

Листок 17. Комбинаторика — 1

Определение. Число способов выбрать из n различных предметов k предметов (порядок, в котором они выбираются, неважен) называется числом сочетаний из n по k и обозначается C_n^k (читается «цэ из эн по ка»).

1 Пользуясь только определением, докажите следующие равенства:

а) $C_n^0 = C_n^n = 1$;

б) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;

в) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

г) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;

д) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

2 а) Сколько способов из 16 инопланетян выбрать капитана тарелки, помощника капитана и повара? **б)** Сколько способов распределить эти роли между тремя инопланетянами? **в)** Сколько способов из 16 инопланетян выбрать трёх? **г)** Есть n инопланетян, сколькими способами можно поставить k из них в очередь на медосмотр перед полётом? **д)** Сколько способов из n инопланетян выбрать k инопланетян?

3 На плоскости отмечено 10 точек, и никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько есть треугольников с вершинами в этих точках?

4 Инопланетяне играют в шахматы на доске 8×8 . Сколькими способами можно поставить на эту доску 8 **а)** разных, **б)** одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?

5 Двенадцать инопланетян решили навестить знакомых с Земли. У них есть 4 тарелки разных цветов, в каждую из которых входит ровно трое. Сколько у инопланетян способов разместиться в этих тарелках?

6 Сколькими есть способов пройти из левой нижней клетки прямоугольника 5×9 в правую верхнюю, если можно ходить только вверх и вправо?

7 22 дерева растут в круг. Сколько существует способов натянуть

Листок 17. Комбинаторика — 1

Определение. Число способов выбрать из n различных предметов k предметов (порядок, в котором они выбираются, неважен) называется числом сочетаний из n по k и обозначается C_n^k (читается «цэ из эн по ка»).

1 Пользуясь только определением, докажите следующие равенства:

а) $C_n^0 = C_n^n = 1$;

б) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;

в) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

г) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;

д) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

2 а) Сколько способов из 16 инопланетян выбрать капитана тарелки, помощника капитана и повара? **б)** Сколько способов распределить эти роли между тремя инопланетянами? **в)** Сколько способов из 16 инопланетян выбрать трёх? **г)** Есть n инопланетян, сколькими способами можно поставить k из них в очередь на медосмотр перед полётом? **д)** Сколько способов из n инопланетян выбрать k инопланетян?

3 На плоскости отмечено 10 точек, и никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько есть треугольников с вершинами в этих точках?

4 Инопланетяне играют в шахматы на доске 8×8 . Сколькими способами можно поставить на эту доску 8 **а)** разных, **б)** одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?

5 Двенадцать инопланетян решили навестить знакомых с Земли. У них есть 4 тарелки разных цветов, в каждую из которых входит ровно трое. Сколько у инопланетян способов разместиться в этих тарелках?

6 Сколькими есть способов пройти из левой нижней клетки прямоугольника 5×9 в правую верхнюю, если можно ходить только вверх и вправо?

7 22 дерева растут в круг. Сколько существует способов натянуть

между ними две одинаковых верёвки так, чтоб они не пересекались? (Если концы верёвок привязаны к одному дереву, то они тоже пересекаются!)

8 а) 7 ящиков занумерованы числами от 1 до 7. Сколько есть способов разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым? **б)** А если некоторые ящики могут оказаться пустыми?

между ними две одинаковых верёвки так, чтоб они не пересекались? (Если концы верёвок привязаны к одному дереву, то они тоже пересекаются!)

8 а) 7 ящиков занумерованы числами от 1 до 7. Сколько есть способов разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым? **б)** А если некоторые ящики могут оказаться пустыми?

ЯГубов.РФ

Листок 18. Комбинаторика — 2

Построим (бесконечный) равнобедренный треугольник из натуральных чисел по следующим правилам:

- в вершине и вдоль боковых сторон стоят единицы;
- в каждой следующей строке на одно число больше, чем в предыдущей;
- каждое число, кроме уже написанных единиц, равно сумме двух чисел, стоящих в предыдущей строке чуть левее и чуть правее.

Получим такой треугольник:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
 \end{array}$$

1 а) Выпишите треугольник Паскаля до десятой строки включительно (первой считаем строку, состоящую из двух единиц).

б) Сколько чисел в 2018-й строке треугольника Паскаля?

2 Докажите, что в каждой строке треугольника Паскаля числа до середины идут по возрастанию, а от середины — по убыванию.

Подсказка: докажите, что если это верно для строки с номером n , то это верно и для строки с номером $n + 1$.

3 а) Во сколько раз сумма чисел в шестой строке треугольника Паскаля больше суммы чисел в его пятой строке? **б)** Тот же вопрос про 2017-ую и 2018-ую строки. **в)** Чему равна сумма цифр в n -ой строке?

4 а) Поставим знаки "+" и "-" между числами в 99-ой строке треугольника Паскаля. Между первым и вторым числом поставим знак "-", между вторым и третьим "+", между третьим и четвёртым "-", потом опять "+", и так далее. Докажите, что значение полученного выражения равно нулю. **б)** То же верно и для 100-ой строки. Докажите!

Листок 18. Комбинаторика — 2

Построим (бесконечный) равнобедренный треугольник из натуральных чисел по следующим правилам:

- в вершине и вдоль боковых сторон стоят единицы;
- в каждой следующей строке на одно число больше, чем в предыдущей;
- каждое число, кроме уже написанных единиц, равно сумме двух чисел, стоящих в предыдущей строке чуть левее и чуть правее.

Получим такой треугольник:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
 \end{array}$$

1 а) Выпишите треугольник Паскаля до десятой строки включительно (первой считаем строку, состоящую из двух единиц).

б) Сколько чисел в 2018-й строке треугольника Паскаля?

2 Докажите, что в каждой строке треугольника Паскаля числа до середины идут по возрастанию, а от середины — по убыванию.

Подсказка: докажите, что если это верно для строки с номером n , то это верно и для строки с номером $n + 1$.

3 а) Во сколько раз сумма чисел в шестой строке треугольника Паскаля больше суммы чисел в его пятой строке? **б)** Тот же вопрос про 2017-ую и 2018-ую строки. **в)** Чему равна сумма цифр в n -ой строке?

4 а) Поставим знаки "+" и "-" между числами в 99-ой строке треугольника Паскаля. Между первым и вторым числом поставим знак "-", между вторым и третьим "+", между третьим и четвёртым "-", потом опять "+", и так далее. Докажите, что значение полученного выражения равно нулю. **б)** То же верно и для 100-ой строки. Докажите!

5 а) Будем двигаться по треугольнику Паскаля, переходя от каждой буквы только к букве, стоящей в следующей строке чуть правее или чуть левее. Докажите, что количество способов дойти по таким правилам от самой верхней единицы до любого числа n в треугольнике Паскаля в точности равно n . **б)** Докажите, что k -ое число в n -ой строке равно C_n^k . (Мы нумеруем числа в строке, начиная с нуля.)

6 (Бином Ньютона) Докажите, что если раскрыть скобки и привести подобные в выражении $(a + b)^n$, то для всех $0 \leq k \leq n$ коэффициент при $a^{n-k}b^k$ будет равен C_n^k :

$$(a + b)^n = C_n^0 \cdot a^n b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k \cdot a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n \cdot a^0 b^n$$

7 Пользуясь биномом Ньютона посчитайте **а)** 21^4 ; **б)** 19^4 .

8 В разложении выражения $(x + y)^n$ с помощью бинома Ньютона второй член равен 240, третий — 720, а четвертый — 1080. Найдите x , y и n , если известно, что x и y натуральные.

9 С помощью бинома Ньютона докажите, что:

а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;

б) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n \cdot C_n^n = 0$;

в) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;

г) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

5 а) Будем двигаться по треугольнику Паскаля, переходя от каждой буквы только к букве, стоящей в следующей строке чуть правее или чуть левее. Докажите, что количество способов дойти по таким правилам от самой верхней единицы до любого числа n в треугольнике Паскаля в точности равно n . **б)** Докажите, что k -ое число в n -ой строке равно C_n^k . (Мы нумеруем числа в строке, начиная с нуля.)

6 (Бином Ньютона) Докажите, что если раскрыть скобки и привести подобные в выражении $(a + b)^n$, то для всех $0 \leq k \leq n$ коэффициент при $a^{n-k}b^k$ будет равен C_n^k :

$$(a + b)^n = C_n^0 \cdot a^n b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k \cdot a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n \cdot a^0 b^n$$

7 Пользуясь биномом Ньютона посчитайте **а)** 21^4 ; **б)** 19^4 .

8 В разложении выражения $(x + y)^n$ с помощью бинома Ньютона второй член равен 240, третий — 720, а четвертый — 1080. Найдите x , y и n , если известно, что x и y натуральные.

9 С помощью бинома Ньютона докажите, что:

а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;

б) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n \cdot C_n^n = 0$;

в) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;

г) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.