 1 = 0$$

3) Приводим единицу к общему знаменателю ($x^2 - 9$). При этом перед единицей стоит минус, поэтому знаки меняются на противоположные.

$$\frac{2x^2 + 7x + 3 - x^2 + 9}{x^2 - 9} = 0$$

4) Приравняем числитель к нулю:

$$2x^2 + 7x + 3 - x^2 + 9 = 0$$

5) Упрощаем:

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

6) Решаем квадратное уравнение

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = -4 \text{ и } x_2 = -3$$

Однако в **ОДЗ** мы отметили, что $x_2 = -3$ не может быть корнем уравнения. Поэтому единственный корень — $x_1 = -4$.

Ответ: -4.

ПРИМЕР №2

Решите уравнение $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 3 = 0$

Область допустимых значений (ОДЗ)

Знаменатель дроби не может быть равен нулю.

1.1) $x^2 \neq 0$

1.2) $x \neq 0$

Решение уравнения

2) Приводим все значения к общему знаменателю (x^2):

$$\frac{1 + 2x - 3x^2}{x^2} = 0$$

3) Приравняем числитель к нулю:

$$1 + 2x - 3x^2 = 0$$

4) Решаем квадратное уравнение

$$-3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-2 \pm 4}{-6} = \frac{-1 \pm 2}{-3}$$

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -\frac{1}{3}$$

Полученные ответы удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $-\frac{1}{3}; 1$.

ПРИМЕР №3

Решите уравнение $x^2 - 6x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 7$

Область допустимых значений (ОДЗ)

Выражение под корнем не может быть отрицательным

1) $6 - x \geq 0$

$x \leq 6$

Решение уравнения

2) Переносим всё в левую часть уравнения:

$$x^2 - 6x + \sqrt{6-x} - \sqrt{6-x} - 7 = 0$$

3) Упрощаем:

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

3) Решаем квадратное уравнение.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 8}{2} = 3 \pm 4$$

$$x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 7$$

Однако в ОДЗ мы отметили, что $x \leq 6$. Поэтому $x_2 = 7$ не может быть корнем уравнения.

Единственный корень — $x_1 = -1$.

Ответ: -1.

ВВЕДЕНИЕ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ПРИМЕР №1

Решите уравнение $(x + 2)^4 - 4(x + 2)^2 - 5 = 0$

1) Введём новую переменную

Пусть $(x + 2)^2 = t$. Тогда исходное уравнение примет вид:

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

2) Решаем получившееся уравнение:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3$$

$t_1 = 5$ и $t_2 = -1$

3) Делаем обратное преобразование из t в $(x + 2)^2$:

3.1) $(x + 2)^2 = 5$

$$x^2 + 4x + 4 = 5$$

$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

$x_1 = -2 - \sqrt{5}$ и $x_2 = -2 + \sqrt{5}$

3.2) $(x + 2)^2 = -1$

Квадрат не может быть отрицательным. Корней нет.

Ответ: $-2 - \sqrt{5}$; $-2 + \sqrt{5}$.

СТЕПЕНЬ РАВНА СТЕПЕНИ

Сокращая степень, её нельзя делить на чётное (2, 4, 6...) число! Можно делить только на нечётное (3, 5, 7...).

ПРИМЕР №1

Решите уравнение $x^4 = (x - 20)^2$

Сократить степени нельзя (т.к. степень нельзя делить на чётное число).

1) Перенесём всё в левую часть уравнения.

$$x^4 - (x - 20)^2 = 0$$

2) Здесь можно применить формулу сокращённого умножения.

$$(x^2 - x + 20)(x^2 + x - 20) = 0$$

3) Приравняем оба множителя к нулю.

$$3.1) x^2 - x + 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-79}}{2}$$

Корней нет, т.к. корень из отрицательного числа извлечь нельзя.

$$3.2) x^2 + x - 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

$$x_1 = -5 \text{ и } x_2 = 4$$

Ответ: -5; 4.

ПРИМЕР №2

Решите уравнение $x^6 = (7x - 6)^3$

Можно сократить степень на 3 (т.к. это нечётное число).

1) Делим степень на 3.

$$x^2 = 7x - 6$$

2) Переносим всё в левую часть уравнения.

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

3) Решаем квадратное уравнение.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

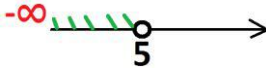
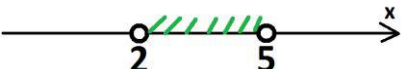
$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 6$$

Ответ: 1; 6.

КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА (x^2)

Повторение. Что обозначают различные символы?

НАЗВАНИЕ	СИМВОЛЫ	ЗНАЧЕНИЕ	ПРИМЕР
Плюс бесконечность	$+\infty$	Все числа, которые расположены правее самой правой точки на прямой.	 $(5; +\infty)$
Минус бесконечность	$-\infty$	Все числа, которые расположены левее самой левой точки на прямой.	 $(-\infty; 5)$
Знак больше	$>$	Выражение слева больше выражения справа	$4 > 2$
Знак больше или равно	$\geq$	Выражение слева больше или равно ему	$x \geq 4$
Знак меньше	$<$	Выражение слева меньше выражения справа	$1 < 3$
Знак меньше или равно	$\leq$	Выражение слева меньше или равно ему	$x \leq 5$
Квадратные скобки	$[\text{ и }]$	Эти числа входят в заданный промежуток	$[5; 9]$ – в промежуток входят числа 5, 9 и всё, что стоит между ними
Круглые скобки	(и)	Эти числа НЕ входят в заданный промежуток	$(2; 5)$ – в промежуток входит всё, что стоит между числами 2 и 5, но сами числа 2 и 5 не входят в промежуток
Закрашенные точки на прямой	$\bullet$	Эти числа входят в заданный промежуток	
Незакрашенные точки на прямой	$\circ$	Эти числа НЕ входят в заданный промежуток	
Система неравенств	$\{$	Числа, которые удовлетворяют как первому, так и второму неравенству	$\begin{cases} x > 1 \\ x < 9 \end{cases}$
Подковка (объединение множеств)	$\cup$	Числа, которые входят в первый промежуток и числа, которые входят во второй промежуток	$(1; 5) \cup (12; 15)$

КАК РЕШАТЬ КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА?

Для решения квадратных неравенств нужно:

- 1) Найти корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c$ (пример: $2x^2 - x - 1$)
- 2) Представить квадратное уравнение в виде $a(x - x_1)(x - x_2)$, где вместо a должно стоять число, а вместо x_1 и x_2 – корни уравнения (пример: $2(x - 1)(x + 0,5)$)
- 3) Начертить прямую и отметить на ней точки x_1 и x_2 .
- 4) Получится три промежутка. Взять по одной точке в каждом промежутке для проверки знака (+ или -).
- 5) В ответе получится промежуток, знак которого совпадает со знаком в неравенстве.

ПРИМЕР №1

Решите неравенство $\frac{-12}{x^2-7x-8} \leq 0$

1) Находим корни квадратного уравнения $x^2 - 7x - 8$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

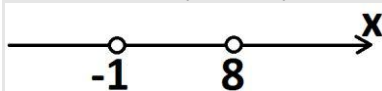
$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 9}{2}$$

$x_1 = -1$ и $x_2 = 8$

2) Представляем квадратное уравнение в виде $a(x - x_1)(x - x_2)$:

$$\frac{-12}{(x+1)(x-8)} \leq 0$$

3) Чертим прямую и отмечаем на ней точки -1 и 8. Обращаем внимание, что знаменатель не может быть равен нулю, поэтому точки -1 и 8 не закрашиваем.



4) У нас получилось три промежутка:

1. $(-\infty; -1)$
2. $(-1; 8)$
3. $(8; +\infty)$

Теперь нужно найти промежутки, где выражение меньше нуля. Для этого подставим по одной

точке из каждого промежутка в неравенство $\frac{-12}{(x+1)(x-8)} \leq 0$.

1. Пусть $x = -2$.
2. Пусть $x = 0$.
3. Пусть $x = 9$.

$$1. \frac{-12}{(-2+1)(-2-8)} \leq 0$$

$$\frac{-12}{-1 \cdot (-10)} \leq 0$$

$-1,2 \leq 0$. ВЕРНО

$$2. \frac{-12}{(0+1)(0-8)} \leq 0$$

$$\frac{-12}{1 \cdot (-8)} \leq 0$$

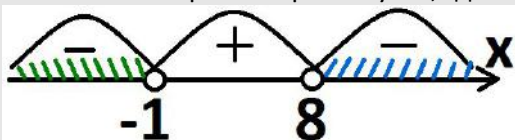
$1,5 \leq 0$. НЕВЕРНО

$$3. \frac{-12}{(9+1)(9-8)} \leq 0$$

$$\frac{-12}{10 \cdot 1} \leq 0$$

$-1,2 \leq 0$. ВЕРНО

5) В ответе получается промежуток, знак которого совпадает со знаком в неравенстве. Отмечаем на прямой промежутки, где неравенство **ВЕРНО**.



(P.S. Плюсом отмечено, где выражение положительно, а минусами – где отрицательно. Нам нужно найти промежутки, где выражение меньше нуля, поэтому закрашены промежутки с минусом).

Получился ответ $(-\infty; -1) \cup (8; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (8; +\infty)$.

ПРИМЕР №2

Решите неравенство $x^2(-x^2 - 9) \leq 9(-x^2 - 9)$

1) Перенесём всё в левую часть уравнения:

$$x^2(-x^2 - 9) - 9(-x^2 - 9) \leq 0$$

2) Вынесем $(-x^2 - 9)$ за скобку:

$$(-x^2 - 9)(x^2 - 9) \leq 0$$

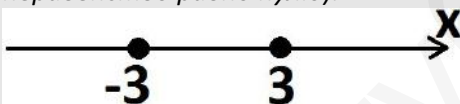
3) Рассмотрим выражение $(-x^2 - 9)$. x^2 всегда ≥ 0 , поэтому $(-x^2 - 9)$ **всегда отрицательный**. Значит, чтобы выполнялось неравенство $(-x^2 - 9)(x^2 - 9) \leq 0$, $(x^2 - 9)$ **должно быть ≥ 0** .

4) $x^2 - 9 \geq 0$

По формуле сокращённого умножения:

$$(x - 3)(x + 3) \geq 0$$

5) Чертим прямую и отмечаем на ней точки -3 и 3. Обращаем внимание, что точки -3 и 3 нужно закрасить, потому что они тоже являются решением неравенства (в таком случае неравенство равно нулю).



6) У нас получилось три промежутка:

1. $(-\infty; -3]$

2. $[-3; 3]$

3. $[3; +\infty)$

Теперь нужно найти промежутки, где выражение ≥ 0 . Для этого подставим по одной точке из каждого промежутка в неравенство $(x - 3)(x + 3) \geq 0$.

1. Пусть $x = -4$.

2. Пусть $x = 0$.

3. Пусть $x = 5$.

1. $(-4 - 3)(-4 + 3) \geq 0$

$$-7 \cdot (-1) \geq 0$$

$$7 \geq 0. \text{ ВЕРНО}$$

2. $(0 - 3)(0 + 3) \geq 0$

$$-3 \cdot 3 \geq 0$$

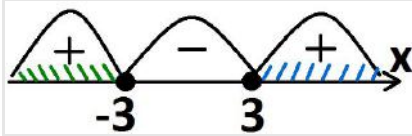
$$-9 \geq 0. \text{ НЕВЕРНО}$$

3. $(5 - 3)(5 + 3) \geq 0$

$$2 \cdot 8 \geq 0$$

16 ≥ 0. ВЕРНО

7) В ответе получается промежуток, знак которого совпадает со знаком в неравенстве. Отмечаем на прямой промежутки, где неравенство **ВЕРНО**.



(P.S. Плюсами отмечено, где выражение положительно, а минусом – где отрицательно. Нам нужно найти промежутки, где выражение больше нуля или равно нулю, поэтому закрашены промежутки с плюсом).

Получился ответ $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$$

Что с ней можно сделать?

1. Можно выразить x через y или наоборот и **подставить** в одно из уравнений системы:

$$\begin{cases} x = 1 - 2y \\ (1 - 2y) - 3y = 3 \end{cases}$$

2. Можно **сложить** одно уравнение с другим **или вычесть** одно уравнение из другого.

Попробуем вычесть одно уравнение из другого:

$$\begin{cases} -y = -2 \\ * \text{любое из двух уравнений} * \end{cases}$$

3. Можно **умножить или разделить** одно уравнение на другое одно уравнение из другого.

Попробуем разделить первое уравнение на второе:

$$\begin{cases} 1 + \frac{2y}{3} = \frac{1}{3} \\ * \text{любое из двух уравнений} * \end{cases}$$

Можно использовать любой метод – **какой больше подойдёт в конкретном примере**. Чаще всего используется способ №1 (подстановка) и способ №2 (сложение/вычитание).

ПРИМЕР №1

Решите систему уравнений x

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 4, \\ 2x^2 - y = 1. \end{cases}$$

Применим метод сложения. А на второй строчке возьмём, например, второе уравнение.

$$\begin{cases} 5x^2 = 5, \\ 2x^2 - y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 1, \\ 2 \cdot 1 - y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 1); (1; 1)$

ПРИМЕР №2

Решите систему уравнений x

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11, \\ 4x^2 + 6y^2 = 11x. \end{cases}$$

Домножим обе части первого уравнения на 2, чтобы потом вычесть из первого уравнения второе.

$$\begin{cases} 4x^2 + 6y^2 = 22, \\ 4x^2 + 6y^2 = 11x. \end{cases}$$

Применим метод вычитания. А на второй строчке возьмём, например, второе уравнение.

$$\begin{cases} 0 = 22 - 11x, \\ 4x^2 + 6y^2 = 11x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ 4 \cdot 2^2 + 6y^2 = 11 \cdot 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (2; -1); (2; 1)

ПРИМЕР №3

Решите систему уравнений x

$$\begin{cases} (2x + 3)^2 = 5y, \\ (3x + 2)^2 = 5y. \end{cases}$$

Применим метод вычитания. А на второй строчке возьмём, например, первое уравнение.

$$\begin{cases} (2x + 3)^2 - (3x + 2)^2 = 0, \\ (2x + 3)^2 = 5y. \end{cases}$$

Раскроем скобки по формуле сокращённого умножения в первом уравнении.

$$\begin{cases} -(3x + 2)^2 = 0, \\ (2x + 3)^2 = 5y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: (2; -1); (2; 1)

ПРИМЕР №4

Решите систему уравнений x

$$\begin{cases} (x - 6)(y - 7) = 0, \\ \frac{y - 4}{x + y - 10} = 3. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. Когда произведение равно нулю? Когда один из множителей равен нулю. Поэтому рассмотрим две системы – в одной $x = 6$, а в другой $y = 7$.

$$\begin{cases} x = 6, \\ \frac{y-4}{6+y-10} = 3. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 7, \\ \frac{7-4}{x+7-10} = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6, \\ \frac{y-4}{y-4} = 3. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 7, \\ \frac{3}{x-3} = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6, \\ 1 = 3. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 7, \\ x = 4. \end{cases}$$

В первой системе корней нет, т.к. $1 \neq 3$.

Ответ: (4; 7).

ПРИМЕР №4

Решите систему неравенств x

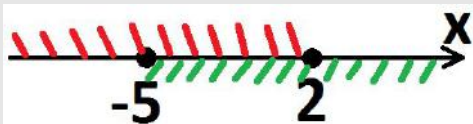
$$\begin{cases} \frac{2-x}{2+(3-x)^2} \geq 0, \\ 6-9x \leq 31-4x. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. Квадрат никогда не может быть отрицательным. Поэтому $2 + (3 - x)^2$ **всегда больше нуля**. Поэтому, чтобы выполнялось неравенство, $2 - x$ должно быть больше нуля или равно нулю.

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0, \\ -5x \leq 25. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq -5. \end{cases}$$

Обозначим на прямой решение системы.



Штриховка первого неравенства пересекается со штриховкой второго неравенства на промежутке $[-5; 2]$.

Ответ: $[-5; 2]$.

СТЕПЕНИ

СВОЙСТВО	ПРИМЕР
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$
$a^n : a^m = a^{n-m}$	$3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(5^2)^4 = 5^{2 \cdot 4} = 5^8$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{4^2}{2^2} = \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$a^1 = a$	$12^1 = 12$
$a^0 = 1$	$358^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^1$

Также нужно знать такое свойство:

$$3^{2n+1} = 3 \cdot 3^{2n}$$

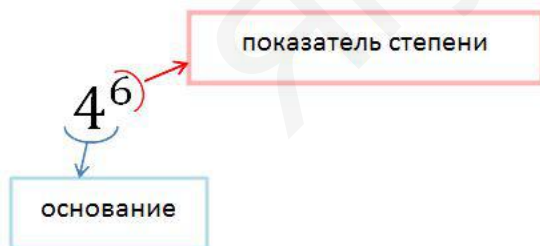
$$4^{5n+3} = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4^{5n}$$

$$2^{4n-1} = \frac{2^{4n}}{2}$$

$$5^{6n-2} = \frac{5^{6n}}{5 \cdot 5}$$

Если в показателе степени стоит какое-то число с **плюсом** (+1, +2, +3 и т.д.), то это значит, что это число можно отбросить, **умножив** всю степень на основание столько раз, какое число указано с плюсом.

Если в показателе степени стоит какое-то число с **минусом** (-1, -2, -3 и т.д.), то это значит, что это число можно отбросить, **разделив** всю степень на основание столько раз, какое число указано с минусом.



ПРИМЕР №1

Сократите дробь

$$\frac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^4}$$

Для начала раскроем скобки, а затем применим свойство $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

$$\frac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^4} = \frac{27x^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10+4} \cdot 2} = \frac{27x^{3-9}}{2x^{-6}} = \frac{27x^{-6}}{2x^{-6}} = \frac{27}{2} = 13,5$$

Ответ: 13,5.

ПРИМЕР №2

Сократите дробь

$$\frac{18^n}{3^{2n-1} \cdot 2^{n-2}}$$

Начнём с преобразования знаменателя, убрав минусы в показателя степени:

$$\frac{18^n}{\frac{3^{2n}}{3} \cdot \frac{2^n}{2 \cdot 2}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 18^n}{3^{2n} \cdot 2^n} = \frac{12 \cdot 18^n}{9^n \cdot 2^n} = \frac{12 \cdot 18^n}{18^n} = 12$$

Ответ: 12.

ЯГубов.РФ

ПОИСК ЗНАЧЕНИЯ ВЫРАЖЕНИЯ

ПРИМЕР №1

Найдите значение выражения

$$(a^3 - 16a) \cdot \left(\frac{1}{a+4} - \frac{1}{a-4} \right) \text{ при } a = -45.$$

В первой скобке вынесем за скобку a , а во второй скобке приведём дроби к общему знаменателю.

$$a(a^2 - 16) \cdot \frac{a - 4 - (a + 4)}{(a + 4)(a - 4)} = a(a - 4)(a + 4) \cdot \frac{a - 4 - a - 4}{(a + 4)(a - 4)} =$$

$$\frac{-8a(a - 4)(a + 4)}{(a + 4)(a - 4)} = -8a = -8 \cdot (-45) = 360$$

Ответ: 360.

ПРИМЕР №2

Найдите $f(3)$, если $f(x - 1) = 7^{6-x}$.

Как из $f(x - 1)$ сделать $f(3)$? Нужно вместо x подставить число 4.

$$f(4 - 1) = f(3) = 7^{6-4} = 7^2 = 49$$

Ответ: 49.

ПРИМЕР №3

Найдите $\frac{p(a)}{p(6-a)}$, если $p(a) = \frac{a(6-a)}{a-3}$

$p(a)$ нам уже известно. Как найти $p(6 - a)$? Подставлять $(6 - a)$ вместо a :

$$p(6 - a) = \frac{(6 - a)(6 - (6 - a))}{(6 - a) - 3} = \frac{(6 - a)(6 - 6 + a)}{3 - a} = \frac{a(6 - a)}{3 - a}$$

Теперь найдём $\frac{p(a)}{p(6-a)}$:

$$\frac{a(6 - a)}{a - 3} : \frac{a(6 - a)}{3 - a} = \frac{a(6 - a)}{a - 3} \cdot \frac{3 - a}{a(6 - a)} = \frac{3 - a}{a - 3}$$

Далее упростим выражения, вынеся в числителе минус за скобку:

$$\frac{3 - a}{a - 3} = \frac{-(-3 + a)}{a - 3} = -\frac{(a - 3)}{a - 3} = -1$$

Ответ: -1.