

Листок 30. Эйлеровы графы

Определение. *Граф* — это множество вершин и рёбер (отрезков, соединяющих две вершины).

Определение. *Путём* в графе называется последовательность вершин (необязательно всех различных), в которой каждые соседние вершины соединены ребром.

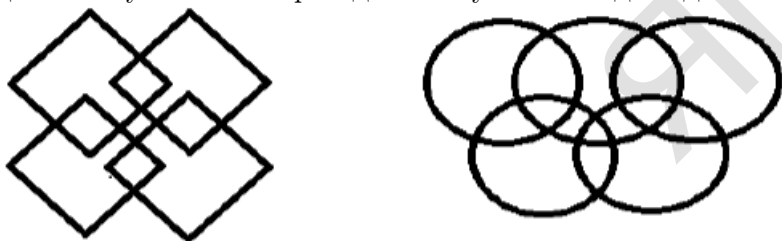
Определение. *Степенью вершины* графа называется число рёбер, выходящих из неё. Если это количество нечётно, то вершина называется нечётной, иначе — чётной.

Определение. *Циклом* в графе называется последовательность вершин, последовательно соединённых рёбрами и начинающихся и заканчивающихся в одной и той же вершине.

Определение. Путь, содержащий все рёбра графа, причём проходящий по каждому из них ровно один раз, называется *эйлеровым путём*.

Определение. *Эйлеров цикл* — это эйлеров путь, являющийся циклом, то есть замкнутый путь, проходящий через каждое ребро графа ровно по одному разу. **Определение.** Граф называется связным, если для любых двух вершин существует путь, их соединяющий.

1 Нарисуйте фигуры, изображенные на рисунке, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.



2 В стране имеется несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами, причем из города Шарамбарам выходит ровно n дорог. Известный путешественник выехал из одного из городов и объехал всю страну, проехав по каждой дороге ровно один раз. Закончился ли его путь в Шарамбаре, если

Листок 30. Эйлеровы графы

Определение. *Граф* — это множество вершин и рёбер (отрезков, соединяющих две вершины).

Определение. *Путём* в графе называется последовательность вершин (необязательно всех различных), в которой каждые соседние вершины соединены ребром.

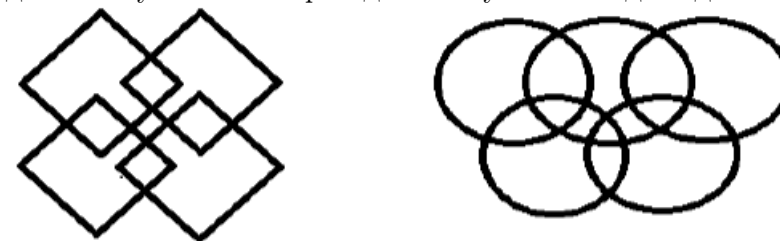
Определение. *Степенью вершины* графа называется число рёбер, выходящих из неё. Если это количество нечётно, то вершина называется нечётной, иначе — чётной.

Определение. *Циклом* в графе называется последовательность вершин, последовательно соединённых рёбрами и начинающихся и заканчивающихся в одной и той же вершине.

Определение. Путь, содержащий все рёбра графа, причём проходящий по каждому из них ровно один раз, называется *эйлеровым путём*.

Определение. *Эйлеров цикл* — это эйлеров путь, являющийся циклом, то есть замкнутый путь, проходящий через каждое ребро графа ровно по одному разу. **Определение.** Граф называется связным, если для любых двух вершин существует путь, их соединяющий.

1 Нарисуйте фигуры, изображенные на рисунке, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.



2 В стране имеется несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами, причем из города Шарамбарам выходит ровно n дорог. Известный путешественник выехал из одного из городов и объехал всю страну, проехав по каждой дороге ровно один раз. Закончился ли его путь в Шарамбаре, если

- а) он начал путь в городе Шарамбарам и n чётно;
- б) он начал путь в городе Шарамбарам и n нечётно;
- в) он начал путь в другом городе и n чётно;
- г) он начал путь в другом городе и n нечётно?

3 Задача Эйлера о Кенигсбергских мостах. Через город Кёнигсберг протекает река, в русле которой расположены два острова. С большего острова ведет по два моста на каждый из берегов и один мост на меньший остров. Кроме этого моста с меньшего острова ведет по одному мосту на каждый из берегов. Некто хочет совершить прогулку по городу, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Удастся ли ему это?

4 Докажите, что если в графе более двух вершин с нечетными степенями, то в этом графе нет эйлерова пути.

5 Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть цикл.

6 Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то рёбра этого графа можно разбить на несколько циклов.

7 Докажите, что если два цикла имеют общую вершину, то их можно объединить в один самопересекающийся цикл.

8 Докажите, что если в связном графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть эйлеров цикл.

9 Докажите, что если в связном графе ровно две вершины с нечетными степенями, то в этом графе есть эйлеров путь.

10 При каких n правильный n -угольник со всеми его диагоналями можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги и не проводя повторно по нарисованным отрезкам?

11 Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

- а) он начал путь в городе Шарамбарам и n чётно;
- б) он начал путь в городе Шарамбарам и n нечётно;
- в) он начал путь в другом городе и n чётно;
- г) он начал путь в другом городе и n нечётно?

3 Задача Эйлера о Кенигсбергских мостах. Через город Кёнигсберг протекает река, в русле которой расположены два острова. С большего острова ведет по два моста на каждый из берегов и один мост на меньший остров. Кроме этого моста с меньшего острова ведет по одному мосту на каждый из берегов. Некто хочет совершить прогулку по городу, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Удастся ли ему это?

4 Докажите, что если в графе более двух вершин с нечетными степенями, то в этом графе нет эйлерова пути.

5 Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть цикл.

6 Докажите, что если в графе степени всех вершин чётны, то рёбра этого графа можно разбить на несколько циклов.

7 Докажите, что если два цикла имеют общую вершину, то их можно объединить в один самопересекающийся цикл.

8 Докажите, что если в связном графе степени всех вершин чётны, то в этом графе есть эйлеров цикл.

9 Докажите, что если в связном графе ровно две вершины с нечетными степенями, то в этом графе есть эйлеров путь.

10 При каких n правильный n -угольник со всеми его диагоналями можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги и не проводя повторно по нарисованным отрезкам?

11 Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Диагностическая работа

- 1 Таня ехала в пятом вагоне с конца поезда, а Маша — в шестом с начала. Сколько вагонов было в поезде, если Таня и Маша ехали в соседних вагонах?
- 2 Какое максимальное число королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?
- 3 В выборах участвуют 10 разных кандидатов. Сколькими способами можно заполнить избирательный бюллетень, отметив в нём ни одного, одного или нескольких (можно даже всех) кандидатов?
- 4 Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка: а) в любом квадратике 2×2 ; б) в любом уголке из трёх клеточек?
- 5 При каких k и b график линейной функции $y = kx + b$ параллелен прямой $2x + 3y = 5$ и проходит через точку $(0; -3)$?
- 6 Назовём *креативными* все натуральные числа, в которых сумма каждых двух цифр, стоящих через одну, делится на 5. Сколько существует шестизначных креативных чисел, оканчивающихся на 6?
- 7 Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + 2x + 4y^2 + 4y + 5$.
- 8 Биссектриса треугольника образует с его сторонами углы 30° и 45° . Найдите углы треугольника.
- 9 Назовём натуральное число *возрастающим*, если каждая его цифра, начиная со второй, больше предыдущей. Каких возрастающих чисел больше: 4-значных или 5-значных, и на сколько? Число не может начинаться с нуля.
- 10 В футбольном турнире участвовало пять команд. Каждая пара команд должна была сыграть ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями часть игр отменили. Оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно, если за победу начислялось 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0?

Диагностическая работа

- 1 Таня ехала в пятом вагоне с конца поезда, а Маша — в шестом с начала. Сколько вагонов было в поезде, если Таня и Маша ехали в соседних вагонах?
- 2 Какое максимальное число королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?
- 3 В выборах участвуют 10 разных кандидатов. Сколькими способами можно заполнить избирательный бюллетень, отметив в нём ни одного, одного или нескольких (можно даже всех) кандидатов?
- 4 Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка: а) в любом квадратике 2×2 ; б) в любом уголке из трёх клеточек?
- 5 При каких k и b график линейной функции $y = kx + b$ параллелен прямой $2x + 3y = 5$ и проходит через точку $(0; -3)$?
- 6 Назовём *креативными* все натуральные числа, в которых сумма каждых двух цифр, стоящих через одну, делится на 5. Сколько существует шестизначных креативных чисел, оканчивающихся на 6?
- 7 Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + 2x + 4y^2 + 4y + 5$.
- 8 Биссектриса треугольника образует с его сторонами углы 30° и 45° . Найдите углы треугольника.
- 9 Назовём натуральное число *возрастающим*, если каждая его цифра, начиная со второй, больше предыдущей. Каких возрастающих чисел больше: 4-значных или 5-значных, и на сколько? Число не может начинаться с нуля.
- 10 В футбольном турнире участвовало пять команд. Каждая пара команд должна была сыграть ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями часть игр отменили. Оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно, если за победу начислялось 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0?