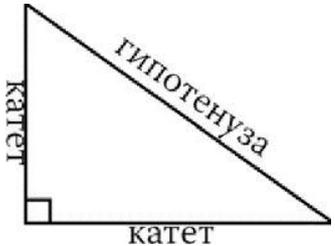


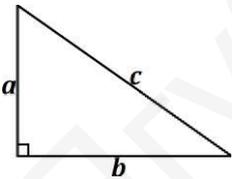
ЗАДАНИЕ 9. ТРЕУГОЛЬНИК, ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Базовые понятия и формулы

РИСУНОК

У прямоугольного треугольника один угол прямой (т.е. равен 90°). К прямому углу прилегает два катета .

СИНУС	КОСИНУС
$\sin = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$	$\cos = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$
ТАНГЕНС	КОТАНГЕНС
$tg = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$	$ctg = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА
$c^2 = a^2 + b^2$

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Используется, когда известны две стороны <u>прямоугольного</u> треугольника и нужно найти третью сторону.

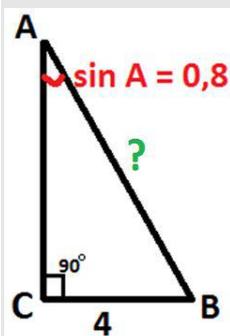
СУММА УГЛОВ
Сумма углов треугольника равна 180°

СООТНОШЕНИЕ СТОРОН
В любом треугольнике: <ul style="list-style-type: none">• против большей стороны лежит больший угол• против меньшей стороны лежит меньший угол


ПРИМЕР №1

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 4$, $\sin A = 0,8$. Найдите AB.

Отобразим на рисунке всё, что дано в условии.



$$\sin = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

Для угла A:

AC – прилежащий катет

BC – противолежащий катет

AB – гипотенуза

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

Подставим значения из условия:

$$0,8 = \frac{4}{AB}$$

Далее нужно сделать вычисления. Один из способов решения такого выражения – **умножить обе части уравнения на AB** (чтобы избавиться от AB в знаменателе в правой части выражения).

$$0,8 \cdot AB = 4$$

Далее **делим обе части уравнения на 0,8**:

$$AB = \frac{4}{0,8}$$

$$AB = 5$$

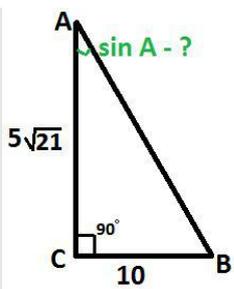
Ответ: 5.

По аналогии решаются и задачи с **косинусом (cos)**, **тангенсом (tg)**, **котангенсом (ctg)**: нужно **взять формулу** cos, tg или ctg и **подставить** в неё имеющиеся значения.

ПРИМЕР №2

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 5\sqrt{21}$, $BC = 10$. Найдите $\sin A$.

Отобразим на рисунке всё, что дано в условии.



$$\sin = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

Для угла A:

AC – прилежащий катет

BC – противолежащий катет

AB – гипотенуза

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

Необходимо найти гипотенузу AB. По **теореме Пифагора** квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = (5\sqrt{21})^2 + 10^2$$

$$AB^2 = (5\sqrt{21})^2 + 100$$

$$AB^2 = 25 \cdot 21 + 100$$

$$AB^2 = 525 + 100$$

$$AB^2 = 625$$

$$AB = \sqrt{625} = 25$$

Теперь можем найти синус угла:

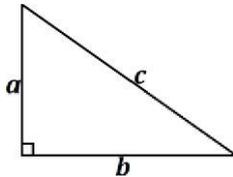
$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$$

Ответ: 0,4.

Задачи с площадью прямоугольного треугольника

ПЛОЩАДЬ

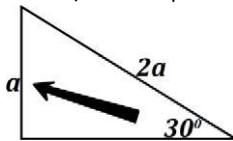
$$S = \frac{ab}{2}$$



Площадь треугольника равна половине произведения катетов.

КАТЕТ НАПРОТИВ УГЛА 30°

Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы.



РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Равнобедренный треугольник – треугольник, у которого две стороны равны и углы при основании равны.



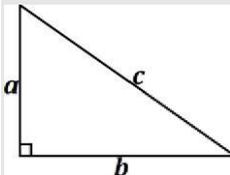
Также нужно знать, что **периметр** треугольника – это **сумма длин его сторон**.

ПРИМЕР №1

Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.

Площадь треугольника равна половине произведения катетов.

$$S = \frac{ab}{2}$$



Один катет нам известен, найдём второй катет по теореме Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$10^2 = 6^2 + b^2$$

$$100 = 36 + b^2$$

$$b^2 = 64$$

$$b = 8$$

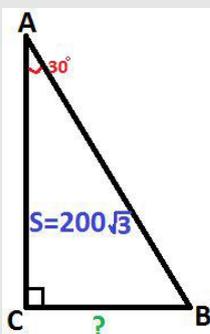
Теперь можно найти площадь треугольника:

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$$

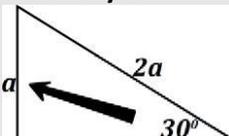
Ответ: 24.

ПРИМЕР №2

Площадь прямоугольного треугольника равна $200\sqrt{3}$. Один из острых углов равен 30° . Найдите длину катета, лежащего напротив этого угла.



Воспользуемся тем свойством, что **катет, лежащий напротив угла 30° , равен половине гипотенузы**.



Напротив угла A, который равен 30° , лежит сторона BC. Пусть **BC = x**, тогда по указанному выше свойству гипотенуза **AB = 2x**.

Выразим **AC** по теореме Пифагора:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$(2x)^2 = x^2 + AC^2$$

$$4x^2 - x^2 = AC^2$$

$$AC^2 = 3x^2$$

$$AC = x\sqrt{3}$$

Площадь треугольника равна половине произведения катетов:

$$S = \frac{AC \cdot BC}{2}$$

Подставим имеющиеся значения:

$$200\sqrt{3} = \frac{x \cdot x\sqrt{3}}{2}$$

Умножаем обе части уравнения на 2:

$$400\sqrt{3} = x \cdot x\sqrt{3}$$

$$400 = x \cdot x$$

$$x^2 = 400$$

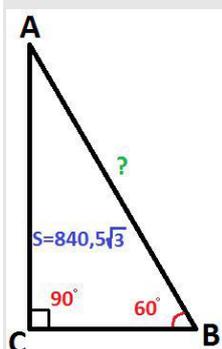
$$x = 20$$

$AC = x = 20$, это именно та сторона, которую нам нужно было найти.

Ответ: 20.

ПРИМЕР №3

Площадь прямоугольного треугольника равна $840,5\sqrt{3}$. Один из острых углов равен 60° . Найдите длину гипотенузы.



Сумма углов любого треугольника равна 180° . Поэтому, если у нас известны два угла ($\angle C$, $\angle B$), мы можем найти и третий ($\angle A$).

Треугольник прямоугольный, значит, один из углов ($\angle C$) равен 90° .

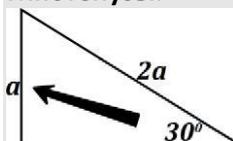
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$$

$$\angle A = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ$$

$$\angle A = 30^\circ$$

Воспользуемся тем свойством, что **катет, лежащий напротив угла 30° , равен половине гипотенузы**.



Пусть катет $BC = x$, тогда гипотенуза $AB = 2x$.

Выразим AC по теореме Пифагора:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$(2x)^2 = x^2 + AC^2$$

$$4x^2 - x^2 = AC^2$$

$$AC^2 = 3x^2$$

$$AC = x\sqrt{3}$$

Площадь треугольника равна половине произведения катетов:

$$S = \frac{AC \cdot BC}{2}$$

Подставим имеющиеся значения:

$$840,5\sqrt{3} = \frac{x \cdot x\sqrt{3}}{2}$$

Умножаем обе части уравнения на 2:

$$1681\sqrt{3} = x \cdot x\sqrt{3}$$

$$1681 = x \cdot x$$

$$x^2 = 1681$$

$$x = 41$$

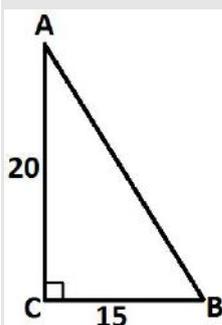
AC = x = 41, а нам нужно найти гипотенузу АВ, которая равна 2х.

$$AB = 41 \cdot 2 = 82.$$

Ответ: 82.

ПРИМЕР №4

Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 15. Найдите синус наименьшего угла этого треугольника.



Найдём гипотенузу АВ по теореме Пифагора:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$AB^2 = 15^2 + 20^2$$

$$AB^2 = 225 + 400$$

$$AB^2 = 625$$

$$AB = 25$$

По правилу наименьший угол лежит напротив наименьшей стороны, т.е. это $\angle A$.

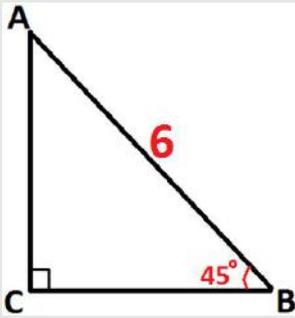
$$\sin = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$$

Ответ: 0,6.

ПРИМЕР №5

В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 6, а один из острых углов равен 45° . Найдите площадь треугольника.



Сумма углов любого треугольника равна 180° . Поэтому, если у нас известны два угла ($\angle C$, $\angle B$), мы можем найти и третий ($\angle A$).

Треугольник прямоугольный, значит, один из углов ($\angle C$) равен 90° .

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$$

$$\angle A = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ$$

$$\angle A = 45^\circ$$

Углы A и B равны, значит, треугольник равнобедренный. А в равнобедренном треугольнике две стороны равны. Гипотенуза не может быть равна катету, значит **катеты (AC и AB) равны между собой**.

Пусть $AC = x$, тогда $BC = x$ тоже.

По теореме Пифагора:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$6^2 = x^2 + x^2$$

$$36 = 2x^2$$

$$x^2 = 18$$

Площадь треугольника равна половине произведения катетов:

$$S = \frac{AC \cdot BC}{2}$$

Подставим имеющиеся значения:

$$S = \frac{x \cdot x}{2}$$

$$S = \frac{x^2}{2}$$

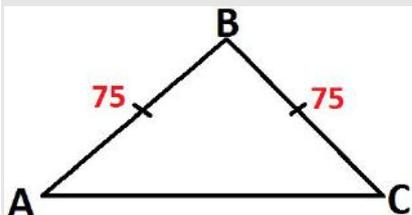
Мы уже вычислили, что $x^2 = 18$. Подставим это значение:

$$S = \frac{18}{2} = 9$$

Ответ: 9.

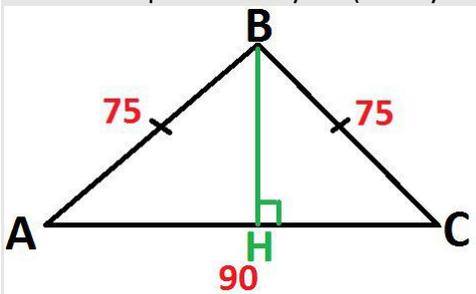
ПРИМЕР №6

Периметр равнобедренного треугольника равен 240, а боковая сторона – 75. Найдите площадь треугольника.



Треугольник равнобедренный, значит боковые стороны равны друг другу (75 и 75).
Периметр – это сумма всех сторон. Две стороны из трёх мы уже знаем (75 и 75); также нам известен периметр (240). Найдём третью сторону:
 $AC = 240 - 75 - 75 = 90$.

Также начертим высоту BH (она нужна для нахождения площади треугольника).



Треугольник равнобедренный, поэтому высота, проведённая к основанию, является также и медианой. Медиана делит сторону AC на два равных отрезка:
 $AH = HC = 90/2 = 45$

Найдём высоту BH по теореме Пифагора:

$$AB^2 = BH^2 + AH^2$$

$$75^2 = BH^2 + 45^2$$

$$BH^2 = 75^2 - 45^2$$

$$BH^2 = 5625 - 2025$$

$$BH^2 = 3600$$

$$BH = 60$$

Теперь можно найти площадь треугольника:

$$S = \frac{BH \cdot AC}{2} = \frac{60 \cdot 90}{2} = 2700$$

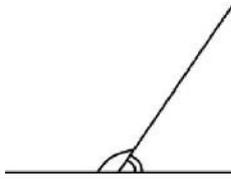
Ответ: 2800.

ЭЛЕМЕНТЫ И УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

В задачах на нахождение элементов и углов треугольника нужно использовать следующие свойства:

СМЕЖНЫЕ УГЛЫ

В сумме 180°



Разновидность смежных углов – **внутренний** и **внешний** угол треугольника.

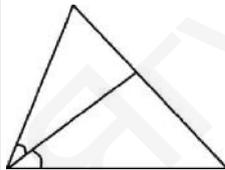


СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Сумма углов **треугольника** равна 180°

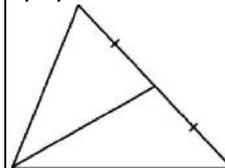
БИССЕКТРИСА

Биссектриса – луч, делящий угол пополам.



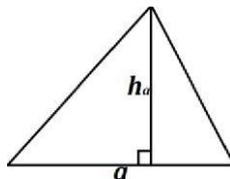
МЕДИАНА

Медиана – отрезок, делящий противоположную сторону треугольника пополам.



ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

$$S = \frac{1}{2}ah_a$$



Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

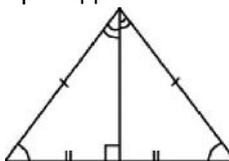
ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Равнобедренный треугольник – треугольник, у которого две стороны равны и углы при основании равны.



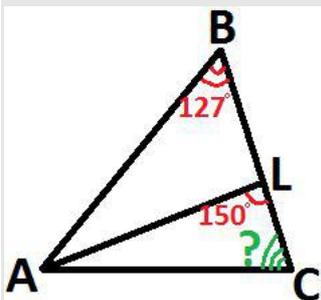
СВОЙСТВО

Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию, равны.

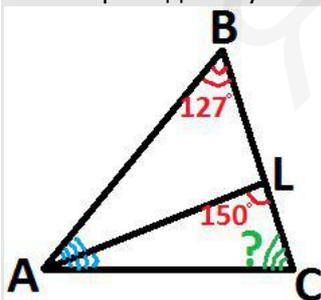


ПРИМЕР №1

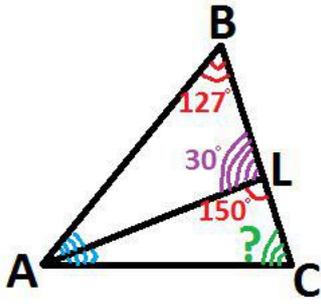
В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, угол ALC равен 150° , угол ABC равен 127° . Найдите угол ACB.



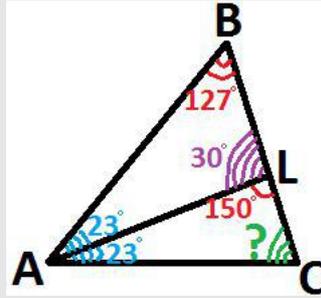
Биссектриса делит угол пополам. Значит, углы BAL и LAC равны:



Смежные углы в сумме составляют 180° . Поэтому угол BLC можно найти как разность 180° и угла ALC: $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.



В любом треугольнике сумма углов равна 180° . Поэтому угол $BAL = 180^\circ - 127^\circ - 30^\circ = 23^\circ$.
 LAC тоже равен 23° , т.к. BAL и LAC – углы, образованные биссектрисой.

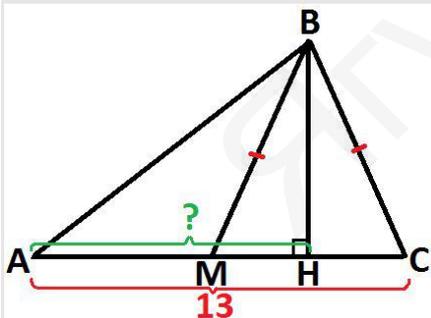


Теперь можно найти найти угол ACB . Опять воспользуемся тем, что в любом треугольнике сумма углов равна 180° .
 Значит, угол $ACB = 180^\circ - 150^\circ - 23^\circ = 7^\circ$

Ответ: 7.

ПРИМЕР №2

В треугольнике ABC BM – медиана и BH – высота. Известно, что $AC = 13$ и $BC = BM$. Найдите AH .



На рисунке видно, что $AH = AM + MH$.

Раз BM – медиана, то она делит AC на два равных отрезка.

$$AM = MC = 13/2 = 6,5.$$

AM мы нашли, осталось найти MH .

$BC = BM$, значит, **треугольник MBC – равнобедренный**. А в равнобедренном треугольнике **высота**, проведённая к основанию, **является также медианой** (и биссектрисой, но это не важно).

Медиана делит сторону на два равных отрезка. Значит, $MH = HC$.

Мы выяснили, что $MC = 6,5$.

$$\text{Значит, } MH = 6,5/2 = 3,25.$$

Итоговое вычисление:

$$AH = AM + MH = 6,5 + 3,25 = 9,75.$$

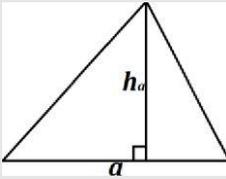
Ответ: 9,75.

ПРИМЕР №3

В треугольнике со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 4. Чему равна высота, проведённая ко второй высоте?

Такую задачу нужно решать через площадь треугольника. Площадь любого треугольника равна половине произведения стороны и высоты, проведённой к этой стороне:

$$S = \frac{1}{2}ah_a$$



Найдём площадь треугольника по первой стороне:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 18$$

С другой стороны, площадь треугольника можно вычислить и по второй стороне, т.к. треугольник у нас один и тот же, площадь одна и та же. Только площадь мы уже знаем, а вот вторую высоту нет.

$$S = \frac{1}{2}bh_b$$

$$18 = \frac{1}{2} \cdot 6h_b$$

$$h_b = 6$$

Ответ: 6.

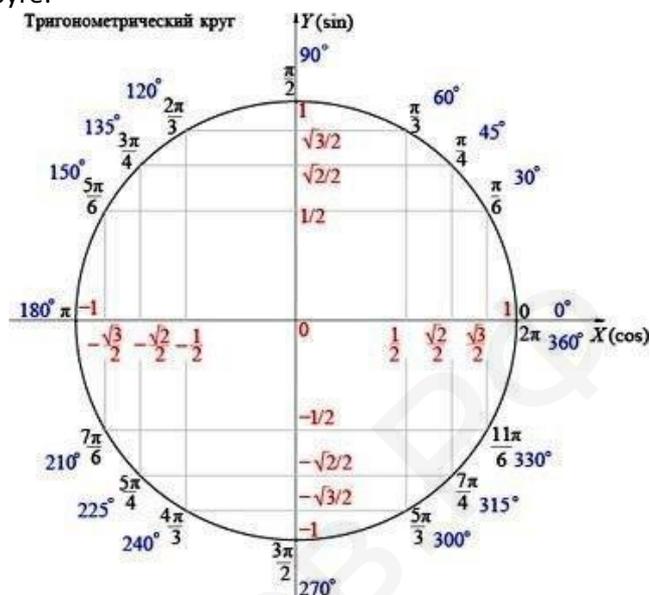
ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

Площадь треугольника через синус угла

В Открытом банке заданий есть задача, которую не решить без использования следующей теории:

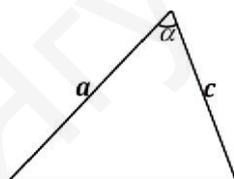
$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

В задаче нужно знать значение только синуса 120° . Все значения синуса и косинуса отображены на тригонометрическом круге:



ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА ЧЕРЕЗ СИНУС УГЛА

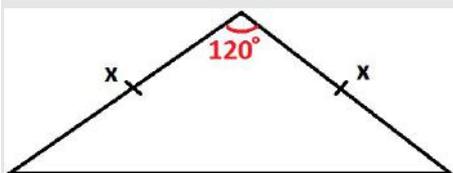
$$S = \frac{1}{2} ac \cdot \sin \alpha$$



Площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними.

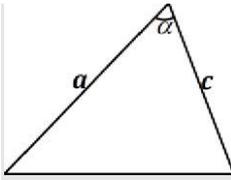
ПРИМЕР

Площадь равнобедренного треугольника равна $\sqrt{3}$. Угол, лежащий напротив основания, равен 120° . Найдите длину боковой стороны треугольника.



Формула площади треугольника через синус угла:

$$S = \frac{1}{2} ac \cdot \sin \alpha$$



В нашей задаче дан равнобедренный треугольник, поэтому боковые стороны равны друг другу.

Пусть $a = c = x$. Нам нужно найти боковую сторону x . Подставим известные значения в формулу:

$$\sqrt{3} = \frac{1}{2} x \cdot x \cdot \sin 120^\circ$$

$$\sqrt{3} = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$4\sqrt{3} = x^2 \cdot \sqrt{3}$$

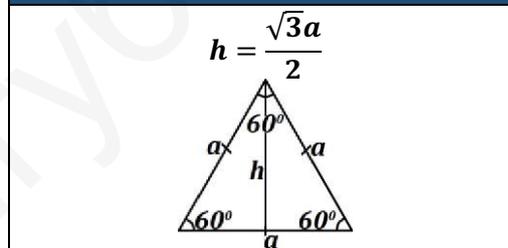
$$4 = x^2$$

$$x = 2$$

Ответ: 2.

Равносторонний треугольник. Периметр

ВЫСОТА РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА



Периметр треугольника – это сумма всех его сторон.

ПРИМЕР

Высота равностороннего треугольника равна $13\sqrt{3}$. Найдите его периметр.

Обратимся к формуле высоты равностороннего треугольника.

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Подставим в неё значение высоты.

$$13\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$26\sqrt{3} = \sqrt{3}a$$

$$26 = a$$

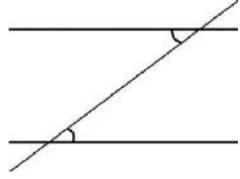
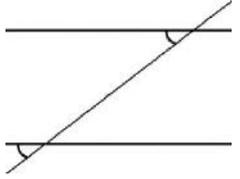
Сторона равна 26, а периметр – это сумма трёх сторон. В равностороннем треугольнике стороны равны друг другу.

$$\text{периметр} = 26 + 26 + 26 = 78.$$

Ответ: 78.

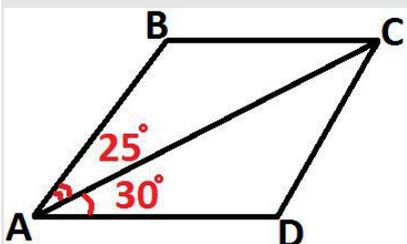
ЯГубов.РФ

Углы при параллельных прямых

НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ	СООТВЕТСТВЕННЫЕ УГЛЫ	ОДНОСТРОННИЕ УГЛЫ
Равны при параллельных прямых (I-й признак параллельности прямых) 	Равны при параллельных прямых (II-й признак параллельности прямых) 	В сумме 180° при параллельных прямых (III-й признак параллельности прямых) 

ПРИМЕР №1

Диагональ AC параллелограмма ABCD образует с его сторонами углы, равные 25° и 30° . Найдите больший угол параллелограмма.



Больший угол – это либо угол B, либо угол D. Найдём угол B.

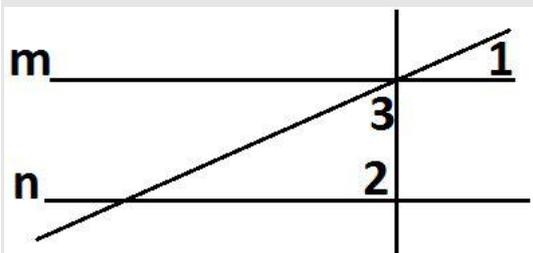
Углы CAD и BCA – накрест лежащие и они равны 30° .

Рассмотрим треугольник ABC. Сумма углов в нём равна 180° . Угол A равен 25° , угол C равен 30° . Значит, угол B равен $180^\circ - 25^\circ - 30^\circ = 125^\circ$.

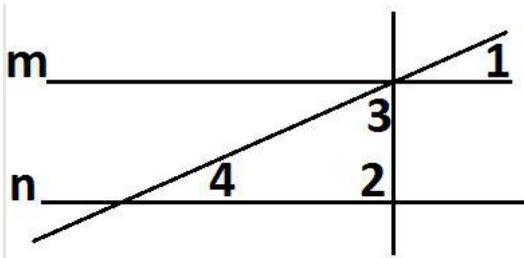
Ответ: 125.

ПРИМЕР №2

Прямые m и n параллельны. Найдите $\angle 3$, если $\angle 1 = 24^\circ$, $\angle 2 = 90^\circ$.



Способов решения существует много. Один из способов:
Для удобства обозначим $\angle 4$.



Углы 1 и 4 – соответственные, и они равны друг другу (24°).

Углы 2, 3 и 4 находятся в треугольнике. А в треугольнике сумма углов равна 180° .

Найдём $\angle 3$:

$$\angle 3 = 180^\circ - \angle 4 - \angle 2 = 180^\circ - 24^\circ - 90^\circ = 66^\circ.$$

Ответ: 66.

Ягубов.РФ