

Листок 1. Плюс-минус один

- 1** Зайцы нашли в лесу бревно длиной 6 м. Чтобы отнести домой, они распилили его на части длиной по 1 метру. Сколько они сделали распилов?
- 2** Из книги выпал кусок, у первой страницы которого номер 35, а у последней — 74. Сколько страниц выпало?
- 3** Теперь у зайцев уже несколько брёвен. Они распилили все брёвна, сделав 20 распилов, и получили 27 чурбачков. Сколько брёвен было у зайцев?
- 4** Сколько всего существует двузначных чисел? А трёхзначных?
- 5** Улитке надо подняться на столб высотой 10 м. Каждый день она поднимается на 4 м, а каждую ночь сползает на 3 м. Когда улитка доползёт до цели, если она стартовала в понедельник утром?
- 6** Главное здание МГУ состоит из нескольких секторов. Этажи в разных секторах отличаются по высоте. Из-за этого, например, получается, что переходы с 13 этажа сектора А ведут на 19 этаж секторов Б и В. Как соотносятся по высоте этажи в этих секторах?
- 7** Сколько раз за сутки на часах минутная стрелка обгонит часовую?

Листок 1. Плюс-минус один

- 1** Зайцы нашли в лесу бревно длиной 6 м. Чтобы отнести домой, они распилили его на части длиной по 1 метру. Сколько они сделали распилов?
- 2** Из книги выпал кусок, у первой страницы которого номер 35, а у последней — 74. Сколько страниц выпало?
- 3** Теперь у зайцев уже несколько брёвен. Они распилили все брёвна, сделав 20 распилов, и получили 27 чурбачков. Сколько брёвен было у зайцев?
- 4** Сколько всего существует двузначных чисел? А трёхзначных?
- 5** Улитке надо подняться на столб высотой 10 м. Каждый день она поднимается на 4 м, а каждую ночь сползает на 3 м. Когда улитка доползёт до цели, если она стартовала в понедельник утром?
- 6** Главное здание МГУ состоит из нескольких секторов. Этажи в разных секторах отличаются по высоте. Из-за этого, например, получается, что переходы с 13 этажа сектора А ведут на 19 этаж секторов Б и В. Как соотносятся по высоте этажи в этих секторах?
- 7** Сколько раз за сутки на часах минутная стрелка обгонит часовую?

Листок 2. Чётность

- 1 Что такое чётное и что такое нечётное число? Каким является число 0: чётным или нечётным?
- 2 Можно ли разменять 25 лир десятью монетами в 1, 3 и 5 лир?
- 3 Существуют ли два натуральных числа, сумма и произведение которых нечётны?
- 4 Хулиган Дима порвал школьную стенгазету на 3 части. После этого он взял один из кусков и тоже порвал на 3 части. Потом опять один из кусков порвал на 3 части и т.д. Могло ли у него в итоге получиться 100 частей?
- 5 Обозначим буквой Ч чётные числа, а буквой Н — нечётные. Заполните пропуски так, чтобы получились верные соотношения:

$$\begin{array}{ll} \text{Ч} + \text{Ч} = \bigcirc & \text{Ч} \cdot \text{Ч} = \bigcirc \\ \text{Ч} + \text{Н} = \bigcirc & \text{Ч} \cdot \text{Н} = \bigcirc \\ \text{Н} + \text{Ч} = \bigcirc & \text{Н} \cdot \text{Ч} = \bigcirc \\ \text{Н} + \text{Н} = \bigcirc & \text{Н} \cdot \text{Н} = \bigcirc \end{array}$$

- 6 На шахматной доске на одной из клеток стоял конь. Он сделал несколько ходов и вернулся на ту же клетку. Чётное или нечётное число ходов он сделал?
- 7 В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли между ними расставить знаки «+» и «−» так, чтобы получился 0?
- 8 Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании, связанном с принятием важного решения, присутствовали все представители обеих палат. Из-за важности вопроса при голосовании никто не воздержался. После подведения итогов было объявлено, что решение принято большинством в 25 голосов. Оппозиция закричала: «Это обман!» Как это удалось определить?
- 9 На этот раз хулиган Дима исправил две цифры в примере на умножение. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Помогите учительнице Марье Петровне восстановить исходный пример. (Определите, какие цифры на что были исправлены, и объясните, почему по-другому это сделать было нельзя.)

Листок 2. Чётность

- 1 Что такое чётное и что такое нечётное число? Каким является число 0: чётным или нечётным?
- 2 Можно ли разменять 25 лир десятью монетами в 1, 3 и 5 лир?
- 3 Существуют ли два натуральных числа, сумма и произведение которых нечётны?
- 4 Хулиган Дима порвал школьную стенгазету на 3 части. После этого он взял один из кусков и тоже порвал на 3 части. Потом опять один из кусков порвал на 3 части и т.д. Могло ли у него в итоге получиться 100 частей?
- 5 Обозначим буквой Ч чётные числа, а буквой Н — нечётные. Заполните пропуски так, чтобы получились верные соотношения:

$$\begin{array}{ll} \text{Ч} + \text{Ч} = \bigcirc & \text{Ч} \cdot \text{Ч} = \bigcirc \\ \text{Ч} + \text{Н} = \bigcirc & \text{Ч} \cdot \text{Н} = \bigcirc \\ \text{Н} + \text{Ч} = \bigcirc & \text{Н} \cdot \text{Ч} = \bigcirc \\ \text{Н} + \text{Н} = \bigcirc & \text{Н} \cdot \text{Н} = \bigcirc \end{array}$$

- 6 На шахматной доске на одной из клеток стоял конь. Он сделал несколько ходов и вернулся на ту же клетку. Чётное или нечётное число ходов он сделал?
- 7 В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли между ними расставить знаки «+» и «−» так, чтобы получился 0?
- 8 Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании, связанном с принятием важного решения, присутствовали все представители обеих палат. Из-за важности вопроса при голосовании никто не воздержался. После подведения итогов было объявлено, что решение принято большинством в 25 голосов. Оппозиция закричала: «Это обман!» Как это удалось определить?
- 9 На этот раз хулиган Дима исправил две цифры в примере на умножение. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Помогите учительнице Марье Петровне восстановить исходный пример. (Определите, какие цифры на что были исправлены, и объясните, почему по-другому это сделать было нельзя.)

Листок 3. Логические задачи

1 В три банки с надписями «малиновое», «клубничное» и «малиновое или клубничное» налили смородиновое, малиновое и клубничное варенье. Все надписи оказались неправильными. Какое варенье налили в банку «клубничное»?

2 Когда учительница ругала Дениса за плохой почерк, он сказал: «У всех великих людей был плохой почерк, значит, я великий человек». Прав ли он?

3 У императора украли перец. Как известно, те, кто крадут перец, всегда лгут. Пресс-секретарь заявил, что знает, кто украл перец. Виновен ли он?

4 Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждого двух совпадает или имя, или фамилия, или отчество. Может ли такое быть?

5 Ковбой Джо приобрел в салуне несколько бутылок Кока-Колы по 40 центов за штуку, несколько сэндвичей по 24 цента и 2 бифштекса. Бармен сказал, что с него 20 долларов 5 центов. Ковбой Джо высказал бармену всё, что он думает о его умении считать. Действительно ли бармен ошибся?

6 Кто-то подарил Златовласке подарок, положив его на крыльцо её дома. Златовласка подозревает, что это был один из её друзей: Стрекоза, Огонёк или Ушастик. Но как это узнать? Каждый из них указывает на одного из двух других. Правду сказала только Стрекоза. Если бы каждый указывал не на того, на кого указывает, а на второго, то Ушастик был бы единственным, кто сказал правду. Кто же подарил подарок?

7 Кто-то из трёх друзей таким же образом подарил подарок Синеглазке. На вопросы Синеглазки Огонёк отвечал, что это Ушастик, а что сказали Ушастик и Стрекоза, Синеглазка забыла. Златовласка взяла дело в свои руки и выяснила, что только один из троих сказал правду, и именно он и сделал подарок. Кто подарил подарок?

Листок 3. Логические задачи

1 В три банки с надписями «малиновое», «клубничное» и «малиновое или клубничное» налили смородиновое, малиновое и клубничное варенье. Все надписи оказались неправильными. Какое варенье налили в банку «клубничное»?

2 Когда учительница ругала Дениса за плохой почерк, он сказал: «У всех великих людей был плохой почерк, значит, я великий человек». Прав ли он?

3 У императора украли перец. Как известно, те, кто крадут перец, всегда лгут. Пресс-секретарь заявил, что знает, кто украл перец. Виновен ли он?

4 Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждого двух совпадает или имя, или фамилия, или отчество. Может ли такое быть?

5 Ковбой Джо приобрел в салуне несколько бутылок Кока-Колы по 40 центов за штуку, несколько сэндвичей по 24 цента и 2 бифштекса. Бармен сказал, что с него 20 долларов 5 центов. Ковбой Джо высказал бармену всё, что он думает о его умении считать. Действительно ли бармен ошибся?

6 Кто-то подарил Златовласке подарок, положив его на крыльцо её дома. Златовласка подозревает, что это был один из её друзей: Стрекоза, Огонёк или Ушастик. Но как это узнать? Каждый из них указывает на одного из двух других. Правду сказала только Стрекоза. Если бы каждый указывал не на того, на кого указывает, а на второго, то Ушастик был бы единственным, кто сказал правду. Кто же подарил подарок?

7 Кто-то из трёх друзей таким же образом подарил подарок Синеглазке. На вопросы Синеглазки Огонёк отвечал, что это Ушастик, а что сказали Ушастик и Стрекоза, Синеглазка забыла. Златовласка взяла дело в свои руки и выяснила, что только один из троих сказал правду, и именно он и сделал подарок. Кто подарил подарок?

8 Клоуны Бам, Бим и Бом вышли на арену в красной, синей и зелёной рубашках. Их туфли были тех же трёх цветов. Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были зелёные, а рубашка нет. Каких цветов были туфли и рубашка у Бома и Бима?

8 Клоуны Бам, Бим и Бом вышли на арену в красной, синей и зелёной рубашках. Их туфли были тех же трёх цветов. Туфли и рубашка Бима были одного цвета. На Боме не было ничего красного. Туфли Бама были зелёные, а рубашка нет. Каких цветов были туфли и рубашка у Бома и Бима?

Ягубов.РФ

Листок 4. Затруднительные ситуации

- 1 В двух кошельках всего лежит два рубля. При этом в одном кошельке денег в два раза больше, чем в другом. Как такое может быть?
- 2 Замок окружён рвом, имеющим форму прямоугольной рамки. Ширина рва всюду одинакова. Есть две доски, длины которых равны ширине рва. Можно ли переправиться через ров?
- 3 Можно ли погрузить на три грузовика семь бочек с квасом, семь пустых бочек и семь бочек, заполненных наполовину, чтобы на каждом грузовике было по семь бочек и поровну кваса?
- 4 Два поезда движутся навстречу друг другу по одной железнодорожной ветке. От неё отходит тупик, длина которого меньше длины поезда, но больше длины одного вагона. Как поездам разминуться?
- 5 Три котёнка и три щенка съели двадцать сосисок. Рыжий котёнок съел больше всех, а серый — не меньше всех. Может ли так быть, что щенки съели не меньше сосисок, чем котята?
- 6 Можно ли пять бумажных колец склеить так, чтобы при разрезании только одного звена получалось пять отдельных звеньев?
- 7 В баке не менее десяти литров воды. Можно ли набрать шесть литров с помощью девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?
- 8 Крестьянину нужно переправить через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться только крестьянин, а с ним или только волк, или только коза, или только капуста. Но если оставить волка с козой без крестьянина, то волк съест козу, если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как быть?

Листок 4. Затруднительные ситуации

- 1 В двух кошельках всего лежит два рубля. При этом в одном кошельке денег в два раза больше, чем в другом. Как такое может быть?
- 2 Замок окружён рвом, имеющим форму прямоугольной рамки. Ширина рва всюду одинакова. Есть две доски, длины которых равны ширине рва. Можно ли переправиться через ров?
- 3 Можно ли погрузить на три грузовика семь бочек с квасом, семь пустых бочек и семь бочек, заполненных наполовину, чтобы на каждом грузовике было по семь бочек и поровну кваса?
- 4 Два поезда движутся навстречу друг другу по одной железнодорожной ветке. От неё отходит тупик, длина которого меньше длины поезда, но больше длины одного вагона. Как поездам разминуться?
- 5 Три котёнка и три щенка съели двадцать сосисок. Рыжий котёнок съел больше всех, а серый — не меньше всех. Может ли так быть, что щенки съели не меньше сосисок, чем котята?
- 6 Можно ли пять бумажных колец склеить так, чтобы при разрезании только одного звена получалось пять отдельных звеньев?
- 7 В баке не менее десяти литров воды. Можно ли набрать шесть литров с помощью девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?
- 8 Крестьянину нужно переправить через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться только крестьянин, а с ним или только волк, или только коза, или только капуста. Но если оставить волка с козой без крестьянина, то волк съест козу, если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как быть?

Листок 5. Обратный ход

- 1 а)** Ваня задумал число, умножил его на 2, прибавил 3 и получил 17. Какое число задумал Ваня?
- б)** На этот раз Гоша задумал число. Потом прибавил к нему 5, разделил на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил 2. Какое число задумано?
- 2** Женщина собрала в саду яблоки. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через четыре двери, каждую из которых охранял свирепый стражник, отбиравший половину яблок. Домой она принесла 10 яблок. Сколько яблок досталось стражникам?
- 3** В парке посадили в ряд аллею деревьев. Через год между любыми двумя соседними деревьями посадили ещё по одному. Ещё через год проделали то же самое. Стало 1197 деревьев. Сколько их было изначально?
- 4** Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет и отдал их второму, потом второй проиграл первому половину своих монет, затем опять первый проиграл половину монет. В результате у первого оказалось 15 монет, а у второго 33. Сколько монет было у каждого из пиратов перед началом игры?
- 5** На озере расцвела одна лилия. Каждый день количество цветов на озере удваивалось, и на 20-й день все озеро покрылось цветами. На какой день озеро покрылось цветами наполовину?
- 6** С числами можно выполнять следующие операции: умножать на два или произвольным образом переставлять цифры (нельзя только ставить ноль на первое место). Можно ли с помощью таких операций из 1 получить 74?
- 7** Все натуральные числа от 1 до 1000 записали в следующем порядке: сначала были выписаны в порядке возрастания числа, сумма цифр которых равна 1, затем, также в порядке возрастания, числа с суммой цифр 2, потом — числа, сумма цифр которых равна 3 и т.д. На каком месте оказалось число 996?

Листок 5. Обратный ход

- 1 а)** Ваня задумал число, умножил его на 2, прибавил 3 и получил 17. Какое число задумал Ваня?
- б)** На этот раз Гоша задумал число. Потом прибавил к нему 5, разделил на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил 2. Какое число задумано?
- 2** Женщина собрала в саду яблоки. Чтобы выйти из сада, ей пришлось пройти через четыре двери, каждую из которых охранял свирепый стражник, отбиравший половину яблок. Домой она принесла 10 яблок. Сколько яблок досталось стражникам?
- 3** В парке посадили в ряд аллею деревьев. Через год между любыми двумя соседними деревьями посадили ещё по одному. Ещё через год проделали то же самое. Стало 1197 деревьев. Сколько их было изначально?
- 4** Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет и отдал их второму, потом второй проиграл первому половину своих монет, затем опять первый проиграл половину монет. В результате у первого оказалось 15 монет, а у второго 33. Сколько монет было у каждого из пиратов перед началом игры?
- 5** На озере расцвела одна лилия. Каждый день количество цветов на озере удваивалось, и на 20-й день все озеро покрылось цветами. На какой день озеро покрылось цветами наполовину?
- 6** С числами можно выполнять следующие операции: умножать на два или произвольным образом переставлять цифры (нельзя только ставить ноль на первое место). Можно ли с помощью таких операций из 1 получить 74?
- 7** Все натуральные числа от 1 до 1000 записали в следующем порядке: сначала были выписаны в порядке возрастания числа, сумма цифр которых равна 1, затем, также в порядке возрастания, числа с суммой цифр 2, потом — числа, сумма цифр которых равна 3 и т.д. На каком месте оказалось число 996?

8 На Малом Мехмате в комнату 12-04 всем заходившим туда детям давали шоколадки. Первому зашедшему дали одну шоколадку и десятую часть всех оставшихся, второму зашедшему дали две шоколадки и десятую часть оставшихся, ..., девятому зашедшему дали девять шоколадок и десятую часть оставшихся. После этого прибежал Гоша, но, к сожалению, шоколадки уже закончились. Сколько шоколадок получили дети?

8 На Малом Мехмате в комнату 12-04 всем заходившим туда детям давали шоколадки. Первому зашедшему дали одну шоколадку и десятую часть всех оставшихся, второму зашедшему дали две шоколадки и десятую часть оставшихся, ..., девятому зашедшему дали девять шоколадок и десятую часть оставшихся. После этого прибежал Гоша, но, к сожалению, шоколадки уже закончились. Сколько шоколадок получили дети?

Листок 6. Про деньги

1 В копилке лежит 20 рублёвых монет и 20 двухрублёвых монет. Какое наименьшее число монет нужно достать из копилки, чтобы среди них наверняка оказались **а)** две одинаковые монеты; **б)** две двухрублёвые монеты; **в)** две разные монеты?

2 Две хозяйки покупали молоко каждый день в течение месяца. Цена на молоко ежедневно менялась. Средняя цена молока за месяц оказалась равной 20 рублям. Ежедневно первая хозяйка покупала по одному литру, а вторая — на 20 рублей. Кто из них потратил за этот месяц больше денег и кто купил больше молока?

3 Есть девять монет, среди них одна фальшивая. Все настоящие монеты весят одинаково, а фальшивая весит немного меньше. Как с помощью чашечных весов без стрелок и гирь за два взвешивания гарантированно определить фальшивую монету?

4 Пиноккио посадил денежное дерево, и вместо листьев на нём появлялись каждый день золотые монеты. В первый день на дереве появилась одна монета, во второй день — две, в третий день — три, и так каждый день на нём выросло монет на одну больше, чем в предыдущий. В ночь с 29-го на 30-й день пришли лиса Алиса и кот Базилио и оборвали все золотые монеты. Сколько монет досталось коварным Алисе и Базилио?

5 Молодой человек согласился работать с условием, что в конце года он получит автомобиль «Запорожец» и 2600\$. Но по истечении 8 месяцев уволился и при расчёте получил «Запорожец» и 1000\$. Сколько стоил «Запорожец»?

6 Двое играют в такую игру. Они по очереди выкладывают на круглый стол одинаковые монеты. Класть монеты друг на друга нельзя. Проигрывает тот, кому некуда положить очередную монету. Кто из игроков может гарантированно обеспечить себе победу — начинающий или его соперник? Как он должен играть?

Листок 6. Про деньги

1 В копилке лежит 20 рублёвых монет и 20 двухрублёвых монет. Какое наименьшее число монет нужно достать из копилки, чтобы среди них наверняка оказались **а)** две одинаковые монеты; **б)** две двухрублёвые монеты; **в)** две разные монеты?

2 Две хозяйки покупали молоко каждый день в течение месяца. Цена на молоко ежедневно менялась. Средняя цена молока за месяц оказалась равной 20 рублям. Ежедневно первая хозяйка покупала по одному литру, а вторая — на 20 рублей. Кто из них потратил за этот месяц больше денег и кто купил больше молока?

3 Есть девять монет, среди них одна фальшивая. Все настоящие монеты весят одинаково, а фальшивая весит немного меньше. Как с помощью чашечных весов без стрелок и гирь за два взвешивания гарантированно определить фальшивую монету?

4 Пиноккио посадил денежное дерево, и вместо листьев на нём появлялись каждый день золотые монеты. В первый день на дереве появилась одна монета, во второй день — две, в третий день — три, и так каждый день на нём выросло монет на одну больше, чем в предыдущий. В ночь с 29-го на 30-й день пришли лиса Алиса и кот Базилио и оборвали все золотые монеты. Сколько монет досталось коварным Алисе и Базилио?

5 Молодой человек согласился работать с условием, что в конце года он получит автомобиль «Запорожец» и 2600\$. Но по истечении 8 месяцев уволился и при расчёте получил «Запорожец» и 1000\$. Сколько стоил «Запорожец»?

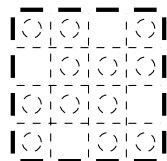
6 Двое играют в такую игру. Они по очереди выкладывают на круглый стол одинаковые монеты. Класть монеты друг на друга нельзя. Проигрывает тот, кому некуда положить очередную монету. Кто из игроков может гарантированно обеспечить себе победу — начинающий или его соперник? Как он должен играть?

7 На столе лежат монеты. 15 из них — орлом вверх, остальные — орлом вниз. Требуется с завязанными глазами разложить эти монеты на две кучи так, чтобы в этих кучах число монет, лежащих орлом вверх, было одинаково. Количество монет в кучах может быть разным (куча может состоять из любого количества монет, в том числе из одной или еще меньше), монеты можно переворачивать, но определить наощупь, как лежит монета, невозможно.

7 На столе лежат монеты. 15 из них — орлом вверх, остальные — орлом вниз. Требуется с завязанными глазами разложить эти монеты на две кучи так, чтобы в этих кучах число монет, лежащих орлом вверх, было одинаково. Количество монет в кучах может быть разным (куча может состоять из любого количества монет, в том числе из одной или еще меньше), монеты можно переворачивать, но определить наощупь, как лежит монета, невозможно.

Листок 7. Разрезания

- 1** Разрежьте квадрат на **а)** 4; **б)** 9; **в)** 17 квадратов.
- 2** Четыре гнома получили от дяди в наследство сад, обнесенный 16 спичками, в котором растут 12 плодовых деревьев. Расположение деревьев указано на рисунке. Разделите сад с помощью 12 спичек на четыре равные части, содержащие по равному числу деревьев, при этом деревья не должны касаться ограды. (Равные части должны иметь одинаковую форму и размер.)



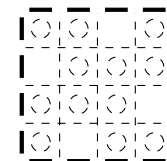
- 3** Арбуз разрезали на 4 части и съели. Получилось пять корок. Как такое могло быть?
- 4** Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на четыре равные части.



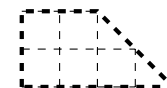
- 5** Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам ещё раз. Получившийся квадратик разрезали ножницами по прямой. Могла ли салфетка распаться **а)** на 2 части; **б)** на 3 части; **в)** на 4 части; **г)** на 5 частей?

Листок 7. Разрезания

- 1** Разрежьте квадрат на **а)** 4; **б)** 9; **в)** 17 квадратов.
- 2** Четыре гнома получили от дяди в наследство сад, обнесенный 16 спичками, в котором растут 12 плодовых деревьев. Расположение деревьев указано на рисунке. Разделите сад с помощью 12 спичек на четыре равные части, содержащие по равному числу деревьев, при этом деревья не должны касаться ограды. (Равные части должны иметь одинаковую форму и размер.)

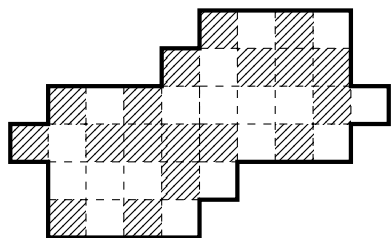


- 3** Арбуз разрезали на 4 части и съели. Получилось пять корок. Как такое могло быть?
- 4** Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на четыре равные части.



- 5** Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам ещё раз. Получившийся квадратик разрезали ножницами по прямой. Могла ли салфетка распаться **а)** на 2 части; **б)** на 3 части; **в)** на 4 части; **г)** на 5 частей?

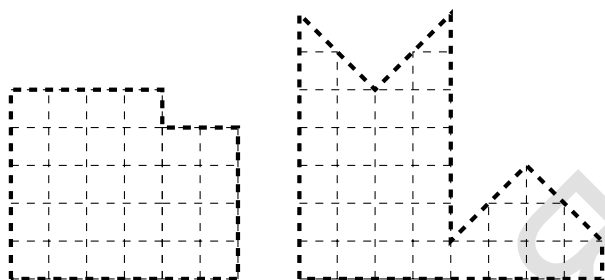
- 6** Разрежьте изображенную на рисунке фигуру на четыре одинаковые части так, чтобы из них можно было сложить квадрат размером 6×6 с шахматной раскраской.



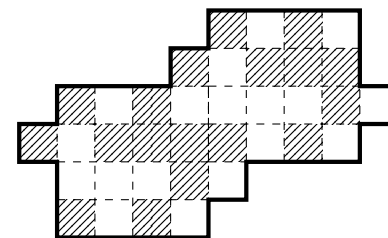
- 7 а)** Разрежьте прямоугольник 4×9 на две части, из которых можно сложить квадрат 6×6 .

- б)** Разрежьте прямоугольник 9×16 на две части, из которых можно сложить квадрат.

- 8** Разрежьте каждую из следующих фигур на две одинаковые части.



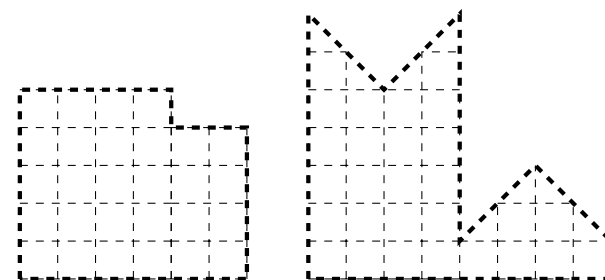
- 6** Разрежьте изображенную на рисунке фигуру на четыре одинаковые части так, чтобы из них можно было сложить квадрат размером 6×6 с шахматной раскраской.



- 7 а)** Разрежьте прямоугольник 4×9 на две части, из которых можно сложить квадрат 6×6 .

- б)** Разрежьте прямоугольник 9×16 на две части, из которых можно сложить квадрат.

- 8** Разрежьте каждую из следующих фигур на две одинаковые части.



Листок 8. Принцип Дирихле

1 Восемь кроликов посадили в семь клеток. Докажите, что есть клетка, в которой оказалось по крайней мере два кролика.

2 За победу в математической регате команда из 4 человек получила 10 конфет. Дети поделили конфеты между собой, не разламывая их. Определите, верны ли следующие утверждения:

- а) «кому-то досталось по крайней мере две конфеты»;
- б) «кому-то досталось по крайней мере три конфеты»;
- в) «двум людям досталось по крайней мере две конфеты»;
- г) «каждому досталась хотя бы одна конфета».

3 а) В темной комнате стоит шкаф, в котором лежат 24 чёрных и 24 синих носка. Какое минимальное количество носков нужно взять из шкафа, чтобы из них заведомо можно было составить по крайней мере одну пару носков одного цвета?

б) Какое минимальное количество носков нужно взять, чтобы заведомо можно было составить хотя бы одну пару чёрных носков?

в) Как изменится решение задачи, если в ящике лежат 12 пар чёрных и 12 пар синих ботинок и требуется составить пару одного цвета (как в пункте а) и пару черного цвета (как в пункте б)? (Ботинки, в отличие от носков, бывают левыми и правыми.)

4 В лесу растут миллион ёлок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что есть две ёлки с одинаковым количеством иголок.

5 В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.

6 В квадратном ковре со стороной 4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать коврик со стороной 1 метр, в котором дырок не будет.

7 В финале школьного чемпионата по баскетболу команда 5А забила 9 мячей. Докажите, что найдутся 2 игрока этой команды, забившие поровну мячей. (В команде по баскетболу 5 игроков.)

8 Верно ли, что в вашей аудитории есть по крайней мере два человека, имеющие одинаковое число друзей в этой аудитории? Верно ли это для любой аудитории Малого мехмата?

Листок 8. Принцип Дирихле

1 Восемь кроликов посадили в семь клеток. Докажите, что есть клетка, в которой оказалось по крайней мере два кролика.

2 За победу в математической регате команда из 4 человек получила 10 конфет. Дети поделили конфеты между собой, не разламывая их. Определите, верны ли следующие утверждения:

- а) «кому-то досталось по крайней мере две конфеты»;
- б) «кому-то досталось по крайней мере три конфеты»;
- в) «двум людям досталось по крайней мере две конфеты»;
- г) «каждому досталась хотя бы одна конфета».

3 а) В темной комнате стоит шкаф, в котором лежат 24 чёрных и 24 синих носка. Какое минимальное количество носков нужно взять из шкафа, чтобы из них заведомо можно было составить по крайней мере одну пару носков одного цвета?

б) Какое минимальное количество носков нужно взять, чтобы заведомо можно было составить хотя бы одну пару чёрных носков?

в) Как изменится решение задачи, если в ящике лежат 12 пар чёрных и 12 пар синих ботинок и требуется составить пару одного цвета (как в пункте а) и пару черного цвета (как в пункте б)? (Ботинки, в отличие от носков, бывают левыми и правыми.)

4 В лесу растут миллион ёлок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что есть две ёлки с одинаковым количеством иголок.

5 В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.

6 В квадратном ковре со стороной 4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать коврик со стороной 1 метр, в котором дырок не будет.

7 В финале школьного чемпионата по баскетболу команда 5А забила 9 мячей. Докажите, что найдутся 2 игрока этой команды, забившие поровну мячей. (В команде по баскетболу 5 игроков.)

8 Верно ли, что в вашей аудитории есть по крайней мере два человека, имеющие одинаковое число друзей в этой аудитории? Верно ли это для любой аудитории Малого мехмата?

Листок 9. Переливания

- 1** Есть два ведра: одно ёмкостью 4 л, другое — 9 л. Можно ли только с их помощью набрать из реки ровно 6 литров воды?
- 2 а)** Можно ли, имея две банки ёмкостью 3 л и 5 л, набрать из водопроводного крана 4 литра воды?
- б)** Тот же вопрос, если есть только банки ёмкостью 6 л и 9 л?
- 3** Отлейте из цистерны 13 литров воды, пользуясь бидонами в 5 л и 17 л.
- 4** Можно ли набрать из реки 8 литров воды с помощью двух ведёр, вместимостью 15 л и 16 л?
- 5** Есть три кастрюли: 8 л — с компотом, 3 л и 5 л — пустые. Как разделить компот пополам? (Компот, в отличие от воды, выливать нельзя.)
- 6** Можно ли разлить 50 литров бензина по трём бакам так, чтобы в первом баке было на 10 литров больше, чем во втором, а во втором на 21 литр больше, чем в третьем?
- 7** Есть двое песочных часов: на 7 мин и на 11 мин. Каша варится 15 минут. Как с помощью этих часов отмерить нужное время?
- 8** Есть две одинаковые чашки: одна с кофе, другая с молоком. Из первой чашки во вторую перелили ложку кофе. Затем ложку получившейся смеси перелили обратно из второй чашки в первую. Чего больше: молока в кофе или кофе в молоке?
- 9** Есть три сосуда 3л, 4л и 5л, кран с водой и 3 литра сиропа в самом маленьком сосуде. Можно ли с помощью переливаний получить 6 литров смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде воды и сиропа было поровну?

Листок 9. Переливания

- 1** Есть два ведра: одно ёмкостью 4 л, другое — 9 л. Можно ли только с их помощью набрать из реки ровно 6 литров воды?
- 2 а)** Можно ли, имея две банки ёмкостью 3 л и 5 л, набрать из водопроводного крана 4 литра воды?
- б)** Тот же вопрос, если есть только банки ёмкостью 6 л и 9 л?
- 3** Отлейте из цистерны 13 литров воды, пользуясь бидонами в 5 л и 17 л.
- 4** Можно ли набрать из реки 8 литров воды с помощью двух ведёр, вместимостью 15 л и 16 л?
- 5** Есть три кастрюли: 8 л — с компотом, 3 л и 5 л — пустые. Как разделить компот пополам? (Компот, в отличие от воды, выливать нельзя.)
- 6** Можно ли разлить 50 литров бензина по трём бакам так, чтобы в первом баке было на 10 литров больше, чем во втором, а во втором на 21 литр больше, чем в третьем?
- 7** Есть двое песочных часов: на 7 мин и на 11 мин. Каша варится 15 минут. Как с помощью этих часов отмерить нужное время?
- 8** Есть две одинаковые чашки: одна с кофе, другая с молоком. Из первой чашки во вторую перелили ложку кофе. Затем ложку получившейся смеси перелили обратно из второй чашки в первую. Чего больше: молока в кофе или кофе в молоке?
- 9** Есть три сосуда 3л, 4л и 5л, кран с водой и 3 литра сиропа в самом маленьком сосуде. Можно ли с помощью переливаний получить 6 литров смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде воды и сиропа было поровну?

Листок 10. Удивительный остров

Действие почти во всех задачах происходит на некотором острове, жителями которого являются рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.

- 1** Человек говорит: «Я лжец». Может ли он быть жителем острова рыцарей и лжецов?
- 2** Каждый из собравшихся на площади жителей острова заявил остальным: «Вы все лжецы». Сколько рыцарей среди них?
- 3** На улице встретились два жителя острова. Один из них сказал: «По крайней мере, один из нас рыцарь». Второй ему ответил: «Ты лжец». Кто из них кто?
- 4** Каждый из **а)** 7; **б)** 9 сидящих за круглым столом жителей острова сказал: «Мои соседи лжец и рыцарь». Сколько рыцарей и сколько лжецов сидит за столом?
- 5** Какой вопрос нужно задать жителю острова, чтобы узнать, живёт ли у него дома ручной крокодил?
- 6** Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы бы рады тебя отпустить, но по нашему закону ты должен произнести какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы тебя съедем. Если оно окажется ложным, тебя съест наш лев». Что нужно сказать Робинзону, чтобы не быть съеденным?
- 7** Некоторые жители острова заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечётным?
- 8** Знайка задумал несколько целых чисел и сообщил их Незнайке. В интервью газете «Жёлтый листок» Незнайка сказал: «Знайка дал мне три числа. Их сумма равна 201, а произведение равно 30030». Докажите, что Незнайка соврал.

Листок 10. Удивительный остров

Действие почти во всех задачах происходит на некотором острове, жителями которого являются рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.

- 1** Человек говорит: «Я лжец». Может ли он быть жителем острова рыцарей и лжецов?
- 2** Каждый из собравшихся на площади жителей острова заявил остальным: «Вы все лжецы». Сколько рыцарей среди них?
- 3** На улице встретились два жителя острова. Один из них сказал: «По крайней мере, один из нас рыцарь». Второй ему ответил: «Ты лжец». Кто из них кто?
- 4** Каждый из **а)** 7; **б)** 9 сидящих за круглым столом жителей острова сказал: «Мои соседи лжец и рыцарь». Сколько рыцарей и сколько лжецов сидит за столом?
- 5** Какой вопрос нужно задать жителю острова, чтобы узнать, живёт ли у него дома ручной крокодил?
- 6** Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы бы рады тебя отпустить, но по нашему закону ты должен произнести какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы тебя съедем. Если оно окажется ложным, тебя съест наш лев». Что нужно сказать Робинзону, чтобы не быть съеденным?
- 7** Некоторые жители острова заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечётным?
- 8** Знайка задумал несколько целых чисел и сообщил их Незнайке. В интервью газете «Жёлтый листок» Незнайка сказал: «Знайка дал мне три числа. Их сумма равна 201, а произведение равно 30030». Докажите, что Незнайка соврал.

Листок 11. Арифметика и весы

- 1** Три носорога весят столько же, сколько четыре бегемота и один крокодил. Кто тяжелее: носорог или бегемот?
- 2** 3 карася тяжелее 4 окуней. Что тяжелее: 4 карася или 5 окуней?
- 3** Груша и слива весят столько, сколько 2 яблока; 4 груши весят столько, сколько 5 яблок и 2 сливы. Что тяжелее: 7 яблок или 5 груш?
- 4** Маленькому Гоше подарили весы, и он начал взвешивать игрушки. Машину уравновесили мяч и 2 кубика, а машину с кубиком уравновесили 2 мяча. Сколько кубиков уравновесят машину?
- 5** Метрострой нанял двух кротов рыть туннель. Первый крот работает быстрее второго, но платят обоим одинаково, учитывая только время. Что выгоднее: чтобы первую половину тоннеля выкопал один крот, а вторую — другой; или, чтобы они начали копать с двух сторон одновременно и копали бы до встречи?
- 6** 9 одинаковых конфет стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же конфет — 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна конфета?
- 7** В трёх ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором на 10 орехов меньше, чем в первом и третьем. Сколько орехов в третьем ящике?
- 8** Малышу и Карлсону дали по одинаковому пирогу. Карлсон начал есть свой пирог на минуту позже Малыша, а через две минуты после этого оказалось, что Карлсон уже съел столько, сколько еще осталось съесть Малышу. Докажите, что если бы Малыш и Карлсон ели один пирог вдвоем, то они управились бы с ним меньше, чем за три минуты.

Листок 11. Арифметика и весы

- 1** Три носорога весят столько же, сколько четыре бегемота и один крокодил. Кто тяжелее: носорог или бегемот?
- 2** 3 карася тяжелее 4 окуней. Что тяжелее: 4 карася или 5 окуней?
- 3** Груша и слива весят столько, сколько 2 яблока; 4 груши весят столько, сколько 5 яблок и 2 сливы. Что тяжелее: 7 яблок или 5 груш?
- 4** Маленькому Гоше подарили весы, и он начал взвешивать игрушки. Машину уравновесили мяч и 2 кубика, а машину с кубиком уравновесили 2 мяча. Сколько кубиков уравновесят машину?
- 5** Метрострой нанял двух кротов рыть туннель. Первый крот работает быстрее второго, но платят обоим одинаково, учитывая только время. Что выгоднее: чтобы первую половину тоннеля выкопал один крот, а вторую — другой; или, чтобы они начали копать с двух сторон одновременно и копали бы до встречи?
- 6** 9 одинаковых конфет стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же конфет — 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна конфета?
- 7** В трёх ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором на 10 орехов меньше, чем в первом и третьем. Сколько орехов в третьем ящике?
- 8** Малышу и Карлсону дали по одинаковому пирогу. Карлсон начал есть свой пирог на минуту позже Малыша, а через две минуты после этого оказалось, что Карлсон уже съел столько, сколько еще осталось съесть Малышу. Докажите, что если бы Малыш и Карлсон ели один пирог вдвоем, то они управились бы с ним меньше, чем за три минуты.

Листок 12. Можно или нельзя

Во всех задачах сегодняшнего занятия нужно дать ответ «Да» или «Нет». Если ответ «Да», то нужно привести пример, когда такое может быть. Если ответ «Нет», то нужно объяснить, почему.

- 1** Ваня говорит: «Позавчера мне было ещё только 10 лет, а в следующем году исполнится уже 13». Может ли такое быть?
- 2** Можно ли на шахматной доске расставить 9 ладей так, чтобы они не били друг друга?
- 3 а)** Существуют ли такие два последовательных натуральных числа, что сумма цифр каждого из них делится на 4?
б) А два последовательных числа с равной суммой цифр?
- 4** Может ли в месяце быть **а)** 3; **б)** 4; **в)** 5; **г)** 6 воскресений?
- 5** Можно ли разрезать квадрат на квадратики двух размеров так, чтобы маленьких было столько же, сколько и больших?
- 6** Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть?
- 7** Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется — определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.
а) Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (ни больше, ни меньше).
б) Может ли Лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?
- 8** На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11000 км. Сможет ли правительство страны соединить сетью дорог все свои города?

Листок 12. Можно или нельзя

Во всех задачах сегодняшнего занятия нужно дать ответ «Да» или «Нет». Если ответ «Да», то нужно привести пример, когда такое может быть. Если ответ «Нет», то нужно объяснить, почему.

- 1** Ваня говорит: «Позавчера мне было ещё только 10 лет, а в следующем году исполнится уже 13». Может ли такое быть?
- 2** Можно ли на шахматной доске расставить 9 ладей так, чтобы они не били друг друга?
- 3 а)** Существуют ли такие два последовательных натуральных числа, что сумма цифр каждого из них делится на 4?
б) А два последовательных числа с равной суммой цифр?
- 4** Может ли в месяце быть **а)** 3; **б)** 4; **в)** 5; **г)** 6 воскресений?
- 5** Можно ли разрезать квадрат на квадратики двух размеров так, чтобы маленьких было столько же, сколько и больших?
- 6** Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть?
- 7** Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется — определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.
а) Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 80 конфет (ни больше, ни меньше).
б) Может ли Лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?
- 8** На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11000 км. Сможет ли правительство страны соединить сетью дорог все свои города?

Листок 13. Пары и чередование

1 Барон Мюнхаузен, вернувшись из кругосветного путешествия, рассказывает, что по пути он пересёк границу Трапезундии ровно 7 раз. Стоит ли доверять его словам?

2 В джунглях во время кругосветного путешествия на Мюнхаузена напали пантеры. Когда он проскочил мимо двух из них, они бросились на него, промахнулись и загрызли друг друга. Мюнхаузен повторял этот манёвр ещё раз и ещё, до тех пор, пока все они не загрызли друг друга. По словам Мюнхаузена всего было 97 пантер. Правда ли это?

3 Кузнечик прыгает по прямой — каждый раз на 1 метр влево или вправо. Через некоторое время он оказался в исходной точке. Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

4 Из комплекта домино выбросили все кости с «пустышками». Можно ли оставшиеся кости по правилам выложить в ряд?

5 За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей мальчик–девочка и девочка–мальчик чётно.

6 Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на 90° каждые 30 минут. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только: **а)** через целое число часов; **б)** через чётное число часов.

7 На шахматной доске стоят 8 ладей, из которых никакие две не бьют друг друга. Докажите, что число ладей стоящих на чёрных полях чётно.

8 К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.

Листок 13. Пары и чередование

1 Барон Мюнхаузен, вернувшись из кругосветного путешествия, рассказывает, что по пути он пересёк границу Трапезундии ровно 7 раз. Стоит ли доверять его словам?

2 В джунглях во время кругосветного путешествия на Мюнхаузена напали пантеры. Когда он проскочил мимо двух из них, они бросились на него, промахнулись и загрызли друг друга. Мюнхаузен повторял этот манёвр ещё раз и ещё, до тех пор, пока все они не загрызли друг друга. По словам Мюнхаузена всего было 97 пантер. Правда ли это?

3 Кузнечик прыгает по прямой — каждый раз на 1 метр влево или вправо. Через некоторое время он оказался в исходной точке. Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

4 Из комплекта домино выбросили все кости с «пустышками». Можно ли оставшиеся кости по правилам выложить в ряд?

5 За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей мальчик–девочка и девочка–мальчик чётно.

6 Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на 90° каждые 30 минут. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только: **а)** через целое число часов; **б)** через чётное число часов.

7 На шахматной доске стоят 8 ладей, из которых никакие две не бьют друг друга. Докажите, что число ладей стоящих на чёрных полях чётно.

8 К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.

Листок 14. Комбинаторика

1 Из деревни Филимоново в деревню Ксенофонтово ведут три дороги, а из деревни Ксенофонтово в деревню Оладушкино — четыре дороги. Сколько существует путей из деревни Филимоново в деревню Оладушкино?

2 От дачного посёлка проложили две дороги до деревни Филимоново и одну дорогу до Оладушкино. Сколько теперь существует путей от Филимоново до Оладушкина?

3 В киоске продаются открытки, на каждой из которых изображены цветы: либо розы, либо гвоздики, либо тюльпаны. Кроме того, на каждой открытке есть поздравительная надпись: либо «С Днём рождения!», либо «С Новым годом!», либо «С 8 марта!». Какое наибольшее число различных открыток может продаваться в этом киоске?

4 В магазине «Всё для чая» есть 5 видов чашек, 4 вида блюдец и 2 вида ложек. Сколькими способами в этом магазине можно купить:

а) набор из чашки, блюда и ложки;

б) набор, состоящий из двух разных предметов?

5 Назовём натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только чётные цифры. Сколько существует четырёхзначных «симпатичных» чисел?

6 В футбольной команде нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать? (В футбольной команде 11 игроков.)

7 В классе учатся 25 человек. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных?

8 Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трёх букв: А, Б и В. Словом называется любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

9 Меню школьной столовой не меняется и состоит из 10 блюд. Для разнообразия Витя хочет каждый день заказывать такой набор блюд, который он ещё ни разу не заказывал (при этом число блюд не важно — он может заказать все 10 блюд, а может заказать только одно или вовсе ни одного). Сколько дней он сможет так питаться?

Листок 14. Комбинаторика

1 Из деревни Филимоново в деревню Ксенофонтово ведут три дороги, а из деревни Ксенофонтово в деревню Оладушкино — четыре дороги. Сколько существует путей из деревни Филимоново в деревню Оладушкино?

2 От дачного посёлка проложили две дороги до деревни Филимоново и одну дорогу до Оладушкино. Сколько теперь существует путей от Филимоново до Оладушкина?

3 В киоске продаются открытки, на каждой из которых изображены цветы: либо розы, либо гвоздики, либо тюльпаны. Кроме того, на каждой открытке есть поздравительная надпись: либо «С Днём рождения!», либо «С Новым годом!», либо «С 8 марта!». Какое наибольшее число различных открыток может продаваться в этом киоске?

4 В магазине «Всё для чая» есть 5 видов чашек, 4 вида блюдец и 2 вида ложек. Сколькими способами в этом магазине можно купить:

а) набор из чашки, блюда и ложки;

б) набор, состоящий из двух разных предметов?

5 Назовём натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только чётные цифры. Сколько существует четырёхзначных «симпатичных» чисел?

6 В футбольной команде нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать? (В футбольной команде 11 игроков.)

7 В классе учатся 25 человек. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных?

8 Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трёх букв: А, Б и В. Словом называется любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

9 Меню школьной столовой не меняется и состоит из 10 блюд. Для разнообразия Витя хочет каждый день заказывать такой набор блюд, который он ещё ни разу не заказывал (при этом число блюд не важно — он может заказать все 10 блюд, а может заказать только одно или вовсе ни одного). Сколько дней он сможет так питаться?

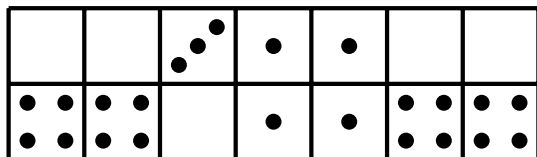
Листок 15. Перебор вариантов

1 Выпишите все наборы из трёх цифр, каждая из которых равна 1, 2 или 3, если порядок цифр неважен (т.е. наборы 112 и 121 считаются одинаковыми).

2 В коробке лежат синие, красные и зеленые карандаши. Всего 20 штук. Синих в 6 раз больше, чем зеленых, красных меньше, чем синих. Сколько в коробке красных карандашей?

3 В январе некоторого года было 4 понедельника и 4 пятницы. Каким днем недели могло быть 20-е число этого месяца?

4 В коробке лежат костяшки домино. На рисунке показано только, как расположены половинки доминошек, но не показаны границы. Определите, как они проходят.



5 Перечислите все четвёрки натуральных чисел, дающих в сумме 15.

6 Летела стая одноголовых сороконожек и трёхголовых драконов. Вместе у них 648 ног и 39 голов. Сколько ног у дракона?

7 Поставьте вместо многоточий числа так, чтобы получилось верное высказывание: «В этом предложении цифра 0 встречается ... раз, цифра 1 — ... раз, 2 — ... раз, 3 — ... раз, 4 — ... раз, 5 — ... раз, 6 — ... раз, 7 — ... раз, 8 — ... раз, 9 — ... раз». (Слово «раз» может склоняться.)

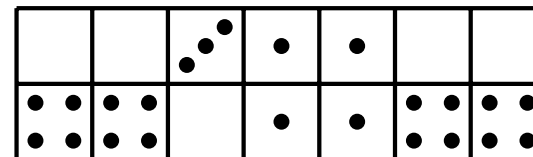
Листок 15. Перебор вариантов

1 Выпишите все наборы из трёх цифр, каждая из которых равна 1, 2 или 3, если порядок цифр неважен (т.е. наборы 112 и 121 считаются одинаковыми).

2 В коробке лежат синие, красные и зеленые карандаши. Всего 20 штук. Синих в 6 раз больше, чем зеленых, красных меньше, чем синих. Сколько в коробке красных карандашей?

3 В январе некоторого года было 4 понедельника и 4 пятницы. Каким днем недели могло быть 20-е число этого месяца?

4 В коробке лежат костяшки домино. На рисунке показано только, как расположены половинки доминошек, но не показаны границы. Определите, как они проходят.



5 Перечислите все четвёрки натуральных чисел, дающих в сумме 15.

6 Летела стая одноголовых сороконожек и трёхголовых драконов. Вместе у них 648 ног и 39 голов. Сколько ног у дракона?

7 Поставьте вместо многоточий числа так, чтобы получилось верное высказывание: «В этом предложении цифра 0 встречается ... раз, цифра 1 — ... раз, 2 — ... раз, 3 — ... раз, 4 — ... раз, 5 — ... раз, 6 — ... раз, 7 — ... раз, 8 — ... раз, 9 — ... раз». (Слово «раз» может склоняться.)

8 Найдите путь от левого верхнего «а» до правого нижнего «я», который проходит по одному разу через каждую букву алфавита. (Ходить можно на соседнюю букву по вертикали или горизонтали.)

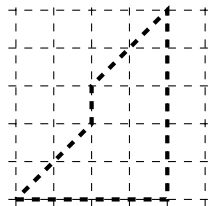
а	о	д	т	ч	з	у	а
р	и	щ	ш	й	п	к	ю
ю	й	н	ы	ж	е	щ	е
п	г	л	ц	ь	ъ	э	б
ч	и	б	ш	г	ъ	ф	л
д	м	ь	ж	н	э	с	е
х	ё	ц	о	ы	ф	р	с
в	к	з	в	ё	м	х	я

8 Найдите путь от левого верхнего «а» до правого нижнего «я», который проходит по одному разу через каждую букву алфавита. (Ходить можно на соседнюю букву по вертикали или горизонтали.)

а	о	д	т	ч	з	у	а
р	и	щ	ш	й	п	к	ю
ю	й	н	ы	ж	е	щ	е
п	г	л	ц	ь	ъ	э	б
ч	и	б	ш	г	ъ	ф	л
д	м	ь	ж	н	э	с	е
х	ё	ц	о	ы	ф	р	с
в	к	з	в	ё	м	х	я

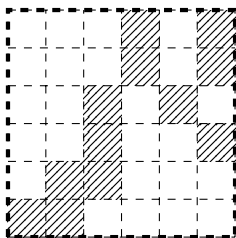
Листок 16. Разрезания — II

1 Разрежьте нарисованную фигуру на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.

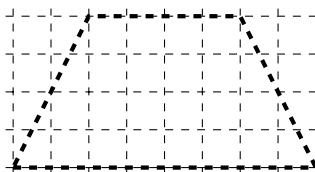


2 На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

3 Разрежьте изображенную на рисунке доску на 4 одинаковые части так, чтобы каждая из них содержала ровно 3 закрашенные клетки.

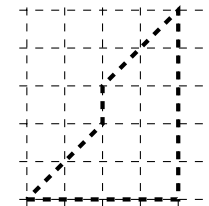


4 Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две части, из которых можно сложить треугольник.



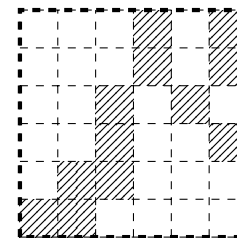
Листок 16. Разрезания — II

1 Разрежьте нарисованную фигуру на две одинаковые (совпадающие при наложении) части.

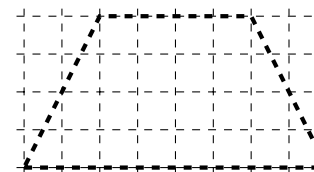


2 На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

3 Разрежьте изображенную на рисунке доску на 4 одинаковые части так, чтобы каждая из них содержала ровно 3 закрашенные клетки.

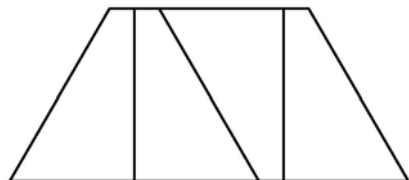


4 Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две части, из которых можно сложить треугольник.

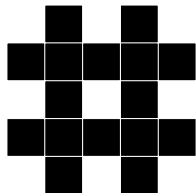


5 Пару доминошек 1×2 назовём *гармоничной*, если они образуют квадрат 2×2 . Существует ли разбиение доски 8×8 на доминошки, в котором ровно одна *гармоничная* пара?

6 Четырёхугольник с длинами сторон 1, 1, 1 и 2, две из которых параллельны, разбит на четыре одинаковые фигуры. В результате верхняя сторона разделилась на четыре отрезка. Найти отношение длины большего отрезка к меньшему.



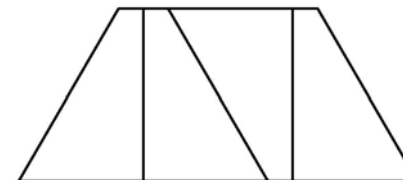
7 Разрежьте по клеточкам на 4 части фигуру, изображённую на рисунке, и сложите из них квадрат.



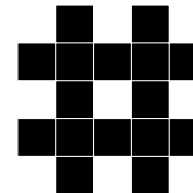
- 8** а) Можно ли шахматную доску разрезать на доминошки 1×2 ?
 б) А если из шахматной доски вырезали одну угловую клетку, то получится разрезать?
 в) А если вырезали две клетки: левую нижнюю и левую верхнюю?
 г) А если левую нижнюю и правую верхнюю?

5 Пару доминошек 1×2 назовём *гармоничной*, если они образуют квадрат 2×2 . Существует ли разбиение доски 8×8 на доминошки, в котором ровно одна *гармоничная* пара?

6 Четырёхугольник с длинами сторон 1, 1, 1 и 2, две из которых параллельны, разбит на четыре одинаковые фигуры. В результате верхняя сторона разделилась на четыре отрезка. Найти отношение длины большего отрезка к меньшему.



7 Разрежьте по клеточкам на 4 части фигуру, изображённую на рисунке, и сложите из них квадрат.



- 8** а) Можно ли шахматную доску разрезать на доминошки 1×2 ?
 б) А если из шахматной доски вырезали одну угловую клетку, то получится разрезать?
 в) А если вырезали две клетки: левую нижнюю и левую верхнюю?
 г) А если левую нижнюю и правую верхнюю?

Листок 17. Взвешивания

Во всех задачах сегодняшнего занятия речь идёт о чашечных весах. У них две чашки, и при взвешивании перевешивает та чашка, на которой груз тяжелее.

1 Есть три монеты. Среди них одна фальшивая, которая весит меньше настоящей. Как с помощью одного взвешивания определить фальшивую монету?

2 Есть девять монет. Среди них одна фальшивая, которая весит меньше настоящей. Как с помощью двух взвешиваний определить фальшивую монету?

3 Среди 101 монеты есть одна фальшивая, которая по весу отличается от настоящей. Но на этот раз неизвестно, в какую сторону. За два взвешивания определите, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета. (Саму монету определять не нужно.)

4 Имеются четыре гири. Одна из них большая и тяжелая, вторая поменьше и полегче, третья — еще меньше и еще легче, а четвертая — самая маленькая и самая легкая. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждый раз берется любая из гирь и ставится на любую чашку весов). Можно ли, не зная точного веса гирь, положить по одной их все на весы в таком порядке, чтобы сначала три раза перевешивала левая чашка, а последний раз — правая?

5 Есть 5 монет. Из них три настоящие, одна — фальшивая, которая весит больше настоящей, и одна — фальшивая, которая весит меньше настоящей. За три взвешивания определите обе фальшивые монеты.

6 В 9 мешках лежат настоящие монеты (по 10 г), а в одном — фальшивые (11 г). Одним взвешиванием на двухчашечных весах со стрелкой определите, в каком мешке фальшивые монеты. (Стрелка показывает, на сколько масса монет на «тяжёлой» чашке больше, чем на «лёгкой».)

7 Имеются 64 монеты, все разные по весу. За не более, чем 94 взвешивания, определите самую лёгкую и самую тяжёлую монеты.

Листок 17. Взвешивания

Во всех задачах сегодняшнего занятия речь идёт о чашечных весах. У них две чашки, и при взвешивании перевешивает та чашка, на которой груз тяжелее.

1 Есть три монеты. Среди них одна фальшивая, которая весит меньше настоящей. Как с помощью одного взвешивания определить фальшивую монету?

2 Есть девять монет. Среди них одна фальшивая, которая весит меньше настоящей. Как с помощью двух взвешиваний определить фальшивую монету?

3 Среди 101 монеты есть одна фальшивая, которая по весу отличается от настоящей. Но на этот раз неизвестно, в какую сторону. За два взвешивания определите, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета. (Саму монету определять не нужно.)

4 Имеются четыре гири. Одна из них большая и тяжелая, вторая поменьше и полегче, третья — еще меньше и еще легче, а четвертая — самая маленькая и самая легкая. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждый раз берется любая из гирь и ставится на любую чашку весов). Можно ли, не зная точного веса гирь, положить по одной их все на весы в таком порядке, чтобы сначала три раза перевешивала левая чашка, а последний раз — правая?

5 Есть 5 монет. Из них три настоящие, одна — фальшивая, которая весит больше настоящей, и одна — фальшивая, которая весит меньше настоящей. За три взвешивания определите обе фальшивые монеты.

6 В 9 мешках лежат настоящие монеты (по 10 г), а в одном — фальшивые (11 г). Одним взвешиванием на двухчашечных весах со стрелкой определите, в каком мешке фальшивые монеты. (Стрелка показывает, на сколько масса монет на «тяжёлой» чашке больше, чем на «лёгкой».)

7 Имеются 64 монеты, все разные по весу. За не более, чем 94 взвешивания, определите самую лёгкую и самую тяжёлую монеты.

Листок 18. Про время

- 1** В 4 часа дня с первого до последнего удара часов прошло 6 секунд. Сколько времени пройдет с первого до последнего удара в полдень?
- 2** На часах, которые ходят точно, оторвались все цифры. Остались только деления без подписей. Как узнать, куда нужно вернуть каждую цифру? (Других часов у вас нет.)
- 3** Катя на выполнение домашнего задания тратит на 10% больше времени, чем Лена. А Маша тратит на 10% меньше времени, чем Катя. Кто из девочек быстрее всего делает домашнее задание?
- 4** Водитель дальнобойного грузовика взглянул на приборы своей машины и увидел, что спидометр показывает 25952. «Какое красивое число я проехал. Наверное, не скоро выпадет следующее красивое число», — подумал он. Однако через час двадцать минут на спидометре высветилось следующее красивое число. С какой скоростью ехал грузовик?
- 5** Есть двое песочных часов: на 5 минут и на 8 минут. Как можно с их помощью засечь 7 минут?
- 6** Разрежьте циферблат на две части так, чтобы **а)** сумма чисел в каждой части была одинаковой; **б)** сумма цифр в каждой части была одинаковой.
- 7** Сколько раз в сутки стрелки часов образуют прямой угол?
- 8** Петин будильник испорчен: он спешит на 4 минуты в час. В 7 часов вечера Петя установил на нем точное время и поставил звонок на 7 часов утра. Во сколько Петя проснётся?

Листок 18. Про время

- 1** В 4 часа дня с первого до последнего удара часов прошло 6 секунд. Сколько времени пройдет с первого до последнего удара в полдень?
- 2** На часах, которые ходят точно, оторвались все цифры. Остались только деления без подписей. Как узнать, куда нужно вернуть каждую цифру? (Других часов у вас нет.)
- 3** Катя на выполнение домашнего задания тратит на 10% больше времени, чем Лена. А Маша тратит на 10% меньше времени, чем Катя. Кто из девочек быстрее всего делает домашнее задание?
- 4** Водитель дальнобойного грузовика взглянул на приборы своей машины и увидел, что спидометр показывает 25952. «Какое красивое число я проехал. Наверное, не скоро выпадет следующее красивое число», — подумал он. Однако через час двадцать минут на спидометре высветилось следующее красивое число. С какой скоростью ехал грузовик?
- 5** Есть двое песочных часов: на 5 минут и на 8 минут. Как можно с их помощью засечь 7 минут?
- 6** Разрежьте циферблат на две части так, чтобы **а)** сумма чисел в каждой части была одинаковой; **б)** сумма цифр в каждой части была одинаковой.
- 7** Сколько раз в сутки стрелки часов образуют прямой угол?
- 8** Петин будильник испорчен: он спешит на 4 минуты в час. В 7 часов вечера Петя установил на нем точное время и поставил звонок на 7 часов утра. Во сколько Петя проснётся?

Листок 19. Разные задачи

- 1** У Кости есть 10 палочек длиной 50 см. Он хочет распилить их так, чтобы получилось 50 палочек длиной 10 см. Сколько распилов ему придется сделать?
- 2** Денежной единицей коротышек является фертинг. Можно ли с помощью десяти купюр номиналом в 1 и 5 фертингов отсчитать сумму в 31 фертинг?
- 3** В квадрате 7×7 закрасьте несколько клеток так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было ровно три закрашенные клетки.
- 4** У скольких трёхзначных чисел средней цифрой является 0?
- 5** На острове рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут) в некоторой компании каждый заявил остальным: «Среди вас — два рыцаря». Сколько рыцарей могло быть в этой компании?
- 6** В магазине продаётся шоколад в виде букв английского алфавита. Одинаковые буквы имеют одинаковую цену, а разные — разную. Известно, что слово ONE стоит \$6, слово TWO стоит \$9, а слово ELEVEN стоит \$16. Сколько стоит слово TWELVE?
- 7** Сеня взял в долг у Гоши 19 рублей, обязуясь вернуть их в течение 4 месяцев. Причём каждый месяц сумма выплаты должна расти, составлять целое число рублей и нацело делиться на сумму выплаты в предыдущем месяце. Какую сумму выплатит Сеня в последний месяц?
- 8** Найдите наибольшее натуральное число, любые две последовательные цифры которого образуют точный квадрат.

Листок 19. Разные задачи

- 1** У Кости есть 10 палочек длиной 50 см. Он хочет распилить их так, чтобы получилось 50 палочек длиной 10 см. Сколько распилов ему придется сделать?
- 2** Денежной единицей коротышек является фертинг. Можно ли с помощью десяти купюр номиналом в 1 и 5 фертингов отсчитать сумму в 31 фертинг?
- 3** В квадрате 7×7 закрасьте несколько клеток так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было ровно три закрашенные клетки.
- 4** У скольких трёхзначных чисел средней цифрой является 0?
- 5** На острове рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут) в некоторой компании каждый заявил остальным: «Среди вас — два рыцаря». Сколько рыцарей могло быть в этой компании?
- 6** В магазине продаётся шоколад в виде букв английского алфавита. Одинаковые буквы имеют одинаковую цену, а разные — разную. Известно, что слово ONE стоит \$6, слово TWO стоит \$9, а слово ELEVEN стоит \$16. Сколько стоит слово TWELVE?
- 7** Сеня взял в долг у Гоши 19 рублей, обязуясь вернуть их в течение 4 месяцев. Причём каждый месяц сумма выплаты должна расти, составлять целое число рублей и нацело делиться на сумму выплаты в предыдущем месяце. Какую сумму выплатит Сеня в последний месяц?
- 8** Найдите наибольшее натуральное число, любые две последовательные цифры которого образуют точный квадрат.

Листок 20. Идущие порознь

1 Винни-Пух и Пятачок вышли из своих домиков навстречу друг другу и встретились через 2 минуты. Через какое время Пятачок придет к дому Пуха, если скорость Винни-Пуха в два раза больше скорости Пятачка?

2 Винни-Пух вышел из гостей от Кристофера Робина на 1 минуту позже Пятачка. Через какое время он догонит Пятачка, если его скорость в два раза больше скорости Пятачка?

3 Тигра и Винни-Пух пошли в гости к Кристоферу Робину. Сначала Тигра побежал в два раза быстрее Винни-Пуха, но, пробежав половину дороги, неожиданно утомился и оставшийся путь прополз со скоростью в два раза меньшей скорости Винни-Пуха. Кто раньше встретился с Кристофером Робин — Тигра или Винни-Пух?

4 Тигра умеет бегать со скоростью 30 километров в час и очень хочет научиться тратить на каждый километр на одну минуту меньше. С какой скоростью нужно научиться бегать Тигре?

5 Упрямый Винни-Пух решил дойти пешком до Северного полюса. В 12 часов его нагнал Кристофер Робин на велосипеде и подвёз до того места, откуда до Северного полюса оставалось столько же, сколько Винни уже прошёл пешком. На Северном полюсе Винни-Пух был в 14 часов. Сколько времени потребуется Винни-Пуху на обратный путь пешком, если известно, что на велосипеде его везли со скоростью вдвое большей, чем он ходит пешком?

6 Юля и Таня делали уроки. Каждая из них начала с математики, затем выучила стихотворение, следом прочитала текст на английском языке и, наконец, выполнила упражнение по русскому языку. На каждый предмет у Юли уходило в два раза меньше времени, чем на предыдущий, а у Тани — в 4 раза меньше времени, чем на предыдущий. Начали и закончили они одновременно. Что делала Таня, когда Юля взялась за русский язык?

7 Двое бегут с разной скоростью вниз по эскалатору метро. Кто из них насчитает больше ступенек — кто бежит быстрее, или кто бежит медленнее?

Листок 20. Идущие порознь

1 Винни-Пух и Пятачок вышли из своих домиков навстречу друг другу и встретились через 2 минуты. Через какое время Пятачок придет к дому Пуха, если скорость Винни-Пуха в два раза больше скорости Пятачка?

2 Винни-Пух вышел из гостей от Кристофера Робина на 1 минуту позже Пятачка. Через какое время он догонит Пятачка, если его скорость в два раза больше скорости Пятачка?

3 Тигра и Винни-Пух пошли в гости к Кристоферу Робину. Сначала Тигра побежал в два раза быстрее Винни-Пуха, но, пробежав половину дороги, неожиданно утомился и оставшийся путь прополз со скоростью в два раза меньшей скорости Винни-Пуха. Кто раньше встретился с Кристофером Робин — Тигра или Винни-Пух?

4 Тигра умеет бегать со скоростью 30 километров в час и очень хочет научиться тратить на каждый километр на одну минуту меньше. С какой скоростью нужно научиться бегать Тигре?

5 Упрямый Винни-Пух решил дойти пешком до Северного полюса. В 12 часов его нагнал Кристофер Робин на велосипеде и подвёз до того места, откуда до Северного полюса оставалось столько же, сколько Винни уже прошёл пешком. На Северном полюсе Винни-Пух был в 14 часов. Сколько времени потребуется Винни-Пуху на обратный путь пешком, если известно, что на велосипеде его везли со скоростью вдвое большей, чем он ходит пешком?

6 Юля и Таня делали уроки. Каждая из них начала с математики, затем выучила стихотворение, следом прочитала текст на английском языке и, наконец, выполнила упражнение по русскому языку. На каждый предмет у Юли уходило в два раза меньше времени, чем на предыдущий, а у Тани — в 4 раза меньше времени, чем на предыдущий. Начали и закончили они одновременно. Что делала Таня, когда Юля взялась за русский язык?

7 Двое бегут с разной скоростью вниз по эскалатору метро. Кто из них насчитает больше ступенек — кто бежит быстрее, или кто бежит медленнее?

8 Однажды улитка заползла на вершину бамбука, который растёт так, что каждая его точка поднимается вверх с одной и той же скоростью. Путь вверх занял у улитки 7 часов. Отдохнув на вершине бамбука ровно час, она спустилась на землю за 8 часов. Во сколько раз скорость улитки больше скорости роста бамбука (обе скорости постоянны)?

8 Однажды улитка заползла на вершину бамбука, который растёт так, что каждая его точка поднимается вверх с одной и той же скоростью. Путь вверх занял у улитки 7 часов. Отдохнув на вершине бамбука ровно час, она спустилась на землю за 8 часов. Во сколько раз скорость улитки больше скорости роста бамбука (обе скорости постоянны)?

Листок 21. Разные задачи — II

1 Что больше: $\frac{2009}{2010}$ или $\frac{2010}{2011}$?

2 Напишите, используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4 ровно два раза, восьмизначное число, у которого между единицами стоит ровно 1 цифра, между двойками — ровно 2 цифры, между тройками — ровно 3 и между четверками — ровно 4 цифры.

3 Миша, Антон и Стёпа решали задачки. Миша сказал: «Я решил больше всех задач». Антон усомнился: «Либо ты решил не больше всех, либо Стёпа меньше всех». Стёпа сказал: «Я решил больше задач, чем Антон». Кто решил больше всех задач, если прав только один из мальчиков? Ответ объясните.

4 Денежной единицей коротышек является фертинг. В данный момент 1 фертинг стоит 3 руб. 55 коп. Сколько фертингов стоит 1 рубль? (Фертинг разменивается на 100 сантиков, при нецелом числе сантиков округление происходит в большую сторону.)

5 Решите ребус: ТИК+ТАК=АКТ. Буквами зашифрованы цифры. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.

6 Пятеро по очереди ели торт. Первый съел пятую его часть, второй — четверть остатка, третий — треть нового остатка, четвертый — половину того, что осталось после третьего, а пятый доел торт до конца. Кто из них съел больше всех?

7 В Циссильвании 1000 жителей. Трое из них — вампиры, но мало кому известно, кто именно. Заезжий писатель м-р Стокер попросил каждого жителя назвать двух человек, которые, по его мнению, являются вампирами. Каждый вампир назвал двух других вампиров, а остальные могли назвать кого угодно. Докажите, что, пользуясь данными опроса (и зная, что вампиров в Циссильвании ровно трое), м-р Стокер может выбрать себе проводника, не являющегося вампиром.

Листок 21. Разные задачи — II

1 Что больше: $\frac{2009}{2010}$ или $\frac{2010}{2011}$?

2 Напишите, используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4 ровно два раза, восьмизначное число, у которого между единицами стоит ровно 1 цифра, между двойками — ровно 2 цифры, между тройками — ровно 3 и между четверками — ровно 4 цифры.

3 Миша, Антон и Стёпа решали задачки. Миша сказал: «Я решил больше всех задач». Антон усомнился: «Либо ты решил не больше всех, либо Стёпа меньше всех». Стёпа сказал: «Я решил больше задач, чем Антон». Кто решил больше всех задач, если прав только один из мальчиков? Ответ объясните.

4 Денежной единицей коротышек является фертинг. В данный момент 1 фертинг стоит 3 руб. 55 коп. Сколько фертингов стоит 1 рубль? (Фертинг разменивается на 100 сантиков, при нецелом числе сантиков округление происходит в большую сторону.)

5 Решите ребус: ТИК+ТАК=АКТ. Буквами зашифрованы цифры. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.

6 Пятеро по очереди ели торт. Первый съел пятую его часть, второй — четверть остатка, третий — треть нового остатка, четвертый — половину того, что осталось после третьего, а пятый доел торт до конца. Кто из них съел больше всех?

7 В Циссильвании 1000 жителей. Трое из них — вампиры, но мало кому известно, кто именно. Заезжий писатель м-р Стокер попросил каждого жителя назвать двух человек, которые, по его мнению, являются вампирами. Каждый вампир назвал двух других вампиров, а остальные могли назвать кого угодно. Докажите, что, пользуясь данными опроса (и зная, что вампиров в Циссильвании ровно трое), м-р Стокер может выбрать себе проводника, не являющегося вампиром.

8 В однокруговом футбольном турнире (каждая команда с каждой сыграла ровно по одному матчу) участвовало 7 команд. По итогам турнира оказалось, что команды, занявшие призовые места, набрали ровно половину всех очков. Могло ли по итогам турнира оказаться ровно 6 ничьих? (за победу даётся 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0)

8 В однокруговом футбольном турнире (каждая команда с каждой сыграла ровно по одному матчу) участвовало 7 команд. По итогам турнира оказалось, что команды, занявшие призовые места, набрали ровно половину всех очков. Могло ли по итогам турнира оказаться ровно 6 ничьих? (за победу даётся 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0)

Ягубов.РФ

Листок 22. Составление уравнений

- 1** Решите уравнение $(x : 2 - 3) : 2 - 1 = 3$.
- 2** Деду 56 лет, внуку — 14. Через сколько лет дедушка будет вдвое старше внука?
- 3** Упаковка чая на 50 копеек дороже пакета кофе. Вася купил 7 упаковок чая и 6 пакетов кофе, потратив 68 рублей 50 копеек. Сколько стоит пакет кофе?
- 4** 9 одинаковых тетрадок стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же тетрадок — 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна тетрадка?
- 5** Представьте число 45 в виде суммы четырёх чисел так, что после прибавления 2 к первому числу, вычитания 2 из второго, умножения на 2 третьего и деления на 2 четвёртого эти числа станут равными.
- 6** В трёх ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором на 10 орехов меньше, чем в первом и третьем. Сколько орехов в третьем ящике?
- 7** Вифсла, Тофсла и Хемуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль — 5, а Тофсла — 4. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. (В себя самого снежками не кидаются.)
- 8** Ваня 28 ноября сказал: «Сегодня разность между числом прожитых мною полных месяцев и числом полных лет впервые стала равна 144». Когда у Вани День рождения?

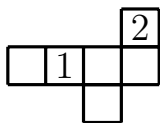
Листок 22. Составление уравнений

- 1** Решите уравнение $(x : 2 - 3) : 2 - 1 = 3$.
- 2** Деду 56 лет, внуку — 14. Через сколько лет дедушка будет вдвое старше внука?
- 3** Упаковка чая на 50 копеек дороже пакета кофе. Вася купил 7 упаковок чая и 6 пакетов кофе, потратив 68 рублей 50 копеек. Сколько стоит пакет кофе?
- 4** 9 одинаковых тетрадок стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же тетрадок — 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна тетрадка?
- 5** Представьте число 45 в виде суммы четырёх чисел так, что после прибавления 2 к первому числу, вычитания 2 из второго, умножения на 2 третьего и деления на 2 четвёртого эти числа станут равными.
- 6** В трёх ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором на 10 орехов меньше, чем в первом и третьем. Сколько орехов в третьем ящике?
- 7** Вифсла, Тофсла и Хемуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль — 5, а Тофсла — 4. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. (В себя самого снежками не кидаются.)
- 8** Ваня 28 ноября сказал: «Сегодня разность между числом прожитых мною полных месяцев и числом полных лет впервые стала равна 144». Когда у Вани День рождения?

Листок 23. Геометрические конструкции

1 У двух человек было два квадратных торта. Каждый сделал на своём торте по два прямолинейных разреза от края до края. При этом у одного получилось три куска, а у другого — четыре. Могло ли такое быть?

2 На рисунке изображена развертка кубика. На ней проставлены только числа: 1 и 2. Расставьте остальные числа: 3, 4, 5, 6 — так, чтобы сумма чисел на любых двух противоположных гранях была равна 7.



3 Можно ли на плоскости отметить 6 точек и соединить их отрезками так, чтобы каждая была соединена ровно с четырьмя другими?

4 Верно ли, что среди любых пяти отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник?

5 Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть?

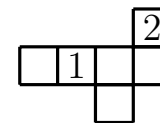
6 Поставьте на плоскости 9 точек так, чтобы никакие 4 не лежали на одной прямой, но из любых 6 нашлись 3, лежащие на одной прямой. (На рисунке проведите все прямые, на которых лежат по три отмеченные точки.)

7 Каждую грань куба разбили на четыре одинаковых квадрата. Можно ли каждый из получившихся квадратов покрасить в один из трёх цветов так, чтобы любые два квадрата, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета?

Листок 23. Геометрические конструкции

1 У двух человек было два квадратных торта. Каждый сделал на своём торте по два прямолинейных разреза от края до края. При этом у одного получилось три куска, а у другого — четыре. Могло ли такое быть?

2 На рисунке изображена развертка кубика. На ней проставлены только числа: 1 и 2. Расставьте остальные числа: 3, 4, 5, 6 — так, чтобы сумма чисел на любых двух противоположных гранях была равна 7.



3 Можно ли на плоскости отметить 6 точек и соединить их отрезками так, чтобы каждая была соединена ровно с четырьмя другими?

4 Верно ли, что среди любых пяти отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник?

5 Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть?

6 Поставьте на плоскости 9 точек так, чтобы никакие 4 не лежали на одной прямой, но из любых 6 нашлись 3, лежащие на одной прямой. (На рисунке проведите все прямые, на которых лежат по три отмеченные точки.)

7 Каждую грань куба разбили на четыре одинаковых квадрата. Можно ли каждый из получившихся квадратов покрасить в один из трёх цветов так, чтобы любые два квадрата, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета?

8 На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник размером 2×6 . Можно ли раскрасить узлы клеток, лежащие на границе и внутри этого прямоугольника (всего их 21), в два цвета так, чтобы никакие четыре одноцветных узла не оказались в вершинах прямоугольника со сторонами, идущими вдоль линий сетки?

8 На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник размером 2×6 . Можно ли раскрасить узлы клеток, лежащие на границе и внутри этого прямоугольника (всего их 21), в два цвета так, чтобы никакие четыре одноцветных узла не оказались в вершинах прямоугольника со сторонами, идущими вдоль линий сетки?

ЯГубов.РФ

Листок 24. Принцип крайнего

1 По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не превосходит одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.

2 По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны.

3 8 грибников собрали 37 грибов. Известно, что никакие двое не собрали грибов поровну и каждый нашёл хотя бы один гриб. Докажите, что какие-то двое из них собрали больше, чем какие-то пятеро.

4 На шахматной доске стоят несколько ладей. Обязательно ли найдется ладья, бьющая не более двух других? (Перепрыгивать через другие фигуры ладья не может.)

5 В стране есть несколько городов. Сумасшедший путешественник едет из города A в самый далёкий от него город B . Затем едет в самый далёкий от B город C и т.д. Докажите, что если город C не совпадает с городом A , то путешественник никогда не вернётся обратно в город A .

6 В космическом пространстве летают 2011 астероидов, на каждом из которых сидит астроном. Все расстояния между астероидами различны. Каждый астроном наблюдает за ближайшим астероидом. Докажите, что за одним из астероидов никто не наблюдает.

7 Гоша задумал четыре неотрицательных числа и посчитал их всевозможные попарные суммы (всего 6 штук). Какие числа он задумал, если эти суммы — 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Листок 24. Принцип крайнего

1 По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не превосходит одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.

2 По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны.

3 8 грибников собрали 37 грибов. Известно, что никакие двое не собрали грибов поровну и каждый нашёл хотя бы один гриб. Докажите, что какие-то двое из них собрали больше, чем какие-то пятеро.

4 На шахматной доске стоят несколько ладей. Обязательно ли найдется ладья, бьющая не более двух других? (Перепрыгивать через другие фигуры ладья не может.)

5 В стране есть несколько городов. Сумасшедший путешественник едет из города A в самый далёкий от него город B . Затем едет в самый далёкий от B город C и т.д. Докажите, что если город C не совпадает с городом A , то путешественник никогда не вернётся обратно в город A .

6 В космическом пространстве летают 2011 астероидов, на каждом из которых сидит астроном. Все расстояния между астероидами различны. Каждый астроном наблюдает за ближайшим астероидом. Докажите, что за одним из астероидов никто не наблюдает.

7 Гоша задумал четыре неотрицательных числа и посчитал их всевозможные попарные суммы (всего 6 штук). Какие числа он задумал, если эти суммы — 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Листок 25. Клетчатые задачи

1 Можно ли в квадрате 7×7 закрасить некоторые клетки так, чтобы в любом квадрате 2×2 была ровно одна закрашенная клетка?

2 а) Можно ли в клетках шахматной доски расставить целые числа так, чтобы сумма чисел в любом столбце была больше 100, а в любой строке — меньше 100?

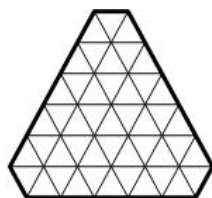
б) В клетках квадратной таблицы 10×10 стоят ненулевые цифры. В каждой строке и в каждом столбце из всех стоящих там цифр произвольным образом составлено десятизначное число. Может ли оказаться так, что из двадцати получившихся чисел ровно одно не делится на 3?

3 Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

4 В квадрате 7×7 закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по 3 закрашенные клетки.

5 В клетках шахматной доски расставлены натуральные числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел чётна. Докажите, что сумма чисел в чёрных клетках будет чётна.

6 Можно ли шестиугольный торт разрезать на 23 равных куса по указанным линиям?



7 Каждая грань куба с ребром 4 см разделена на клетки со стороной 1 см. Можно ли целиком оклеить 3 его грани, имеющие общую вершину, шестнадцатью бумажными прямоугольными полосками размером 1×3 так, чтобы границы полосок совпадали с границами клеток?

Листок 25. Клетчатые задачи

1 Можно ли в квадрате 7×7 закрасить некоторые клетки так, чтобы в любом квадрате 2×2 была ровно одна закрашенная клетка?

2 а) Можно ли в клетках шахматной доски расставить целые числа так, чтобы сумма чисел в любом столбце была больше 100, а в любой строке — меньше 100?

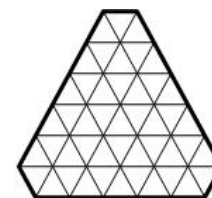
б) В клетках квадратной таблицы 10×10 стоят ненулевые цифры. В каждой строке и в каждом столбце из всех стоящих там цифр произвольным образом составлено десятизначное число. Может ли оказаться так, что из двадцати получившихся чисел ровно одно не делится на 3?

3 Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

4 В квадрате 7×7 закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по 3 закрашенные клетки.

5 В клетках шахматной доски расставлены натуральные числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел чётна. Докажите, что сумма чисел в чёрных клетках будет чётна.

6 Можно ли шестиугольный торт разрезать на 23 равных куса по указанным линиям?



7 Каждая грань куба с ребром 4 см разделена на клетки со стороной 1 см. Можно ли целиком оклеить 3 его грани, имеющие общую вершину, шестнадцатью бумажными прямоугольными полосками размером 1×3 так, чтобы границы полосок совпадали с границами клеток?

8 Бумага расчерчена на клеточки со стороной 1. Ваня вырезал из неё по клеточкам прямоугольник и нашёл его площадь и периметр. Таня отобрала у него ножницы и со словами «Смотри, фокус!» вырезала с краю прямоугольника по клеточкам квадратик, квадратик выкинула и объявила: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, какая была площадь прямоугольника, а площадь — как был периметр!» Ваня убедился, что Таня права.

- а) Квадратик какого размера вырезала и выкинула Таня?
- б) Приведите пример такого прямоугольника и такого квадрата.
- в) Прямоугольник каких размеров вырезал Ваня?

8 Бумага расчерчена на клеточки со стороной 1. Ваня вырезал из неё по клеточкам прямоугольник и нашёл его площадь и периметр. Таня отобрала у него ножницы и со словами «Смотри, фокус!» вырезала с краю прямоугольника по клеточкам квадратик, квадратик выкинула и объявила: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, какая была площадь прямоугольника, а площадь — как был периметр!» Ваня убедился, что Таня права.

- а) Квадратик какого размера вырезала и выкинула Таня?
- б) Приведите пример такого прямоугольника и такого квадрата.
- в) Прямоугольник каких размеров вырезал Ваня?

Листок 26. Примеры и контрпримеры

Если утверждение верно всегда, то докажите его, а если хоть в одном случае неверно, то покажите, что это за случай (приведите контрпример).

1 Приведите контрпример к каждому из следующих утверждений. **а)** Все числа, делящиеся на 4 и на 6, делятся на 24. **б)** Все прямоугольники являются квадратами. **в)** Все четырехугольники, у которых все стороны равны, являются квадратами.

2 Вася думает, что если площадь первого прямоугольника больше площади второго, а также периметр первого больше периметра второго, то из первого можно вырезать второй. Прав ли он?

3 Гриб называется плохим, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

4 Выберите 24 клетки в прямоугольнике 5×8 и проведите в каждой выбранной клетке одну из диагоналей так, чтобы никакие две проведенные диагонали не имели общих концов.

5 Барон Мюнхгаузен утверждает, что может для некоторого N так переставить числа $1, 2, \dots, N$ в другом порядке и затем выписать их все подряд без пробелов, что в результате получится многозначное число-палиндром (оно читается одинаково слева направо и справа налево). Не хвастает ли барон?

6 На доске написаны три различных числа от 1 до 9. Одним ходом разрешается либо прибавить к одному из чисел 1, либо вычесть из всех чисел по 1. Верно ли, что всегда можно добиться того, чтобы на доске остались только нули, сделав не более 23 ходов?

7 Рома придумал теорему: *Если число A является квадратом натурального числа B , а также каждая цифра числа A делится на 3, то и каждая цифра числа B делится на 3.* Верна ли ромина теорема?

Листок 26. Примеры и контрпримеры

Если утверждение верно всегда, то докажите его, а если хоть в одном случае неверно, то покажите, что это за случай (приведите контрпример).

1 Приведите контрпример к каждому из следующих утверждений. **а)** Все числа, делящиеся на 4 и на 6, делятся на 24. **б)** Все прямоугольники являются квадратами. **в)** Все четырехугольники, у которых все стороны равны, являются квадратами.

2 Вася думает, что если площадь первого прямоугольника больше площади второго, а также периметр первого больше периметра второго, то из первого можно вырезать второй. Прав ли он?

3 Гриб называется плохим, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

4 Выберите 24 клетки в прямоугольнике 5×8 и проведите в каждой выбранной клетке одну из диагоналей так, чтобы никакие две проведенные диагонали не имели общих концов.

5 Барон Мюнхгаузен утверждает, что может для некоторого N так переставить числа $1, 2, \dots, N$ в другом порядке и затем выписать их все подряд без пробелов, что в результате получится многозначное число-палиндром (оно читается одинаково слева направо и справа налево). Не хвастает ли барон?

6 На доске написаны три различных числа от 1 до 9. Одним ходом разрешается либо прибавить к одному из чисел 1, либо вычесть из всех чисел по 1. Верно ли, что всегда можно добиться того, чтобы на доске остались только нули, сделав не более 23 ходов?

7 Рома придумал теорему: *Если число A является квадратом натурального числа B , а также каждая цифра числа A делится на 3, то и каждая цифра числа B делится на 3.* Верна ли ромина теорема?

Листок 27. Логика — II

1 Петя сказал: «Если кот шипит, то рядом собака, и наоборот, если собаки рядом нет, то кот не шипит». Не сказал ли Петя чего-то лишнего?

2 Вася написал на доске натуральное число. После этого Катя и Маша сказали:

— У этого числа четная сумма цифр.

— У этого числа число нечетных цифр нечетно.

Сколько среди этих утверждений верны?

3 Среди 5 школьников A, B, C, D, E двое всегда лгут, а трое всегда говорят правду. Каждый из них сдавал зачет, причем все они знают, кто сдал зачет, а кто — нет. Они сделали следующие утверждения. A : « B не сдал зачет». B : « C не сдал зачет». C : « A не сдал зачет». D : « E не сдал зачет». E : « D не сдал зачет». Сколько из них зачет сдали?

4 В школе прошёл забег с участием 5 спортсменов, и все заняли разные места. На следующий день каждого из них спросили, какое место он занял, и каждый, естественно, назвал одно число от 1 до 5. Сумма их ответов оказалась равна 22. Какое наименьшее число врунишек было?

5 На острове живут племя рыцарей и племя лжецов. Однажды каждый житель острова заявил: «В моем племени у меня больше друзей, чем в другом». Может ли рыцарей быть меньше, чем лжецов?

6 Четырехзначное число таково, что все его цифры различны, а также известно, что числа 5860, 1674, 9432, 3017 содержат ровно по две цифры, принадлежащие этому числу, однако ни одна из них не стоит в том же месте, что и в этом числе. Найдите его.

7 2011 обитателей острова рыцарей и лжецов встали по кругу. Каждый из них по очереди произнес фразу: Оба мои соседа — лжецы. Если про рыцаря солгали, он обижается и становится лжецом. Если про лжеца сказали правду, он расстраивается и становится рыцарем. Когда лжецов было больше — в начале, или в конце?

Листок 27. Логика — II

1 Петя сказал: «Если кот шипит, то рядом собака, и наоборот, если собаки рядом нет, то кот не шипит». Не сказал ли Петя чего-то лишнего?

2 Вася написал на доске натуральное число. После этого Катя и Маша сказали:

— У этого числа четная сумма цифр.

— У этого числа число нечетных цифр нечетно.

Сколько среди этих утверждений верны?

3 Среди 5 школьников A, B, C, D, E двое всегда лгут, а трое всегда говорят правду. Каждый из них сдавал зачет, причем все они знают, кто сдал зачет, а кто — нет. Они сделали следующие утверждения. A : « B не сдал зачет». B : « C не сдал зачет». C : « A не сдал зачет». D : « E не сдал зачет». E : « D не сдал зачет». Сколько из них зачет сдали?

4 В школе прошёл забег с участием 5 спортсменов, и все заняли разные места. На следующий день каждого из них спросили, какое место он занял, и каждый, естественно, назвал одно число от 1 до 5. Сумма их ответов оказалась равна 22. Какое наименьшее число врунишек было?

5 На острове живут племя рыцарей и племя лжецов. Однажды каждый житель острова заявил: «В моем племени у меня больше друзей, чем в другом». Может ли рыцарей быть меньше, чем лжецов?

6 Четырехзначное число таково, что все его цифры различны, а также известно, что числа 5860, 1674, 9432, 3017 содержат ровно по две цифры, принадлежащие этому числу, однако ни одна из них не стоит в том же месте, что и в этом числе. Найдите его.

7 2011 обитателей острова рыцарей и лжецов встали по кругу. Каждый из них по очереди произнес фразу: Оба мои соседа — лжецы. Если про рыцаря солгали, он обижается и становится лжецом. Если про лжеца сказали правду, он расстраивается и становится рыцарем. Когда лжецов было больше — в начале, или в конце?

8 В поселке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку: лжецу или рыцарю — так, чтобы каждый на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?» ответил положительно? (Каждый знает про каждого из своих соседей, лжец он или рыцарь).

8 В поселке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку: лжецу или рыцарю — так, чтобы каждый на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?» ответил положительно? (Каждый знает про каждого из своих соседей, лжец он или рыцарь).

Ягубов.РФ

Листок 28. Расстановки ладей

- 1 а)** Расставьте 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга, тремя разными способами.
- б)** А сколько всего таких способов?
- 2** Ладья стоит на поле a1 шахматной доски. Может ли она обойти всю доску, побывав в каждой клетке ровно один раз и закончив в клетке h8? (Ладья может перепрыгивать через клетки, в которых уже побывала.)
- 3** На шахматную доску поставили несколько ладей произвольным образом. Докажите, что точно найдётся ладья, бьющая не более двух других.
- 4** На шахматной доске стоят 8 ладей, никакие две из которых не бьют друг друга. Докажите, что количество ладей в левом верхнем квадрате 4×4 равно количеству ладей в правом нижнем квадрате 4×4 .
- 5** На шахматной доске стоят 8 ладей, никакие две из которых не бьют друг друга. Докажите, что число ладей, стоящих на чёрных полях, чётно.
- 6** На шахматной доске 4×4 расположена фигура «летучая ладья», которая ходит так же, как обычная ладья, но не может за один ход встать на поле, соседнее с предыдущим. Может ли она за 16 ходов обойти всю доску, побывав в каждой клетке по разу, и вернувшись на исходное поле?
- 7** На полях a1, a2 и b1 шахматной доски стоят соответственно белая, чёрная и красная ладьи. Разрешается делать ходы по обычным правилам, однако после любого хода каждая ладья должна быть под защитой какой-нибудь другой ладьи (т.е. в одной горизонтали или вертикали с другой ладьёй). Сколько ещё других расстановок этих ладей можно получить из исходной расстановки?
- 8** На шахматную доску по очереди выставляются ладьи так, что каждая нечётная по очереди выставленная ладья никого не бьёт, а каждая чётная бьёт ровно одну выставленную ранее. Какое наибольшее количество ладей можно поставить на доску по этим правилам?

Листок 28. Расстановки ладей

- 1 а)** Расставьте 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга, тремя разными способами.
- б)** А сколько всего таких способов?
- 2** Ладья стоит на поле a1 шахматной доски. Может ли она обойти всю доску, побывав в каждой клетке ровно один раз и закончив в клетке h8? (Ладья может перепрыгивать через клетки, в которых уже побывала.)
- 3** На шахматную доску поставили несколько ладей произвольным образом. Докажите, что точно найдётся ладья, бьющая не более двух других.
- 4** На шахматной доске стоят 8 ладей, никакие две из которых не бьют друг друга. Докажите, что количество ладей в левом верхнем квадрате 4×4 равно количеству ладей в правом нижнем квадрате 4×4 .
- 5** На шахматной доске стоят 8 ладей, никакие две из которых не бьют друг друга. Докажите, что число ладей, стоящих на чёрных полях, чётно.
- 6** На шахматной доске 4×4 расположена фигура «летучая ладья», которая ходит так же, как обычная ладья, но не может за один ход встать на поле, соседнее с предыдущим. Может ли она за 16 ходов обойти всю доску, побывав в каждой клетке по разу, и вернувшись на исходное поле?
- 7** На полях a1, a2 и b1 шахматной доски стоят соответственно белая, чёрная и красная ладьи. Разрешается делать ходы по обычным правилам, однако после любого хода каждая ладья должна быть под защитой какой-нибудь другой ладьи (т.е. в одной горизонтали или вертикали с другой ладьёй). Сколько ещё других расстановок этих ладей можно получить из исходной расстановки?
- 8** На шахматную доску по очереди выставляются ладьи так, что каждая нечётная по очереди выставленная ладья никого не бьёт, а каждая чётная бьёт ровно одну выставленную ранее. Какое наибольшее количество ладей можно поставить на доску по этим правилам?

Листок 29. Длины и расстояния

1 Отрезок, равный 28 см, разделён на три (возможно неравных) отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

2 На стороне AC треугольника ABC отметили точку E . Известно, что периметр треугольника ABC равен 25 см, треугольника ABE — 15 см, треугольника BCE — 17 см. Найдите длину отрезка BE .

3 Длина стороны AC треугольника ABC равна 3.8 см, длина стороны AB — 0.6 см. Известно, что длина BC — целое число. Чему она может быть равна?

4 Прямоугольник разбит на 9 меньших прямоугольников. Периметры четырёх из них указаны на рисунке. Найдите периметр прямоугольника x .

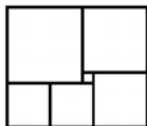
10		x
11		
12		13

5 Квадрат $ABCD$ со стороной 2 и квадрат $DEFK$ со стороной 1 стоят рядом на верхней стороне AK квадрата $AKLM$ со стороной 3. Между парами точек A и E , B и F , C и K , D и L натянуты паутинки. Паук поднимается снизу вверх по маршруту $AEFB$ и спускается по маршруту $CKDL$. Какой маршрут короче?

6 Один прямоугольник расположен внутри другого. Может ли так быть, что периметр внутреннего прямоугольника больше периметра внешнего?

7 На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5. Можно ли его разрезать на пять частей одинаковой площади, проводя разрезы только по линиям сетки так, чтобы суммарная длина разрезов была не больше 16?

8 Прямоугольник составлен из шести квадратов (см. рисунок). Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.



Листок 29. Длины и расстояния

1 Отрезок, равный 28 см, разделён на три (возможно неравных) отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

2 На стороне AC треугольника ABC отметили точку E . Известно, что периметр треугольника ABC равен 25 см, треугольника ABE — 15 см, треугольника BCE — 17 см. Найдите длину отрезка BE .

3 Длина стороны AC треугольника ABC равна 3.8 см, длина стороны AB — 0.6 см. Известно, что длина BC — целое число. Чему она может быть равна?

4 Прямоугольник разбит на 9 меньших прямоугольников. Периметры четырёх из них указаны на рисунке. Найдите периметр прямоугольника x .

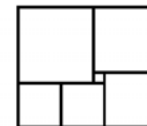
10		x
11		
12		13

5 Квадрат $ABCD$ со стороной 2 и квадрат $DEFK$ со стороной 1 стоят рядом на верхней стороне AK квадрата $AKLM$ со стороной 3. Между парами точек A и E , B и F , C и K , D и L натянуты паутинки. Паук поднимается снизу вверх по маршруту $AEFB$ и спускается по маршруту $CKDL$. Какой маршрут короче?

6 Один прямоугольник расположен внутри другого. Может ли так быть, что периметр внутреннего прямоугольника больше периметра внешнего?

7 На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5. Можно ли его разрезать на пять частей одинаковой площади, проводя разрезы только по линиям сетки так, чтобы суммарная длина разрезов была не больше 16?

8 Прямоугольник составлен из шести квадратов (см. рисунок). Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького равна 1.



Листок 30. Города и дороги

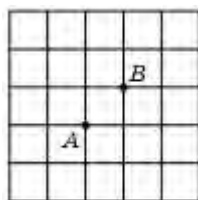
1 В некоторой стране **а)** 6; **б)** 20 городов, любые два из которых соединены дорогой. Сколько всего дорог в этой стране? **в)** Докажите, что если число городов равно n , то дорог $\frac{n(n-1)}{2}$.

2 В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник заметил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий делится на три. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

3 В государстве 100 городов, и из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

4 В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

5 Любопытный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане) до своего отеля (точка B). Он хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрёстке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



Листок 30. Города и дороги

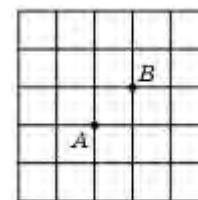
1 В некоторой стране **а)** 6; **б)** 20 городов, любые два из которых соединены дорогой. Сколько всего дорог в этой стране? **в)** Докажите, что если число городов равно n , то дорог $\frac{n(n-1)}{2}$.

2 В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник заметил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий делится на три. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

3 В государстве 100 городов, и из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

4 В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

5 Любопытный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане) до своего отеля (точка B). Он хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрёстке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



6 В стране 96 городов, из которых 24 — «областные». Некоторые пары городов соединены между собой дорогами (но не более чем одной), причём любой путь по дорогам между двумя обычными городами, если он есть, проходит хотя бы через один «областной» город. Какое наибольшее количество дорог могло быть в этой стране?

7 В чемпионате России по футболу участвуют 16 команд. Любые две команды играют друг с другом два раза: по разу на поле каждого из соперников. **а)** Какое максимальное и какое минимальное количество очков может набрать команда, участвующая в чемпионате России? **б)** Какое минимальное и какое максимальное количество очков могут набрать в сумме все команды? (В футболе за победу в матче даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.)

8 В шахматном турнире приняло участие несколько человек. Каждый сыграл с каждым ровно одну партию. Оказалось, что все, кроме Гоши, набрали одинаковое количество очков. Докажите, что Гоша либо у всех выиграл, либо всем проиграл. (В шахматах за победу даётся 1 очко, за ничью — $1/2$ очка, за поражению — 0 очков.)

6 В стране 96 городов, из которых 24 — «областные». Некоторые пары городов соединены между собой дорогами (но не более чем одной), причём любой путь по дорогам между двумя обычными городами, если он есть, проходит хотя бы через один «областной» город. Какое наибольшее количество дорог могло быть в этой стране?

7 В чемпионате России по футболу участвуют 16 команд. Любые две команды играют друг с другом два раза: по разу на поле каждого из соперников. **а)** Какое максимальное и какое минимальное количество очков может набрать команда, участвующая в чемпионате России? **б)** Какое минимальное и какое максимальное количество очков могут набрать в сумме все команды? (В футболе за победу в матче даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.)

8 В шахматном турнире приняло участие несколько человек. Каждый сыграл с каждым ровно одну партию. Оказалось, что все, кроме Гоши, набрали одинаковое количество очков. Докажите, что Гоша либо у всех выиграл, либо всем проиграл. (В шахматах за победу даётся 1 очко, за ничью — $1/2$ очка, за поражению — 0 очков.)