

Листок 16. Равенства и неравенства

Во всех задачах ниже латинскими буквами $a, b, c, \dots$ обозначены произвольные действительные числа (если не указано иное).

1 Пусть x — произвольное действительное число. Что можно сказать о знаках чисел: $-x$; $x - 1$; $1 - x$; x^2 ; $(x - 1)^2$; x^3 ; x^{2n} ; x^{2n+1} (n — натуральное число)?

2 а) Пусть $a < b$. Верно ли, что $a^2 < b^2$? **б)** Пусть $a^2 < b^2$. Верно ли, что $a^3 < b^3$?

3 Пусть $a < b < c$. Какие из следующих двойных неравенств возможны:

а) $a^2 < b^2 < c^2$; **б)** $b^2 < c^2 < a^2$; **в)** $b^2 < a^2 < c^2$; **г)** $a^2 < c^2 < b^2$; **д)** $c^2 < b^2 < a^2$?

4 Представьте выражения в виде полных квадратов: **а)** $x^2 + 2x + 1$; **б)** $x^2 + 6x + 9$; **в)** $16x^2 + 8x + 1$; **г)** $4u^2 - 20uv + 25v^2$; **д)** $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.

5 Докажите неравенства при всех значениях переменных: **а)** $x^2 - 2x + 1 \geq 0$; **б)** $-4x^2 - 4x - 1 \leq 0$; **в)** $x^2 + 6x + 10 \geq 1$; **г)** $(x - y)(y - x + 6) - 9 \leq 0$; **д)** $u^2 - 2uv + 2v^2 + 2v + 2 > 0$.

6 а) Докажите неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Когда оно обращается в равенство?

б) Периметр прямоугольника равен 4. Какую наибольшую площадь он может иметь?

7 Решите уравнения: **а)** $(x - 1)^2 = 0$; **б)** $(x - 1)^2 + (2y + 5)^4 = 0$; **в)** $x^2 = 1$; **г)** $(x - 1)^2 = 1$; **д)** $x^2 + 6x + 8 = 0$.

8 а) Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$. **б)** Когда оно обращается в равенство?

9 Докажите неравенство: $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$;

Листок 16. Равенства и неравенства

Во всех задачах ниже латинскими буквами $a, b, c, \dots$ обозначены произвольные действительные числа (если не указано иное).

1 Пусть x — произвольное действительное число. Что можно сказать о знаках чисел: $-x$; $x - 1$; $1 - x$; x^2 ; $(x - 1)^2$; x^3 ; x^{2n} ; x^{2n+1} (n — натуральное число)?

2 а) Пусть $a < b$. Верно ли, что $a^2 < b^2$? **б)** Пусть $a^2 < b^2$. Верно ли, что $a^3 < b^3$?

3 Пусть $a < b < c$. Какие из следующих двойных неравенств возможны:

а) $a^2 < b^2 < c^2$; **б)** $b^2 < c^2 < a^2$; **в)** $b^2 < a^2 < c^2$; **г)** $a^2 < c^2 < b^2$; **д)** $c^2 < b^2 < a^2$?

4 Представьте выражения в виде полных квадратов: **а)** $x^2 + 2x + 1$; **б)** $x^2 + 6x + 9$; **в)** $16x^2 + 8x + 1$; **г)** $4u^2 - 20uv + 25v^2$; **д)** $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.

5 Докажите неравенства при всех значениях переменных: **а)** $x^2 - 2x + 1 \geq 0$; **б)** $-4x^2 - 4x - 1 \leq 0$; **в)** $x^2 + 6x + 10 \geq 1$; **г)** $(x - y)(y - x + 6) - 9 \leq 0$; **д)** $u^2 - 2uv + 2v^2 + 2v + 2 > 0$.

6 а) Докажите неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Когда оно обращается в равенство?

б) Периметр прямоугольника равен 4. Какую наибольшую площадь он может иметь?

7 Решите уравнения: **а)** $(x - 1)^2 = 0$; **б)** $(x - 1)^2 + (2y + 5)^4 = 0$; **в)** $x^2 = 1$; **г)** $(x - 1)^2 = 1$; **д)** $x^2 + 6x + 8 = 0$.

8 а) Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$. **б)** Когда оно обращается в равенство?

9 Докажите неравенство: $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$;