

VII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2011

17 января 2011 года, 9.00–13.30

Второй день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Найдите наибольшее возможное число множеств, удовлетворяющих одновременно следующим условиям:

- i) каждое множество состоит из 4 элементов;
- ii) любые два различных множества имеют ровно два общих элемента;
- iii) никакие два элемента не принадлежат одновременно всем множествам.

5. Пусть n – целое число, $n > 1$. Элемент a из множества $M = \{1, 2, \dots, n^2-1\}$ назовем *хорошим*, если найдется элемент b из M , такой, что число $ab-b$ делится на n^2 . Далее, элемент a назовем *очень хорошим*, если a^2-a делится на n^2 . Пусть g и v – число хороших и число очень хороших элементов в M соответственно.

Докажите, что $v^2 + v \leq g \leq n^2 - n$.

6. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K , точки M и N – середины диагоналей AC и BD соответственно. Описанные окружности треугольников ADM и BCM пересекаются в точках M и L . Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности (все эти точки предполагаются различными).

VII International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2011

17 January, 2011, 9.00–13.30

Second day

(Each problem is worth 7 points)

4. Find the maximum number of sets which simultaneously satisfy the following conditions:

- i) any of the sets consists of 4 elements;
- ii) any two different sets have exactly 2 common elements;
- iii) no two elements are common to all the sets.

5. Let n be an integer, $n > 1$. An element a of the set $M = \{1, 2, \dots, n^2-1\}$ is called *good* if there exists some element b of M such that $ab-b$ is divisible by n^2 . Furthermore, an element a is called *very good*, if a^2-a is divisible by n^2 . Let g denote the number of good elements in M and v denote the number of very good elements in M .

Prove that $v^2 + v \leq g \leq n^2 - n$.

6. Diagonals of the cyclic quadrilateral $ABCD$ intersect at point K ; M and N are midpoints of the diagonals AC and BD respectively. The circumscribed circles of the triangles ADM and BCM intersect at points M and L . Prove that the points K, L, M and N lie on a circle (all the points are supposed to be different).