

Ю.В. Садовничий
О.Д. Фролкина

ТЕСТЫ

ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ
И АБИТУРИЕНТОВ

МАТЕМАТИКА

БЕЗ
РЕПЕТИТОРА ...



УНЦ ДО

ФИЗМАТЛИТ



Ю.В. Садовничий, О.Д. Фролкина

МАТЕМАТИКА

Тесты для старшеклассников и абитуриентов

Учебное пособие



УНЦ ДО



ФИЗМАТЛИТ

**Москва
2003**

УДК 373.167.1:51+51(075.3)

ББК 22.1я729

С14

С14 Садовничий Ю.В., Фролкина О.Д.

Математика. Тесты для старшеклассников и абитуриентов.

Учебное пособие. - М.: Издательство УНЦ ДО, ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 208 с. - (Серия «В помощь абитуриенту»)

ISBN 5-88800-209-7

ISBN 5-9221-0387-3

Сборник тестов состоит из трех частей. Первая часть содержит тестовые задания по основным разделам элементарной математики, вторая часть состоит из тестов, предлагавшихся в последние годы на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова, а в третьей собраны задачи устных экзаменов механико-математического, ВМиК и геологического факультетов МГУ.

Сборник будет полезен абитуриентам, желающим самостоятельно подготовиться к вступительному экзамену или тестированию по математике, а также учителям математики для проведения занятий со школьниками.

ISBN 5-88800-209-7
ISBN 5-9221-0387-3

© Садовничий Ю.В., Фролкина О.Д., 2003

© Учебно-научный центр довузовского образования, 2003

© Оформление. УНЦ ДО, 2003

Содержание

Раздел I. Тесты для самопроверки

Условия	5
Ответы	47
Решения	51

Раздел II. Тесты механико-математического ф-та

Условия	108
Ответы	118
Решения	122

Раздел III. Задачи устных экзаменов

Условия

Механико-математический факультет	152
Факультет ВМК	157
Геологический факультет	166

Решения и ответы

Механико-математический факультет	173
Факультет ВМК	181
Геологический факультет	197

Введение

Эта книга адресована школьникам старших классов средних школ и абитуриентам высших учебных заведений. Она состоит из трех частей. Первая часть содержит тестовые задания по основным разделам элементарной математики, вторая часть состоит из тестов, предлагавшихся в последние годы на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова, а в третьей собраны задачи устных экзаменов механико-математического, ВМиК и геологического факультетов МГУ.

При работе с первой частью читателю предлагается выполнить тесты, которые позволят определить уровень его знаний по математике и степень подготовленности к вступительным экзаменам в вуз. Каждый тест содержит 18 задач, расположенных в порядке возрастания их сложности. К каждой задаче приведено несколько ответов, из которых Вам необходимо выбрать единственный, являющийся верным. После этого в разделе “ответы” можно узнать номер правильного ответа к каждой задаче. В том случае, если не все полученные Вами ответы являются верными, в разделе “решения” можно ознакомиться с решениями интересующих Вас задач.

Тесты второго раздела предлагались на мех-мате МГУ для отбора абитуриентов на олимпиады этого факультета, при этом требовалось только написать к каждой задаче верный ответ. Варианты этих тестов также будут полезны абитуриентам нематематических специальностей для подготовки к письменному экзамену по математике. Все задачи этого раздела снабжены подробными решениями.

И, наконец, третья часть книги позволит Вам подготовиться к устному экзамену по математике. Для этого также будет необходимо ознакомиться с программой по математике для поступающих в выбранный Вами вуз, и изучить ответы на вопросы программы, например, по школьным учебникам.

Авторы надеются, что данная книга окажется полезной абитуриентам, желающим самостоятельно подготовиться к вступительному экзамену либо тестированию по математике, а также учителям математики для проведения занятий со школьниками.

Желаем успехов!

І. Тесты для самопроверки

Тест 1

- 1.1. Указать минимальное целое число, удовлетворяющее неравенству $x^3 + 27 > 0$.
- 1) -3 ; 2) 0 ; 3) -2 ; 4) 1 ; 5) 2 .
- 1.2. В театре 16 рядов, в первом ряду 10 мест, в последнем — 70. Известно, что каждый следующий ряд имеет на одно и то же число мест больше, чем предыдущий. Сколько всего мест в театре?
- 1) 640; 2) 360; 3) 720; 4) так не может быть.
- 1.3. Существует ли выпуклый пятиугольник, все стороны которого равны, но в который нельзя вписать окружность?
- 1) да; 2) нет.
- 1.4. Из-под земли бьют четыре источника. Первый заполняет бассейн за 1 день, второй — за 2 дня, третий — за 3 дня, четвертый — за 4 дня. Сколько времени потребуется четырем источникам вместе, чтобы заполнить бассейн? (задача Герона Александрийского, I в. до н. э.)
- 1) 10 дней; 2) 4 дня; 3) $\frac{25}{12}$ дня; 4) $\frac{12}{25}$ дня.
- 1.5. Найти все решения уравнения $x = \cos(\arcsin x)$.
- 1) $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $x = 0$; 4) $x = 1$;
5) приведенные ответы неверны.

1.6. Пусть $f(x) = x^2 - 1$. Найти $f(f(x))$.

- 1) 0; 2) $x^4 - 2$; 3) $x^4 - 2x^2$; 4) $2x^2 - 1$.

1.7. Найти максимальное значение выражения

$$5 \cos^2 2x + 48 \sin x \cos x \cos 2x - 5 \sin^2 2x.$$

- 1) 13; 2) 48; 3) 53; 4) 29; 5) 5.

1.8. Сколько раз нужно взять слагаемым число $a \neq 0$, чтобы получить a^n (n — натуральное число)?

- 1) n ; 2) n^n ; 3) $n!$; 4) a^{n-1} ; 5) n^{a-1} .

1.9. Решить уравнение

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{x}}}} = \frac{139}{97}.$$

- 1) $\{3\}$; 2) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; 3) $\left\{3; \frac{1}{3}\right\}$; 4) $\emptyset$.

1.10. Среди нулей функции $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ найти наименьшее по модулю число.

- 1) 0; 2) $\frac{1}{\pi}$; 3) $\pm \frac{1}{\pi}$; 4) нельзя найти.

1.11. Какая из прямых: $y = 20x - 2$, $y = 3x - 16$ касается параболы $y = 9x^2 - 4x + 14$?

- 1) первая; 2) вторая; 3) обе; 4) ни одна.

1.12. Решить неравенство $5^x - 13^x + 12^x \geq 0$.

- 1) $\mathbb{R}$; 2) $[1, +\infty)$; 3) $(-\infty, 1]$; 4) $(-\infty, 2]$; 5) $[2, +\infty)$

1.13. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1 метр. Точка O — центр грани $ABCD$. Скорость мухи 10 сантиметров в минуту. Найти минимальное целое число минут, которое потребуется мухе, чтобы попасть по поверхности куба из точки O в вершину A_1 .

- 1) 15; 2) 16; 3) $5\sqrt{901}$; 4) $5\sqrt{10}$.

1.14. Что можно сказать о числе* $\frac{(n+5)!}{n!}$?

- 1) не всегда делится на 120;
2) может быть нечетным;
3) может быть нецелым;
4) может оканчиваться на 5;
5) всегда делится на 120.

1.15. В классе 15 человек занимаются английским языком, 10 — французским. Двое изучают оба языка. Сколько человек в классе, если известно, что каждый изучает хотя бы один язык?

- 1) 21; 2) 25; 3) 27; 4) 23; 5) нельзя найти.

1.16. Прямоугольный лист бумаги длины 4, ширины 3 согнули по диагонали и склеили. Найти площадь полученной фигуры.

- 1) 12; 2) 6; 3) $\frac{117}{16}$; 4) $\frac{75}{16}$.

1.17. Высоты треугольника равны 3, 4 и 5. Определить вид треугольника.

- 1) прямоугольный; 2) остроугольный; 3) тупоугольный.

1.18. Известно, что $a + c < 0$ и уравнение $ax^2 + c = 0$ не имеет решений. Что можно сказать о числе a ?

- 1) всегда положительно; 2) всегда неположительно;
3) всегда равно нулю; 4) ничего из перечисленного.

*Для натурального числа n символом $n!$ (читается “ n -факториал”) обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Тест 2

- 2.1.** Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и нечетна. Найти $f(0)$.
- 1) 1; 2) 0; 3) -1 ; 4) нельзя найти.
- 2.2.** Известно, что областью значений функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-1, 1]$, является отрезок $[2, 3]$. Найти область значений функции $f(5x)$.
- 1) $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$; 2) $[-5, 5]$; 3) $[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$; 4) $[10, 15]$; 5) $[2, 3]$.
- 2.3.** Ортогональная проекция отрезка с концами в точках $(2, 2)$ и $(2, 5)$ на ось абсцисс есть
- 1) $\emptyset$; 2) точка; 3) отрезок; 4) прямая; 5) луч.
- 2.4.** Цена на книгу сначала увеличилась на 20%, а потом снизилась на 20% (от новой цены). Сравнить первоначальную цену и итоговую.
- 1) первоначальная выше; 2) равны; 3) итоговая выше.
- 2.5.** Решить уравнение $32768 = 2^{2^x}$.
- 1) $x \in \emptyset$; 2) $x = 8192$; 3) $x = \log_2 15$; 4) $x = \log_4 32768$.
- 2.6.** Было 4 листа бумаги. Каждый из них разрезали на 7 частей. После этого некоторые из полученных кусков опять разрезали на 7 частей. Потом опять некоторые из кусков разрезали на 7 частей, и так далее. В результате оказалось 2003 куска. Могло ли такое случиться?
- 1) да; 2) нет.

- 2.7. Найти длину ортогональной проекции катета AC прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB , если $AC = 5$, $BC = 12$.

1) $\frac{5}{13}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{25}{13}$; 4) $\frac{25}{12}$; 5) $\frac{12}{13}$.

- 2.8. Проводятся две касательные к графику функции $f(x) = 3x - x^2$. Первая касательная проводится в точке с абсциссой $x_0 = 2$, вторая — в точке максимума данной функции. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и этими двумя касательными.

1) $\frac{49}{16}$; 2) $\frac{63}{32}$; 3) $\frac{49}{32}$; 4) $\frac{32}{49}$.

- 2.9. Найти площадь поверхности описанной около куба сферы, если вписанная в этот куб сфера имеет радиус 1.

1) 12π ; 2) 48π ; 3) 3π ; 4) $4\sqrt{2}\pi$; 5) $4\sqrt{3}\pi$.

- 2.10. Дана сфера радиуса R и точка A вне нее. Из точки A проведены всевозможные касательные к сфере. Множество точек касания образует окружность радиуса r ($r < R$). Найти расстояние от A до центра сферы.

1) $\frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}$; 2) $\frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}$; 3) $\frac{2R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}$; 4) $\frac{2R}{\sqrt{R^2 - r^2}}$.

- 2.11. Найти остаток от деления числа $2^{2^{1001}}$ на 10.

1) 0; 2) 2; 3) 4; 4) 6; 5) 8.

- 2.12. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два велосипедиста. При этом скорость второго была вдвое больше, чем скорость первого. Каждый из них, прибыв в пункт B , сразу повернул обратно. Первый велосипедист обратный путь проехал с той же скоростью. На обратном пути скорость второго была вдвое меньше, чем скорость первого. Кто из них раньше вернулся в пункт A ?

1) первый; 2) второй; 3) одновременно.

2.13. Прямоугольный лист бумаги длины 3, ширины 4 согнули по диагонали и склеили. Найти периметр полученной фигуры.

- 1) 24; 2) 12; 3) $\frac{51}{4}$; 4) $\frac{51}{2}$.

2.14. Указать все значения параметра a ($a \neq 0$), при которых уравнение $2 \sin x = a + \frac{1}{a}$ не имеет решений.

- 1) $a \in [-1, 0) \cup (0, 1]$; 2) $a \neq \pm 1, 0$;
3) $a \neq 0$; 4) $a \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

2.15. Найти длину минимального периода десятичной дроби, представляющей число $\frac{1}{11}$.

- 1) 1; 2) 7; 3) 10; 4) 11; 5) 2.

2.16. Дано 2002 числа. Сумма любых двух из них больше 1. Что можно сказать про сумму всех чисел?

- 1) всегда больше 1001; 2) может быть любой;
3) всегда больше 2001; 4) ничего из перечисленного.

2.17. При каких вещественных a одно из утверждений (а), (б) истинно, а другое ложно:

- (а) уравнение $x^2 - 2ax + 1 = 0$ имеет два различных корня;
(б) $x = 1$ удовлетворяет неравенству $ax - a^2 > 0$.

- 1) $a \in \mathbb{R}$; 2) $a \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$;
3) $a \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$; 4) $a \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

2.18. Может ли неравенство $x^2 + y^2 < n^2$ иметь (при $n \in \mathbb{N}$) четное число целочисленных решений, то есть таких решений (x, y) , где x, y — целые числа?

- 1) да;
2) нет;
3) целочисленных решений бесконечно много;
4) зависит от n .

Тест 3

- 3.1.** Найти наименьшее натуральное число, большее $-\sqrt{254}$.
1) -15 ; 2) -16 ; 3) 0 ; 4) 1 ; 5) 15 .
- 3.2.** Марии 12 лет. Она вдвое младше, чем будет Иван, когда ей будет столько лет, сколько ему сейчас. Сколько лет Ивану?
1) 18 ; 2) 12 ; 3) нельзя найти.
- 3.3.** Указать все значения параметра a , при которых $x = 1$ является решением уравнения $\cos 3x = a^2 + 2a + 3$.
1) $a \in \mathbb{R}$; 2) $a = -1 \pm \sqrt{\cos 3 - 2}$;
3) $a \in \emptyset$; 4) $a = 0$.
- 3.4.** Что можно сказать о производной функции $y = \frac{\sin^3 x}{x \arctg x}$?
1) равна 0 для любого x ;
2) является четной функцией;
3) является нечетной функцией;
4) ничего из перечисленного.
- 3.5.** В треугольнике ABC известны $AB = 5$, $BC = 8$, $S = 10$. Пусть BL — биссектриса угла ABC . Найти площадь треугольника ABL .
1) $\frac{85}{13}$; 2) $\frac{80}{13}$; 3) $\frac{50}{23}$; 4) $\frac{50}{13}$.
- 3.6.** Найти наибольшее из значений $x \in [0, \pi]$, при которых производная функции $y(x) = 3 - 2 \sin(2x - \frac{\pi}{8})$ равна $2\sqrt{2}$.
1) $\frac{11\pi}{16}$; 2) $\frac{7\pi}{16}$; 3) $\frac{23\pi}{16}$; 4) $\frac{11}{16}$;
5) нельзя найти.

3.7. Найти объем правильного тетраэдра с ребром a .

- 1) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; 2) $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$; 3) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$; 4) $\frac{a^3}{6}$; 5) $\frac{a^2}{12}$.

3.8. Пусть p — простое число. Что можно сказать о числе $p+3$?

- 1) всегда простое;
2) всегда нечетное;
3) всегда четное;
4) всегда составное;
5) ничего из перечисленного.

3.9. В центре прямоугольного листа бумаги размером 20×10 вырезана прямоугольная дыра. Периметр дыры равен 20. Найти длину диагонали дыры, если известно, что площадь дыры максимальная среди возможных прямоугольных дыр с тем же периметром.

- 1) 5; 2) $10\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}$; 4) нельзя найти.

3.10. Найти минимальное значение суммы двух натуральных чисел, если их наименьшее общее кратное равно 36, а наибольший общий делитель равен 6.

- 1) 217; 2) 42; 3) 35; 4) 30.

3.11. Найти все x , для которых $\arcsin(\sin x) = x$.

- 1) при всех x ; 2) $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; 3) $x \in [0, \pi]$;
4) $x \in [-1, 1]$; 5) ни при каких x .

3.12. Известно, что $\log_a b = \sqrt{5}$. Найти

$$\log_{a^3}(a^5\sqrt{b}) \cdot \log_{a^5\sqrt{b}}\left(\frac{a\sqrt{a}}{b^7}\right) \cdot \log_{\frac{a\sqrt{a}}{b^7}}(a^3).$$

- 1) 1; 2) $\sqrt{5}$; 3) 0; 4) нельзя найти.

- 3.13.** Найти расстояние между прямыми, заданными на координатной плоскости уравнениями $y = 2x + 1$ и $y = 2x + 3$.

1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; 3) 1; 4) 0.

- 3.14.** Даны три неравенства вида $x^2 + px + q \leq 0$. Известно, что, какие два из них ни выбрать, они имеют общее решение. Верно ли, что все три неравенства имеют общее решение?

1) да; 2) нет; 3) зависит от p, q .

- 3.15.** Пусть $f(x) = 4x + 1$. Найти

$$f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(2003).$$

1) 4013009; 2) 4017018; 3) 2011014; 4) 2009007.

- 3.16.** Пусть $f(x) = \sqrt{3x - 1}$. Решить уравнение $f(x) = 2f'(x)$.

1) $x \in \mathbb{R}$; 2) $x \in \emptyset$; 3) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; 4) $\left\{\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right\}$; 5) $\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

- 3.17.** Часы Незнайки спешат на 10 минут в час, а часы Знайки отстают на 5 минут в час. В 8 часов утра они установили свои часы на точное время, договорившись встретиться в 19 часов того же дня. Во сколько (по точным часам) произойдет их встреча? Считать, что каждый придет на место встречи вовремя по своим часам.

1) 19:45; 2) 19:30; 3) 20:00; 4) 19:00;
5) перечисленные ответы неверны.

- 3.18.** Сколько вещественных решений имеет уравнение

$$(x - 2)^4 + (x + 4)^4 = 272 \quad ?$$

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 4.

Тест 4

- 4.1. Выберите свойство, которым обладает функция $y = 2x^3$.
- 1) четна;
 - 2) нечетна;
 - 3) четна и нечетна одновременно;
 - 4) не является ни четной, ни нечетной;
 - 5) не возрастает.
- 4.2. В банке некоторого острова имеются монеты стоимостью 2 и 7 пиастров в достаточном количестве. Может ли банк выдать (без сдачи) сумму, равную 2003 пиастрам?
- 1) да;
 - 2) нет.
- 4.3. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть целым числом?
- 1) да;
 - 2) нет.
- 4.4. Существует ли выпуклый шестиугольник, все стороны которого равны, но в который нельзя вписать окружность?
- 1) да;
 - 2) нет.
- 4.5. Верно ли утверждение: “Если две стороны одного прямоугольного треугольника равны между собой и равны двум сторонам другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники равны”?
- 1) зависит от треугольника;
 - 2) да;
 - 3) нет.
- 4.6. Какое множество на числовой прямой образуют решения уравнения $|1 - x^2| = 1 - x^2$?
- 1) $\emptyset$;
 - 2) точка;
 - 3) отрезок;
 - 4) прямая;
 - 5) луч.

4.7. Известно, что $0 < x < 3$, $-3 < y < -1$. Что можно наверняка сказать о разности $x - y$?

- 1) $3 < x - y < 4$; 2) $-1 < x - y < 0$; 3) $1 < x - y < 6$;
4) ничего из перечисленного.

4.8. Найти все значения x , при которых производная функции

$$y(x) = 3x^3 \ln x - 36x \ln x - 7x^3 + 108x$$

равна нулю.

- 1) $\mathbb{R}$; 2) $\emptyset$; 3) $\{-2\}$; 4) $\{e^2\}$;
5) $\{-2; 2; e^2\}$; 6) указанные варианты неверны.

4.9. В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна 40, расстояние от середины гипотенузы до одного из катетов в три раза больше, чем до другого. Найти периметр треугольника.

- 1) 200; 2) 120; 3) $40 + 32\sqrt{10}$; 4) $40 + 16\sqrt{10}$.

4.10. Какое из чисел больше: 2^{100} или $50! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50$?

- 1) первое; 2) второе; 3) они равны.

4.11. Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 1. Известно, что $f(x) = |x|$ при $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Найти $f(\pi)$.

- 1) π ; 2) $-\pi$; 3) $\pi - 3$; 4) нельзя найти.

4.12. Дано число 2^{100} . У него нашли сумму цифр, у полученного числа снова нашли сумму цифр... и так далее, пока не получилось однозначное число. Какое число получилось?

- 1) 0; 2) 7; 3) 2; 4) 4; 5) 8.

4.13. Найти все такие значения a , при которых неравенство $x^2 - 2ax + 1 \leq 0$ имеет хотя бы одно положительное решение.

- 1) $\mathbb{R}$; 2) $\emptyset$; 3) $[1, 2]$; 4) $(0, +\infty)$; 5) $[1, +\infty)$.

4.14. Сколько решений имеет уравнение $x^2 = \cos x - 1$?

- 1) ни одного; 2) одно; 3) два;
4) бесконечно много.

4.15. В правильном тетраэдре с ребром 1 отмечены центры всех граней. Они образуют некоторую треугольную пирамиду. Найти ее объем.

- 1) $\frac{\sqrt{2}}{324}$; 2) $\frac{1}{324}$; 3) $\frac{1}{216}$; 4) 1.

4.16. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Найти сумму

$$f(1) + f(2) + f(4) + f(8) + \dots + f(2^{10}).$$

- 1) $31\sqrt{2} + 31$; 2) $32\sqrt{2} - 1$; 3) $63 + 31\sqrt{2}$; 4) 2047.

4.17. Чиновник обычно приходил к остановке в 9 часов утра, подъезжала машина и отвозила его на работу. Однажды чиновник пришел к остановке раньше обычного и отправился навстречу машине. Встретив машину, он сел в нее и приехал на работу на 20 минут раньше обычного. Сколько было времени в момент встречи чиновника с машиной? Считать, что машина ездит по прямой от работы до остановки и обратно.

- 1) 8 : 30; 2) 8 : 40; 3) 8 : 50; 4) нельзя найти.

4.18. Найти значение выражения

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha + 1^\circ) + \cos^2(\alpha + 2^\circ) + \dots + \cos^2(\alpha + 179^\circ)$$

при $\alpha = 45^\circ$.

- 1) 0; 2) $180 \operatorname{tg} \alpha$; 3) $90 \cos \alpha$; 4) 90.

Тест 5

- 5.1. Известно, что функция $f(x)$ четна. Что можно сказать о функции $|f(x)|$?
- 1) всегда четна;
 - 2) всегда нечетна;
 - 3) всегда и четна, и нечетна;
 - 4) ничего из перечисленного.
- 5.2. Найти радианную меру угла, если его градусная мера равна 36° .
- 1) 36;
 - 2) 72;
 - 3) $\frac{2\pi}{5}$;
 - 4) $\frac{\pi}{5}$.
- 5.3. Брату 2 года назад было вдвое меньше лет, чем ему будет через два года. Сестре через 3 года будет втрое больше лет, чем ей было три года назад. Кто старше?
- 1) брат;
 - 2) сестра;
 - 3) они ровесники.
- 5.4. Найти сумму первых 20 членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен 2, а седьмой 20.
- 1) $\frac{3700}{7}$;
 - 2) 610;
 - 3) 640;
 - 4) 1220.
- 5.5. Что больше: 5% от 10% заданного числа или 10% от его 5% ?
- 1) первое;
 - 2) второе;
 - 3) равны;
 - 4) зависит от числа.
- 5.6. Найти наименьшее значение функции $y(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ на отрезке $[-5, 5]$.
- 1) 400;
 - 2) -86;
 - 3) -70;
 - 4) 414.
- 5.7. Сколько существует различных четырехзначных чисел, записанных цифрами 1, 2, 3, 4 без повторений?
- 1) 12;
 - 2) 256;
 - 3) 6;
 - 4) 24.

- 5.8. Определить площадь правильного шестиугольника, вписанного в правильный треугольник со стороной 1.

1) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; 5) 1.

- 5.9. Известно, что $\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Какое из утверждений обязательно верно:

1) $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$; 2) $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$;
3) $\sin \alpha > \frac{1}{2}$; 4) $\cos \alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- 5.10. Пусть $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$. Найти $f(g(x))$.

1) x^2 ; 2) x^3 ; 3) x^5 ; 4) x^6 .

- 5.11. Найти все значения a , при которых неравенство $x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ имеет хотя бы одно положительное решение.

1) ни при каких a ; 2) при $a = \pm 1$;
3) при всех $a \geq 0$; 4) при всех a .

- 5.12. Верно ли утверждение: “Если две стороны одного прямоугольного треугольника равны двум сторонам другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники равны”?

1) да; 2) нет.

- 5.13. Какая из положительных дробей ближе к единице: правильная или обратная ей неправильная?

1) всегда правильная;
2) всегда неправильная;
3) зависит от числа;
4) они всегда находятся на равных расстояниях от единицы.

- 5.14. Сколько плоскостей симметрии имеет куб?

1) 3; 2) 6; 3) 9; 4) 12; 5) 18.

5.15. Решить уравнение $\sin(\arcsin x) = \sin(\arcsin(x + 1))$.

- 1) $x \in [-1, 1]$; 2) $x = -\frac{1}{2}$; 3) $x \in \mathbb{R}$; 4) нет решений.

5.16. Найти количество целочисленных решений неравенства

$$(x^2 - 2)(x^2 - 22)(x^2 - 202)(x^2 - 2002) < 0.$$

- 1) 1818; 2) 70; 3) 66; 4) 1816;
5) бесконечно.

5.17. Дано число 3^{100} . У него нашли сумму цифр, у полученного числа снова нашли сумму цифр... и так далее, пока не получилось однозначное число. Какое число получилось?

- 1) 0; 2) 3; 3) 6; 4) 7; 5) 9.

5.18. Сумма квадратов длин сторон треугольника равна 20. Найти сумму квадратов длин его медиан.

- 1) $10\sqrt{2}$; 2) 15; 3) 20; 4) 25.

Тест 6

6.1. Найти производную функции $f(x) = e^\pi$.

- 1) π ; 2) e ; 3) $\pi \ln e$; 4) 0; 5) πe^π .

6.2. Может ли косинус тупого угла треугольника равняться $\frac{2}{3}$?

- 1) да; 2) нет.

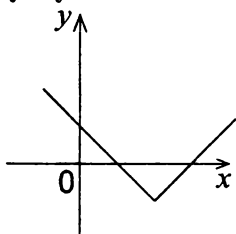
6.3. Вычислить $\log_5 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 \cdot \log_2 1$.

- 1) $\log_5 2$; 2) $\log_2 5$; 3) 0; 4) 1.

6.4. Сократима ли дробь $\frac{12345}{67890}$?

- 1) да; 2) нет.

6.5. Выберите функцию, наиболее точно соответствующую рисунку:



- 1) $y = |x + 2| + 1$;
2) $y = -|x - 2| - 1$;
3) $y = |x - 2| - 1$;
4) $y = |x + 2| - 1$.

6.6. Найти сумму квадратов целочисленных решений неравенства $f(y) < 1$, где $f(y) = y^2 - 2y - 2$.

- 1) 3; 2) 5; 3) 6; 4) 14; 5) 15.

6.7. Что можно сказать о сумме пяти последовательных натуральных чисел?

- 1) не может делиться на 3;
2) может быть простым числом;
3) всегда является простым числом;
4) не может быть простым числом.

- 6.8.** Найти площадь квадрата, если известны координаты трех его вершин: $(1, 2)$; $(2, 5)$; $(4, 1)$.
- 1) $\sqrt{20}$; 2) 20; 3) $10\sqrt{2}$; 4) 5; 5) 10.
- 6.9.** Улитка ползет вверх по дереву. За день она поднимается на 27 сантиметров, а за ночь сползает на 6 сантиметров. На какой день она поднимется на высоту 65 сантиметров?
- 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6.
- 6.10.** Найти наибольшее значение функции $y(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ на отрезке $[-5, 5]$.
- 1) 400; 2) -86 ; 3) -70 ; 4) 414.
- 6.11.** В кубе с ребром длины 5 прорезано сквозное цилиндрическое отверстие радиуса 1. Ось цилиндра проходит через центр грани куба перпендикулярно ей. Найти площадь поверхности полученного тела.
- 1) 150; 2) $150 + 8\pi$; 3) 8π ; 4) $150 + 10\pi$.
- 6.12.** В пространстве даны три прямые. Известно, что первая и вторая, а также вторая и третья прямые являются скрещивающимися. Что можно сказать о взаимном расположении первой и третьей прямых?
- 1) всегда скрещиваются;
2) не могут пересекаться;
3) всегда лежат в одной плоскости;
4) ничего из перечисленного.
- 6.13.** Известно, что $AD = 10$ км, $BC = 16$ км и $AC = 13$ км. Если из A в D выйдет пешеход, а из B в C в тот же момент направится велосипедист, то конечных пунктов они достигнут одновременно. Если же пешеход пойдет из A в C , а велосипедист — из C в A , то на каком расстоянии от точки A они встретятся?
- 1) 8 км; 2) 13 км; 3) 5 км; 4) 2 км; 5) 10 км.

6.14. Известно, что $\operatorname{tg} 4\alpha < 0$ и $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Найти $\sin \alpha$.

- 1) $\frac{4}{5}$; 2) $-\frac{4}{5}$; 3) $\pm \frac{4}{5}$; 4) $\frac{2}{5}$;

5) нельзя найти.

6.15. При каких значениях a многочлены $x^2 + ax + 1$ и $x^2 + x + a$ имеют общий корень?

- 1) при всех a ; 2) 1 и -2 ; 3) 1; 4) -2 .

6.16. В прямоугольном треугольнике известны длина гипотенузы c и радиус вписанной окружности ρ . Найти площадь треугольника.

- 1) $\rho^2 + \rho c$; 2) $\rho^2 + \frac{1}{2}\rho c$; 3) ρc ; 4) нельзя найти

6.17. Функция $f(x)$ определена для всех вещественных x . Известно, что для любого x справедливо неравенство $f(x) > x$. Выберите верное утверждение:

- 1) таких функций $f(x)$ не существует;
2) $f(f(x)) > x$ для всех x ;
3) функция $f(x)$ является возрастающей;
4) ничего из перечисленного.

6.18. Дома математика и физика находятся по одну сторону реки. Расстояние от дома математика до реки равно 50 метров, от дома физика до реки — 100 м. Расстояние между двумя домами составляет $10\sqrt{1321}$ м. Математик выходит из дома, доходит до реки, а потом направляется к физiku. Он идет со скоростью полметра в секунду. Каково минимальное время, которое он потратит на путь к физiku?

- 1) 11 минут; 2) 13 минут; 3) 15 минут; 4) нельзя найти

Тест 7

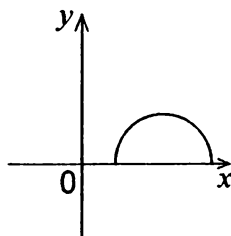
- 7.1. Выберите функцию, наиболее точно соответствующую рисунку.

1) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 5}$;

2) $y = x^2 - 4x + 5$;

3) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} + 1$;

4) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.



- 7.2. Известно, что в арифметической прогрессии (a_n) сумма второго и одиннадцатого членов равна 5. Найти сумму всех членов прогрессии с первого по двенадцатый включительно.

1) 15;

2) 30;

3) 60;

4) нельзя найти.

- 7.3. График функции $y = \operatorname{tg} 2x$ подвергается следующим преобразованиям: перенос вдоль оси Ox влево на 1 и сжатие вдоль оси Oy к оси Ox в два раза. График какой функции $y = f(x)$ получится?

1) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2(x + 1)$;

2) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x + 1)$;

3) $2 \operatorname{tg} 2(x - 1)$;

4) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x - 1)$;

5) перечисленные варианты неверны.

- 7.4. Найти максимальное значение функции $f(x) = x \log_4(\pi - 3)$ на отрезке $[-1, 1]$.

1) $\log_4(\pi - 3)$;

2) $-\log_4(\pi - 3)$;

3) 0;

4) 1.

- 7.5. Сколько осей симметрии имеет правильный шестиугольник?

1) 0;

2) 3;

3) 6;

4) 12;

5) 24.

- 7.6. Автомобиль ехал некоторое время со скоростью 100 км/час, а потом еще столько же времени — со скоростью 90 км/час. Найти среднюю скорость автомобиля на всем пути.
- 1) 190 км/час; 2) 95 км/час; 3) 90 км/час; 4) 10 км/час;
5) нельзя найти.
- 7.7. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, $AB = 14$, $CD = 5$. Найти периметр $ABCD$.
- 1) 19; 2) 38; 3) 96; 4) нельзя найти.
- 7.8. Найти $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$, если $\sin(\alpha + \beta) = c$, $\sin(\alpha - \beta) = d$.
- 1) $\frac{d - c}{c + d}$; 2) $\frac{c + d}{d - c}$; 3) $\frac{c - d}{c + d}$; 4) $\frac{c + d}{c - d}$.
- 7.9. Вычислить $\log_5 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 \cdot \log_2 5$.
- 1) 0; 2) 1; 3) $\log_5 2$; 4) $\log_2 5$.
- 7.10. В комнате находятся мыши и тараканы. У мыши 4 ноги, у таракана — 6. Если в комнату зайдут их двуногие хозяева (их столько же, сколько животных), то в комнате будет 34 ноги. Сколько в комнате мышей?
- 1) 3; 2) 2; 3) 0; 4) нельзя найти.
- 7.11. Найти сумму всех натуральных решений неравенства $-2x^2 + 4x + 10 > 0$.
- 1) 2; 2) 3; 3) 6; 4) 10;
5) сумма бесконечна.
- 7.12. Дан угол ABC радианной меры $3\sqrt{2}$. Найти множество всех точек, которые являются серединами отрезков с концами на (различных) сторонах угла.
- 1) пустое множество; 2) вся плоскость;
3) внутренность угла; 4) внешность угла.

- 7.13. Найти значение $f(2)$, если для функции $f(x)$ выполняется равенство

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \quad \text{при всех } x \neq 0.$$

- 1) $\frac{47}{32}$; 2) $-\frac{13}{16}$; 3) $-\frac{13}{32}$; 4) нельзя найти.
- 7.14. Сравнить числа 2^{300} и $2^{2^{150}}$.

1) первое меньше; 2) второе меньше; 3) числа равны.

- 7.15. Каждое ребро тетраэдра равно 1. Найти расстояние между центрами его граней.

1) 1; 2) $2/3$; 3) $1/3$; 4) нельзя найти.

- 7.16. Известно, что длины катетов треугольника — нечетные натуральные числа и длина гипотенузы также является натуральным числом. Что можно сказать о длине гипотенузы?

1) всегда четна;
2) может быть нечетной;
3) таких треугольников не бывает.

- 7.17. Сумма цифр некоторого натурального числа делится на 7. Что можно сказать о сумме цифр следующего натурального числа?

1) всегда нечетна;
2) всегда дает остаток 1 при делении на 7;
3) никогда не делится на 7;
4) может делиться на 7.

- 7.18. При каких a уравнение $|x - 1| = a|x - a|$ имеет единственное решение?

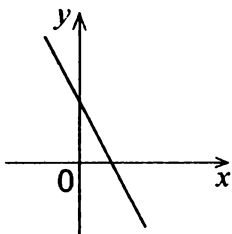
1) $a \in [0, 1)$; 2) $a \in [0, \infty)$; 3) $a \in [1, \infty)$;
4) $a = 0$; 5) $a = 1$.

Тест 8

8.1. Найти наименьшее целое k , удовлетворяющее неравенству $k^2 + 2^k < 8$.

- 1) 0; 2) 1; 3) -2; 4) нельзя найти.

8.2. Выберите функцию, наиболее точно соответствующую рисунку:



- 1) $y = -2x$;
2) $y = 2x + 1$;
3) $y = -x + 1$;
4) $y = -2x + 1$.

8.3. Блоха прыгает по прямой. Она может делать большие и маленькие прыжки. Длина большого прыжка 7 сантиметров, маленького — 5. Сможет ли блоха попасть в точку прямой, удаленную от исходной на 1 сантиметр?

- 1) да; 2) нет.

8.4. Известно, что $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 3$. Найти $f(0)$.

- 1) 0; 2) 1; 3) 6; 4) нельзя найти.

8.5. Найти координаты точки пересечения прямых AB и CD , если $A = (-5; 2)$, $B = (7; 2)$, $C = (1; -6)$, $D = (1; 5)$.

- 1) $(23, -\frac{45}{2})$; 2) $(1; 2)$; 3) $(2; 1)$;
4) прямые не пересекаются.

- 8.6. Автомобиль ехал первую половину пути со скоростью 100 км/час, а вторую половину — со скоростью 90 км/час. Найти среднюю скорость автомобиля на всем пути.

1) 95 км/час; 2) 90 км/час; 3) 10 км/час; 4) 190 км/час;
5) приведенные варианты неверны.

- 8.7. Выберите верное утверждение относительно функции

$$f(x) = \sin(\arcsin x).$$

1) ограничена; 2) определена при всех x ;
3) периодична; 4) четна.

- 8.8. Какой остаток может давать число $n^2 + 1$ при делении на 3 ?

1) 1 и 2; 2) 0, 1 и 2; 3) 0 и 1; 4) 0 и 2.

- 8.9. В какой четверти лежит угол $\sqrt{15}$ радиан?

1) в первой; 2) во второй; 3) в третьей; 4) в четвертой.

- 8.10. Известно, что ортогональные проекции некоторой фигуры на координатные плоскости $x = 0$ и $y = 0$ являются отрезками. Что можно сказать об этой фигуре?

1) всегда является отрезком;
2) не может являться кругом;
3) может являться кругом;
4) может являться шаром.

- 8.11. В треугольнике ABC проведены медианы AK и BM , пересекающиеся в точке O . Площадь треугольника ABC равна 60. Найти площадь четырехугольника $МCKO$.

1) 10; 2) 20; 3) 30; 4) нельзя найти.

- 8.12. Является ли полным квадратом число $111\dots 1$ (300 единиц)?

1) да; 2) нет.

8.13. В пирамиде $ABCD$ известны $AB = 5$, $AC = 4$, $AD = 2$. Найти наибольшее значение, которое может принимать объем пирамиды.

- 1) 20; 2) $\frac{20}{3}$; 3) $\frac{40}{3}$; 4) нельзя найти.

8.14. Двое портных делают разрезы на куске материи длиной 100 метров, начиная с одного и того же конца. Первый делает разрез через каждые 2 метра, второй — через каждые 5. При этом каждый из них добирается до конца куска. Сколько в результате получится частей?

- 1) 59; 2) 60; 3) 68; 4) 69.

8.15. Найти площадь правильного восьмиугольника, описанного около окружности радиуса 1.

- 1) $3\sqrt{2} - 4$; 2) $3 - 4\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2} - 1$; 4) $8(\sqrt{2} - 1)$.

8.16. Пусть на всей области определения функции $f(x)$ ее производная положительна. Что можно сказать о функции $f(x)$?

- 1) возрастает на всей области определения;
2) убывает на всей области определения;
3) положительна на всей области определения;
4) ничего из перечисленного.

8.17. При каких a отношение корней уравнения $2x^2 - ax + 1 = 0$ равно трем?

- 1) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$; 2) $-\frac{4\sqrt{6}}{3}$; 3) $\pm \frac{4\sqrt{6}}{3}$; 4) $\pm \frac{2\sqrt{6}}{6}$.

8.18. Найти значение выражения

$$x^{11} - 11x^{10} + 11x^9 - 11x^8 + \dots + 11x - 1$$

при $x = 10$.

- 1) 9; 2) 10; 3) 0; 4) 11; 5) -1.

Тест 9

9.1. Найти среднее геометрическое ординат всех таких точек с целочисленными координатами, что $|x - 5| + |y - 4| \leq 1$.

- 1) 5; 2) $\sqrt[3]{30}$; 3) $2\sqrt[5]{30}$; 4) $2\sqrt[3]{15}$; 5) $\sqrt[3]{60}$.

9.2. Какого вида треугольник со сторонами 2, 3, 5 ?

- 1) остроугольный;
2) прямоугольный;
3) тупоугольный;
4) такой треугольник не существует.

9.3. Известно, что $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Найти $\cos 3\alpha$.

- 1) 1; 2) $\frac{23}{27}$; 3) $-\frac{23}{27}$; 4) $\frac{2}{9}$; 5) $\frac{7}{9}$.

9.4. Найти максимальное x , для которого справедливо неравенство $2^{x^2} 5^x \leq 10$.

- 1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) нельзя найти.

9.5. В банк помещен вклад в размере 1000 рублей под 20% годовых. В конце каждого из первых трех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму x рублей. К концу четвертого года оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 400%. Какое соотношение обязательно выполнено?

- 1) $((1000 \cdot 1,2 + x) \cdot 1,2 + x) \cdot 1,2 + x = 1000 \cdot 5$;
2) $((1000 \cdot 0,2 + x) \cdot 0,2 + x) \cdot 0,2 + x = 1000 \cdot 5$;
3) $((1000 \cdot 1,2 + x) \cdot 1,2 + x) \cdot 1,2 = 1000 \cdot 4$;
4) $((1000 \cdot 0,2 + x) \cdot 0,2 + x) \cdot 0,2 = 1000 \cdot 4$.

9.6. Сколько точек с целочисленными положительными координатами лежат строго ниже параболы $y = -x^2 + 4x - 1$?

- 1) 3; 2) 4; 3) 7; 4) 10;
5) бесконечно много.

- 9.7. Найти все такие натуральные n , что остаток при делении 101 на n составляет 20% частного.
- 1) 0, 20; 2) 20; 3) 10; 4) таких n нет.
- 9.8. Что можно сказать о произведении всех отрицательных целочисленных решений неравенства $x^2 + 8x + 1 \leq 0$?
- 1) меньше 0; 2) больше 0; 3) равно 0; 4) бесконечно.
- 9.9. Длины сторон треугольника расположены в порядке возрастания: a , b , c . Расположить в порядке убывания величины α , β , γ противолежащих углов треугольника.
- 1) α , β , γ ; 2) γ , β , α ; 3) α , γ , β ;
4) зависит от треугольника.
- 9.10. Найти величину внешнего угла правильного девятиугольника.
- 1) 2π ; 2) $\frac{2\pi}{9}$; 3) $\frac{7\pi}{9}$; 4) $\frac{2\pi}{7}$.
- 9.11. Чему равен наименьший положительный период функции $\sin(kx)$, если $k \neq 0$?
- 1) $\frac{2\pi}{k}$; 2) 0; 3) $\frac{\pi}{|k|}$; 4) $\frac{2\pi}{|k|}$; 5) $2\pi k$.
- 9.12. Найти $y'(1)$, если $y(x) = \sqrt[5]{x^4 + 3x + 2}$.
- 1) $\sqrt[5]{6}$; 2) $\frac{7}{30}$; 3) $\frac{7}{\sqrt[5]{1296}}$; 4) $\frac{7}{5\sqrt[5]{1296}}$;
5) $y'(1)$ не определено.
- 9.13. Сколько осей симметрии имеет куб?
- 1) 3; 2) 6; 3) 9; 4) 13; 5) 0.
- 9.14. Пусть первые 100 членов геометрической прогрессии — натуральные числа. Что можно сказать о 101-ом члене?
- 1) всегда является натуральным числом;
2) всегда равен всем предшествующим;
3) всегда является рациональным числом;
4) может равняться $\sqrt{3}$.

9.15. Для некоторого натурального числа выписали все различные натуральные делители. Оказалось, что количество делителей нечетно. Что можно сказать об исходном числе?

- 1) всегда является полным квадратом;
- 2) может быть, а может не быть полным квадратом;
- 3) всегда четно;
- 4) всегда нечетно;
- 5) ничего из перечисленного.

9.16. Пусть сумма коэффициентов многочлена $P(x)$ равна a , сумма коэффициентов многочлена $Q(x)$ равна b . Чему равна сумма коэффициентов произведения $P(x)$ и $Q(x)$?

- 1) всегда равна ab ;
- 2) всегда равна a^b ;
- 3) всегда равна $a^b + b^a$;
- 4) зависит от конкретного вида многочленов.

9.17. При решении задачи о нахождении некоторого числа были получены следующие утверждения:

— Число иррационально и равно стороне квадрата с диагональю 6;

— Число дает остаток 1 при делении на 5 и равно площади единичного круга.

Найдите неизвестное число, если в каждом высказывании одна часть верна, а другая неверна.

- 1) $\frac{1}{\pi}$; 2) π ; 3) 2π ; 4) $3\sqrt{2}$.

9.18. Вычислить $0,(1) + 0,(01)$. Записать результат в виде десятичной дроби.

- 1) $1,(01)$; 2) $0,(101)$; 3) $0,(11)$; 4) $0,(12)$.

Тест 10

10.1. Функция $f(x)$ нечетна. Известно, что $f(x) = x^4$ при $x \geq 0$. Найти $f(-2)$.

- 1) 0; 2) 16; 3) -16; 4) нельзя найти.

10.2. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$|x - 2| + |y + 3| \leq 5.$$

- 1) $\frac{25}{2}$; 2) 25; 3) 50; 4) 100.

10.3. Многочлен $ax^2 + bx + c$ обращается в нуль в точках 1, 2, 3. Верно ли, что все его коэффициенты обязательно равны нулю?

- 1) да; 2) нет.

10.4. Производительность труда на производстве повысилась на 30%. На сколько процентов сократилось время, затрачиваемое на тот же объем работы?

- 1) $23\frac{1}{13}$; 2) $76\frac{12}{13}$; 3) 30; 4) $7\frac{9}{13}$.

10.5. После того, как от урока прошло 10 минут и еще треть всего урока, до конца осталось еще половина оставшегося времени и 10 минут. Сколько минут длился урок?

- 1) 30; 2) 40; 3) 45; 4) нельзя найти.

10.6. Решить уравнение $\sin x + \cos 4x = 2$.

- 1) $x \in \emptyset$; 2) $x \in \mathbb{R}$; 3) $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

10.7. В треугольнике ABC известны $AB = BC = a$, $AC = b$. На основании AC взята точка M . Найти сумму расстояний от M до боковых сторон треугольника.

1) $\frac{a^2}{b}$; 2) $\frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}$; 3) $\frac{a\sqrt{4a^2 - b^2}}{2b}$; 4) $\frac{b\sqrt{a^2 - 4b^2}}{2a}$;

5) зависит от положения точки M .

10.8. Найти максимальное x , для которого справедливо неравенство $2x^2 5^x < 10$.

1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) нельзя найти.

10.9. Найти периметр правильного восьмиугольника, вписанного в окружность радиуса 1.

1) $2 + \sqrt{2}$; 2) $8\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; 3) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; 4) $8\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

10.10. Выберите верное определение $\arccos x$:

- 1) угол, лежащий в первой или третьей четверти, косинус которого равен x ;
- 2) главный угол, косинус которого равен x ;
- 3) угол, косинус которого равен x ;
- 4) угол α , удовлетворяющий условиям $0 \leq \alpha \leq \pi$, $\cos \alpha = x$.

10.11. Пусть $f(x) = 2x - 1$. Найти $f(1) + f(2) + \dots + f(50)$, где суммирование ведется по всем натуральным числам от 1 до 50.

1) 1275; 2) 2499; 3) 2500; 4) 2601.

10.12. Найти $y'(0)$, если $y(x) = \sqrt{\frac{\arccos 4x}{\sin 2x + 1}}$.

1) 0; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{2}(4 + \pi)}{4\sqrt{\pi}}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}(4 + \pi)}{4\sqrt{\pi}}$;

5) $y'(0)$ не определено.

10.13. Известно, что площади трех граней тетраэдра равны 1. Что можно сказать о площади четвертой грани?

- 1) всегда равна 1; 2) всегда меньше 3;
3) всегда больше $\frac{1}{3}$; 4) ничего из перечисленного.

10.14. Вычислить значение выражения $2\sqrt{\log_2 3} - 3\sqrt{\log_3 2}$.

- 1) 0; 2) 1; 3) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{2}$.

10.15. В пирамиде $ABCD$ даны $DA = 1$, $DB = 2$, $DC = 3$. Известно, что объем пирамиды максимально возможный среди объемов таких пирамид. Найти расстояние от вершины D до плоскости ABC .

- 1) $\frac{7}{6}$; 2) $\frac{6}{7}$; 3) $\frac{18}{7}$; 4) нельзя найти

10.16. Для некоторого натурального числа выписали все различные натуральные делители. Оказалось, что количество делителей четно. Что можно сказать об исходном числе?

- 1) является полным квадратом;
2) может быть, а может не быть полным квадратом;
3) не может быть полным квадратом;
4) всегда четно;
5) ничего из перечисленного.

10.17. Расположить числа в порядке возрастания:

$$a = 2, \quad b = \log_{\pi} 3 + \log_3 \pi, \quad c = \log_{\pi^2} 3 + \log_3 \pi^2.$$

- 1) c, b, a ; 2) a, b, c ; 3) a, c, b ; 4) b, c, a .

10.18. Сумма нескольких чисел равна 1. Что можно сказать про сумму их квадратов?

- 1) может быть неположительна;
2) всегда больше 1;
3) может быть меньше 0,0001;
4) всегда меньше 1.

Тест 11

11.1. Найти сумму решений уравнения $\sin 13x = 0$, расположенных на интервале $(-1/3, 1/3)$.

- 1) 0; 2) $\frac{\pi}{13}$; 3) $\frac{3\pi}{13}$; 4) $\frac{5\pi}{13}$.

11.2. Может ли произведение двух иррациональных чисел быть рациональным числом?

- 1) да; 2) нет.

11.3. Найти величину внешнего угла A треугольника ABC , если $AB = 2$, $BC = 1$, $AC = \sqrt{3}$.

- 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{5\pi}{3}$.

11.4. Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 7.

- 1) 140672; 2) 70886; 3) 70885; 4) 70336; 5) 35168.

11.5. Найти среднее геометрическое ординат всех таких точек с целочисленными координатами, что $|x - 5| + |y - 4| < 2$.

- 1) $\sqrt[5]{60}$; 2) 3; 3) $2\sqrt[3]{15}$; 4) $4\sqrt[3]{15}$; 5) $2\sqrt[5]{30}$.

11.6. Цены на продукты поднялись на 10%. На сколько процентов меньше можно купить продуктов на ту же сумму?

- 1) $9\frac{1}{11}$; 2) 10; 3) 90; 4) $\frac{1}{11}$; 5) $\frac{10}{11}$.

11.7. Существует ли такой треугольник, что основания всех трех его высот лежат на продолжениях сторон, на которые они опущены?

- 1) да; 2) нет.

11.8. Для некоторого натурального числа, являющегося полным квадратом, выписали все его различные натуральные делители. Что можно сказать о произведении этих делителей?

- 1) всегда является полным квадратом;
- 2) может быть, а может не быть полным квадратом;
- 3) всегда четно;
- 4) всегда нечетно;
- 5) ничего из перечисленного.

11.9. Какие из следующих соотношений выполнены для любого действительного числа x ?

- a) $x < |x|$;
- b) $\sin(\arcsin x) = x$;
- c) $\arcsin(\sin x) = x$;
- d) $x \leq x^2$.

1) ни одно; 2) b и d; 3) b и c; 4) c и d.

11.10. Площадь правильного шестиугольника равна S . Середины его сторон соединены последовательно. Найти площадь полученного многоугольника.

- 1) $\frac{1}{3}S$; 2) $\frac{1}{2}S$; 3) $\frac{3}{4}S$; 4) $\frac{5}{6}S$.

11.11. Функция $f(x)$ периодична с периодом 2, и $f(x) = x^2$ при $x \in [-1, 1]$. Найти формулу для $f(x)$ на отрезке $x \in [5, 7]$.

- 1) x^2 ; 2) $(x - 6)^2$; 3) $x^2 - 6$; 4) нельзя найти.

11.12. Среднее арифметическое трех чисел равно 4, а среднее арифметическое семи других чисел равно 6. Чему равно среднее арифметическое всех 10 чисел?

- 1) 1; 2) 10; 3) $\frac{5}{27}$; 4) $\frac{27}{5}$;
5) нельзя найти.

11.13. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{x^2}{x^4 + 25}$.

- 1) $\frac{1}{10}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{26}$; 4) нельзя найти.

11.14. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены при $x \in \mathbb{R}$, причем $f(x)$ убывает, а $g(x)$ возрастает. Что можно сказать о разности $f(x) - g(x)$?

- 1) всегда возрастает на $\mathbb{R}$;
2) всегда убывает на $\mathbb{R}$;
3) всегда существует такое x , что $f(x) - g(x) = 0$;
4) ничего из перечисленного.

11.15. Решить неравенство $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

- 1) $x \in \emptyset$; 2) $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
3) $x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$; 4) $x \in \mathbb{R}$.

11.16. Существуют ли 100 идущих подряд составных чисел?

- 1) да; 2) нет.

11.17. Можно ли трехгранный угол $SABC$ с вершиной S и плоскими углами $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = \frac{\pi}{2}$ пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился треугольник с углами $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$?

- 1) да; 2) нет.

11.18. Представить число $0,2(13)$ в виде обыкновенной дроби.

- 1) $\frac{213}{99}$; 2) $\frac{213}{990}$; 3) $\frac{212}{99}$; 4) $\frac{211}{990}$.

Тест 12

12.1. Найти минимальное значение функции $f(x) = x^2 \ln^3 \pi$ на отрезке $[-1, 1]$.

- 1) 1; 2) -1 ; 3) 0; 4) e^3 ; 5) e .

12.2. Пусть a, b — рациональные числа. Выберите верное утверждение относительно числа $a \cdot b$:

- 1) рационально;
2) иррационально;
3) может быть рациональным, может быть иррациональным.

12.3. Чему равно максимальное значение площади выпуклого четырехугольника с диагоналями d_1, d_2 ?

- 1) $d_1 d_2$; 2) $\frac{d_1 d_2}{2}$; 3) $d_1 + d_2$; 4) $d_1^2 + d_2^2$; 5) d_1 .

12.4. Найти производную функции $y = \arctg 1$.

- 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) 1; 4) -1 ; 5) 0.

12.5. Найти сумму всех различных натуральных делителей числа 147.

- 1) 80; 2) 227; 3) 228; 4) 229; 5) 235.

12.6. Найти все значения q , при которых последовательность $1, q, q^2, q^3, \dots$ убывает.

- 1) $q \leq 1$; 2) $0 \leq q \leq 1$; 3) $0 \leq q < 1$; 4) $0 < q < 1$.

12.7. Что можно сказать о выпуклом четырехугольнике, противоположные углы которого попарно равны?

- 1) это всегда параллелограмм;
2) это всегда прямоугольник;
3) это всегда ромб;
4) это всегда трапеция.

12.8. Найти координаты центра окружности минимального радиуса, внутрь которой можно поместить множество точек, заданное на плоскости (x, y) неравенством $|y+4| + |x-2| < 5$.

- 1) $(4, -2)$; 2) $(-4, 2)$; 3) $(0, 0)$; 4) $(1, 7)$; 5) $(2, -4)$.

12.9. Белая курица сносит одно яйцо за 7 дней. Черная курица сносит одно яйцо за 3 дня. Сколько яиц снесут обе курицы за 101 день?

- 1) 47; 2) 48; 3) $\frac{1010}{21}$; 4) 49.

12.10. Вычислить $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + 99^2 - 100^2$.

- 1) 50; 2) 5050; 3) -50; 4) -5050; 5) 0.

12.11. Выбрать уравнение линии, которую описывают на координатной плоскости (x, y) вершины парабол $y = 2x^2 - 4ax + 1$ при $a \in \mathbb{R}$.

- 1) $y = 1 - x^2$; 2) $y = 1 - 2x^2$; 3) $y = 1 - 2a^2$;
4) $x = a$; 5) все варианты неверны.

12.12. Даны две пересекающиеся сферы радиуса R , расстояние между их центрами равно d . Найти радиус полученной в пересечении окружности.

- 1) $R - \frac{d}{2}$; 2) $\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{2}}$; 3) $R^2 - \frac{d^2}{4}$; 4) $\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}$.

12.13. При каких x выполнено равенство $\sin(\arcsin x) = x$?

- 1) $x \in \mathbb{R}$; 2) $x \in [0, \pi]$; 3) $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
4) $x \in [-1, 1]$; 5) ни при каких x .

12.14. Может ли число, десятичная запись которого состоит из 2003 нулей, 2003 единиц и 2003 двоек (в каком-то порядке), быть точным квадратом?

- 1) да; 2) нет.

Тест 13

13.1. Найти знак числа $\sin(\cos(-1))$.

- 1) отрицательно; 2) положительно; 3) равно 0.

13.2. Вычислить $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$.

- 1) -50; 2) -49; 3) 50; 4) 51; 5) 0.

13.3. Если к натуральному числу прибавить 5, то оно разделится без остатка на 9. Чему равен остаток от деления первоначального числа на 3 ?

- 1) 5; 2) 0; 3) 1; 4) 2.

13.4. Для геометрической прогрессии (b_n) известно отношение $\frac{b_8}{b_4} = 2$. Найти $\frac{b_{100}}{b_{50}}$.

- 1) $4096\sqrt{2}$; 2) $2048\sqrt{2}$; 3) $2^5\sqrt{4}$; 4) нельзя найти.

13.5. Выбрать верное высказывание:

- 1) если произведение двух натуральных чисел делится на 6, то хотя бы один из сомножителей делится на 6;
2) для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо, чтобы оно оканчивалось на 5;
3) для того чтобы натуральное число делилось на 5, достаточно, чтобы оно оканчивалось на 5;
4) для того чтобы произведение $(x - 1)(x + 2)$ равнялось 0, необходимо, чтобы x равнялось 1.

13.6. Какое наибольшее значение может принимать площадь прямоугольника со сторонами x и $y - 5$, если $x + y = 3$?

- 1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) -1;
5) таких прямоугольников не существует.

13.7. Указать рациональное число, большее $\sqrt{2}$, но меньшее $\sqrt{3}$.

- 1) $\frac{6\sqrt{2}}{5}$; 2) $\sqrt{2} + \frac{1}{10}$; 3) 2; 4) 1,63;

5) приведенные ответы неверны.

13.8. При каких x определено выражение $\sqrt{x - \sqrt{x}}$?

- 1) $x \geq 0$; 2) $x \geq 1, x = 0$; 3) $x \geq 1$; 4) $0 \leq x \leq 1$.

13.9. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением куба вокруг своего ребра, имеющего длину a .

- 1) $2\sqrt{2}\pi a^2$; 2) $(2 + 2\sqrt{2})\pi a^2$; 3) $2\sqrt{2}\pi a^2$;
4) $(4 + 2\sqrt{2})\pi a^2$.

13.10. В институте 70 аудиторий. Известно, что в каждой аудитории находится не более 20 человек. Выберите верное утверждение:

- 1) не может быть пяти аудиторий с одинаковым количеством человек;
2) всегда есть четыре аудитории с одинаковым количеством человек;
3) всегда есть две аудитории, в которых по одному человеку;
4) всегда есть две аудитории с различным числом человек.

13.11. Что можно сказать про пару треугольников, у которых два угла одного равны двум углам другого и, кроме того, одна из сторон первого равна одной из сторон второго?

- 1) всегда равны;
2) не могут быть равны;
3) всегда подобны, но могут быть не равны;
4) всегда равнобедренные;
5) ничего из перечисленного.

13.12. Расположить числа в порядке убывания:

$$a = 2e^2, \quad b = e^5 + 1, \quad c = 1.$$

- 1) a, b, c ; 2) b, c, a ; 3) b, a, c ; 4) c, b, a ; 5) c, a, b .

13.13. Пусть $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Найти формулу для $f(f(x))$ и указать область определения этой функции.

1) $f(f(x)) = \frac{x^2}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1;$

2) $f(f(x)) = \frac{x}{x-1}, \quad x \neq 1;$

3) $f(f(x)) = x, \quad x \neq 1;$

4) $f(f(x)) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$

13.14. Найти наибольшее значение функции $y = \sin^5 x + \cos^{13} x$.

1) 1;

2) 2;

3) $\sqrt{2};$

4) $1 + \sqrt{2}.$

13.15. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $AB = 3$, $AD = 4$. Найти острый угол между прямыми AC и $B_1 D_1$.

1) $\arccos \frac{7}{25};$

2) $\pi - \arccos \frac{7}{25};$

3) $\arccos \frac{14}{25};$

4) зависит от длины ребра AA_1 .

13.16. Решить неравенство $\frac{1}{\cos x} \geq -2$.

1) $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z};$

2) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z};$

3) $x \in \mathbb{R};$

4) решений нет;

5) приведенные ответы неверны.

13.17. Известно, что длины всех трех биссектрис треугольника меньше 1. Верно ли, что его площадь всегда меньше 1 ?

1) да;

2) нет.

13.18. При каких вещественных a не существует ни одного значения x , одновременно удовлетворяющего неравенствам $a^2 x^2 - 1 > 0$ и $x^2 \leq a$?

1) $a \in (-\infty, 1];$ 2) $a \in (0, 1];$ 3) $a \in [0, 1];$ 4) $a \in \mathbb{R}.$

Тест 14

- 14.1. Известно, что $f(x)$ — линейная функция, $f(0) = 5$, $f'(1) = 3$. Найти $f(1)$.
- 1) 3; 2) 5; 3) 8; 4) нельзя найти.
- 14.2. На графике функции $y = x^3$ взяли 10 точек, ординаты которых образуют геометрическую прогрессию. Что можно сказать про их абсциссы (взяты в том же порядке)?
- 1) всегда образуют геометрическую прогрессию;
2) всегда образуют арифметическую прогрессию;
3) не могут убывать;
4) ничего из перечисленного.
- 14.3. Одна курица сносит за один день одно яйцо. Сколько яиц снесут две курицы за два дня?
- 1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 8.
- 14.4. Среднее геометрическое пятнадцати чисел равно 3, а среднее геометрическое семи других чисел равно 5. Чему равно среднее геометрическое всех 22 чисел?
- 1) $\sqrt[22]{3^{15} \cdot 5^7}$; 2) $\sqrt{15}$; 3) $\sqrt[22]{15}$; 4) нельзя найти.
- 14.5. Выберите *неверное* определение параллелограмма:
- 1) выпуклый четырехугольник, противоположные стороны которого попарно равны;
2) выпуклый четырехугольник, у которого две противоположные стороны равны, а две другие — параллельны;
3) выпуклый четырехугольник, у которого две противоположные стороны равны и параллельны;
4) выпуклый четырехугольник, у которого противоположные углы попарно равны.
- 14.6. Вычислить $\sqrt{(16 + \sqrt{257})^2} + \sqrt{(16 - \sqrt{257})^2}$.
- 1) 16; 2) 32; 3) 257; 4) $2\sqrt{257}$.

14.13. Найти минимальное значение площади треугольника с длинами сторон 3, 4, $5 + a$, если $-3 \leq a \leq 1$.

- 1) 6; 2) $\frac{\sqrt{65}}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{15}}{4}$; 4) нельзя найти.

14.14. Выбрать наименьшее из чисел: 222^2 , 22^{22} , $2^{2^{22}}$.

- 1) первое; 2) второе; 3) третье;
4) все три числа равны.

14.15. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(5x^2 - 7x + 1)^{2003}$.

- 1) 2003; 2) 0; 3) 1; 4) -1; 5) другая.

14.16. Расстояние между пунктами A и B равно 150 километров. Из A и B одновременно отправляются навстречу друг другу два велосипедиста, скорость каждого 15 км/час. Вместе с первым велосипедистом из пункта A в том же направлении вылетает муха, ее скорость 20 км/час. Долетев до второго велосипедиста, она поворачивает обратно и летит до первого велосипедиста. Встретив его, она опять поворачивает ко второму, и так до тех пор, пока велосипедисты не встретятся. Сколько километров пролетела муха?

- 1) 150; 2) 100; 3) 90; 4) нельзя найти.

14.17. Является ли число $\operatorname{tg} 15^\circ$ рациональным?

- 1) да; 2) нет.

14.18. Известно, что $4a + 2b + c > 0$ и уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет решений. Что можно сказать о числе c ?

- 1) всегда положительно; 2) всегда отрицательно;
3) всегда равно нулю; 4) ничего из перечисленного.

Ответы к тестам

Тест 1

**1.1. 3); 1.2. 1); 1.3. 1); 1.4. 4); 1.5. 2); 1.6. 3);
1.7. 1); 1.8. 4); 1.9. 1); 1.10. 4); 1.11. 1); 1.12. 4);
1.13. 2); 1.14. 5); 1.15. 4); 1.16. 3); 1.17. 3); 1.18. 2).**

Тест 2

**2.1. 2); 2.2. 5); 2.3. 2); 2.4. 1); 2.5. 3); 2.6. 2);
2.7. 3); 2.8. 3); 2.9. 1); 2.10. 2); 2.11. 4); 2.12. 1);
2.13. 3); 2.14. 2); 2.15. 5); 2.16. 1); 2.17. 4); 2.18. 2).**

Тест 3

**3.1. 4); 3.2. 1); 3.3. 3); 3.4. 2); 3.5. 4); 3.6. 1);
3.7. 1); 3.8. 5); 3.9. 3); 3.10. 4); 3.11. 2); 3.12. 1);
3.13. 2); 3.14. 1); 3.15. 2); 3.16. 5); 3.17. 3); 3.18. 3).**

Тест 4

**4.1. 2); 4.2. 1); 4.3. 1); 4.4. 1); 4.5. 2); 4.6. 3);
4.7. 3); 4.8. 6); 4.9. 4); 4.10. 2); 4.11. 3); 4.12. 2);
4.13. 5); 4.14. 2); 4.15. 1); 4.16. 3); 4.17. 3); 4.18. 4).**

Тест 5

5.1. 1); 5.2. 4); 5.3. 3); 5.4. 2); 5.5. 3); 5.6. 2);
5.7. 4); 5.8. 1); 5.9. 1); 5.10. 4); 5.11. 4); 5.12. 2);
5.13. 1); 5.14. 3); 5.15. 4); 5.16. 3); 5.17. 5); 5.18. 2).

Тест 6

6.1. 4); 6.2. 2); 6.3. 3); 6.4. 1); 6.5. 3); 6.6. 2);
6.7. 4); 6.8. 5); 6.9. 2); 6.10. 1); 6.11. 2); 6.12. 4);
6.13. 3); 6.14. 2); 6.15. 4); 6.16. 1); 6.17. 2); 6.18. 2).

Тест 7

7.1. 4); 7.2. 2); 7.3. 1); 7.4. 2); 7.5. 3); 7.6. 2);
7.7. 2); 7.8. 4); 7.9. 2); 7.10. 1); 7.11. 3); 7.12. 4);
7.13. 3); 7.14. 1); 7.15. 3); 7.16. 3); 7.17. 4); 7.18. 4).

Тест 8

8.1. 3); 8.2. 4); 8.3. 1); 8.4. 3); 8.5. 2); 8.6. 5);
8.7. 1); 8.8. 1); 8.9. 3); 8.10. 3); 8.11. 2); 8.12. 2);
8.13. 2); 8.14. 2); 8.15. 4); 8.16. 4); 8.17. 3); 8.18. 1).

Тест 9

9.1. 3); 9.2. 4); 9.3. 3); 9.4. 2); 9.5. 1); 9.6. 2);
9.7. 2); 9.8. 1); 9.9. 2); 9.10. 2); 9.11. 4); 9.12. 4);
9.13. 3); 9.14. 3); 9.15. 1); 9.16. 1); 9.17. 2); 9.18. 4).

Тест 10

10.1. 3); 10.2. 3); 10.3. 1); 10.4. 1); 10.5. 3); 10.6. 4);
10.7. 2); 10.8. 4); 10.9. 4); 10.10. 4); 10.11. 3); 10.12. 4);
10.13. 2); 10.14. 1); 10.15. 2); 10.16. 3); 10.17. 2); 10.18. 3).

Тест 11

11.1. 1); 11.2. 1); 11.3. 2); 11.4. 4); 11.5. 5); 11.6. 1);
11.7. 2); 11.8. 2); 11.9. 1); 11.10. 3); 11.11. 2); 11.12. 4);
11.13. 1); 11.14. 2); 11.15. 4); 11.16. 1); 11.17. 2); 11.18. 4).

Тест 12

12.1. 3); 12.2. 1); 12.3. 2); 12.4. 5); 12.5. 3); 12.6. 4);
12.7. 1); 12.8. 5); 12.9. 1); 12.10. 4); 12.11. 2); 12.12. 4);
12.13. 4); 12.14. 2); 12.15. 1); 12.16. 1); 12.17. 2); 12.18. 3).

Тест 13

13.1. 2); 13.2. 1); 13.3. 3); 13.4. 1); 13.5. 3); 13.6. 5);
13.7. 4); 13.8. 2); 13.9. 4); 13.10. 2); 13.11. 3); 13.12. 3);
13.13. 3); 13.14. 1); 13.15. 1); 13.16. 5); 13.17. 1); 13.18. 1).

Тест 14

14.1. 3); 14.2. 1); 14.3. 3); 14.4. 1); 14.5. 2); 14.6. 4);
14.7. 2); 14.8. 3); 14.9. 1); 14.10. 3); 14.11. 2); 14.12. 4);
14.13. 3); 14.14. 1); 14.15. 4); 14.16. 2); 14.17. 2); 14.18. 1).

Решения тестовых заданий

1.1. Легко решить данное неравенство:

$$x^3 + 27 > 0 \iff x^3 > -27 = (-3)^3 \iff x > -3.$$

Минимальное целое число, удовлетворяющее неравенству $x > -3$, это $x = -2$. $\square$

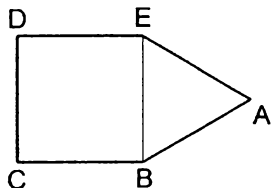
1.2. Согласно условию, количества мест в рядах образуют арифметическую прогрессию. Такая ситуация действительно возможна, так как разность этой прогрессии является натуральным числом:

$$\frac{70 - 10}{16 - 1} = 4.$$

Всего мест

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{10 + 70}{2} \cdot 16 = 640. \quad \square$$

1.3. Такие пятиугольники существуют, один из них изображен на рисунке. В приведенном примере $BCDE$ — квадрат, ABE — равносторонний треугольник. $\square$



1.5. Область допустимых значений: $x \in [-1, 1]$. Так как $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, то $\cos(\arcsin x) \geq 0$. Следовательно, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$. Кроме того, если x удовлетворяет уравнению, то обязательно $x \geq 0$. Имеем:

$$x = \cos(\arcsin x) \iff x = \sqrt{1 - x^2} \iff x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \square$$

1.6. Имеем: $f(f(x)) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$. $\square$

1.7. Преобразуем заданное выражение:

$$\begin{aligned}
 & 5 \cos^2 2x + 48 \sin x \cos x \cos 2x - 5 \sin^2 2x = \\
 & = 5(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 24(2 \sin x \cos x) \cos 2x = \\
 & = 5 \cos 4x + 24 \sin 2x \cos 2x = \\
 & = 5 \cos 4x + 12 \sin 4x = 13 \sin(4x + \varphi)
 \end{aligned}$$

(здесь φ — некоторый “дополнительный аргумент”, такой угол, что $\sin \varphi = \frac{5}{13}$, а $\cos \varphi = \frac{12}{13}$). Ясно, что максимальное значение этого выражения равно 13. $\square$

1.8. Искомое число равно $\frac{a^n}{a} = a^{n-1}$. $\square$

1.9. Имеем:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{x}}}} &= \frac{139}{97} \iff \\
 \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{x}}}} &= \frac{42}{97} \iff 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{x}}} = \frac{97}{42} \iff \\
 \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{x}}} &= \frac{13}{42} \iff 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{x}} = \frac{42}{13} \iff \\
 \frac{1}{4 + \frac{1}{x}} &= \frac{3}{13} \iff 4 + \frac{1}{x} = \frac{13}{3} \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \iff x = 3. \quad \square
 \end{aligned}$$

1.10. Найдем нули данной функции:

$$f(x) = 0 \iff \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \frac{1}{x} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{1}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

При неограниченном возрастании или убывании n модули корней убывают, сколь угодно близко приближаясь к нулю, однако 0 не является нулем функции. Итак, среди корней нет наименьшего по модулю. $\square$

1.11. Прямая, не параллельная оси симметрии параболы, касается параболы тогда и только тогда, когда она пересекает параболу ровно в одной точке. Ось данной параболы имеет уравнение $x = \frac{2}{9}$ и не параллельна ни одной из данных прямых. Найдем точки пересечения параболы с первой прямой:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 4x + 14 = 20x - 2 &\iff 9x^2 - 24x + 16 = 0 \iff \\ &\iff (3x - 4)^2 = 0 \iff x = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

значит, первая прямая касается параболы.

Найдем точки пересечения параболы со второй прямой:

$$9x^2 - 4x + 14 = 3x - 16 \iff 9x^2 - 7x + 30 = 0.$$

Так как квадратное уравнение не имеет решений, то точек пересечения нет. $\square$

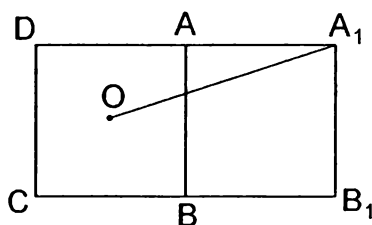
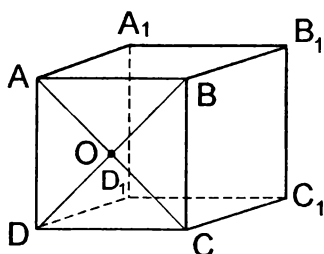
1.12. Перенесем 13^x в правую часть и разделим неравенство на 13^x . Знак не изменится, так как при любом x имеем $13^x > 0$. Получим

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x \geq 1.$$

При $x = 2$ неравенство обращается в равенство. Функция $y(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$ является строго убывающей как сумма двух строго убывающих функций. Следовательно, решением неравенства является промежуток $(-\infty, 2]$. $\square$

1.13. “Развернем” поверхность куба на плоскость (см. рисунок). Соединим точки O и A_1 отрезком прямой. Муха затратит

минимальное время, если будет двигаться по этому отрезку. Отметим, что можно развернуть поверхность куба и по-другому, однако указанный путь является кратчайшим.



Длину (в сантиметрах) OA_1 легко найти по теореме Пифагора:

$$OA_1 = \sqrt{150^2 + 50^2} = 50\sqrt{10}.$$

Мухе потребуется $5\sqrt{10}$ минут. Так как

$$15 = 5 \cdot 3 < 5\sqrt{10} < 5 \cdot 3,2 = 16,$$

то верный ответ — 16 минут. □

1.14. Число

$$\begin{aligned} \frac{(n+5)!}{n!} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+4) \cdot (n+5)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n} = \\ &= (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \end{aligned}$$

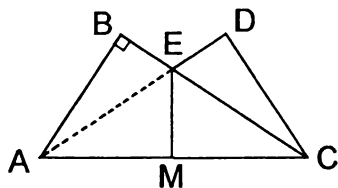
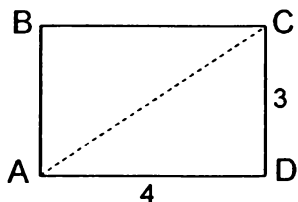
является произведением пяти последовательных натуральных чисел. Среди пяти подряд идущих чисел всегда есть одно, делящееся на 5; хотя бы одно, делящееся на 3; одно, делящееся на 4; одно, делящееся на 2, но не делящееся на 4. Так как 3, 4 и 5 взаимно просты и число, которое делится на 2, но не делится на 4, отлично от числа, которое делится на 4, то произведение делится на $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 120$. Итак, верен ответ 5). Ясно, что все остальные ответы являются неверными. □

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ: Число $\frac{(n+5)!}{n!5!}$ равно числу сочетаний из $(n+5)$ предметов по 5, поэтому это натуральное число. Значит, $\frac{(n+5)!}{n!}$ делится на $5! = 120$. $\square$

1.15. Сложим число учеников, которые изучают английский, с числом учеников, которые изучают французский. Это число включает в себя: число учеников, изучающих только английский; число учеников, изучающих только французский; число учеников, изучающих оба языка. При этом учтены все ученики класса, так как каждый изучает хотя бы один язык. Кроме того, ученики, изучающие оба языка, посчитаны дважды: как изучающие английский и как изучающие французский. Следовательно, число учеников в классе получится, если из суммы числа учеников, изучающих английский, и числа учеников, изучающих французский, вычесть число учеников, изучающих оба языка. Получим $15 + 10 - 2 = 23$. $\square$

1.16. Площадь полученной фигуры $ABEDC$ равна разности площадей исходного прямоугольника и площади треугольника ACE , по которому производилось склеивание (см. рисунок). Площадь исходного прямоугольника равна $3 \cdot 4 = 12$. Найдем площадь треугольника ACE :

$$S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} EM \cdot AC = EM \cdot \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{2} = \frac{5}{2} EM = \\ = \frac{5}{2} \cdot AM \operatorname{tg} \angle EAM = \frac{25}{4} \operatorname{tg} \angle DAC = \frac{25}{4} \cdot \frac{DC}{AD} = \frac{25}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{75}{16}.$$



Значит,

$$S_{ABEDC} = 12 - \frac{75}{16} = \frac{117}{16}.$$

$\square$

1.17. Согласно формуле площади треугольника, имеем:

$$2S = ah_a = bh_b = ch_c.$$

Так как $h_a = 3$, $h_b = 4$, $h_c = 5$, то $a = \frac{2S}{3}$, $b = \frac{2S}{4}$, $c = \frac{2S}{5}$. Для определения вида треугольника воспользуемся теоремой косинусов. Достаточно рассмотреть его наибольший угол, а он лежит против наибольшей стороны $\frac{2S}{3}$. Заметим еще, что общий множитель S можно уничтожить, он не влияет на вид треугольника. Вычисляем косинус наибольшего угла:

$$\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{25} - \frac{4}{9} = \frac{225 + 144 - 400}{900} = -\frac{31}{900} < 0.$$

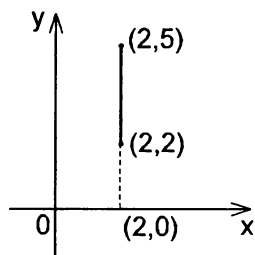
Значит, треугольник тупоугольный. $\square$

1.18. Рассмотрим три случая.

- 1) Пусть $a = 0$. Так как $a + c < 0$, то $c < 0$. Следовательно, уравнение $ax^2 + c = 0 \iff c = 0$ не имеет решений.
- 2) Пусть $a > 0$. График функции $f(x) = ax^2 + c$ — это парабола, ветви которой направлены вверх. Далее, $f(1) = a + c < 0$. Следовательно, уравнение $ax^2 + c = 0$ имеет решения.
- 3) Пусть $a < 0$. График функции $f(x) = ax^2 + c$ — это парабола, ветви которой направлены вниз. Свое максимальное значение, равное c , функция $f(x)$ достигает при $x = 0$. Следовательно, при $c < 0$ уравнение $ax^2 + c = 0$ не имеет решений и $a + c < 0$.

Объединяя результаты, получаем $a \leq 0$. $\square$

2.1. Так как $f(-0) = -f(0) = f(0)$, то $f(0) = 0$. $\square$



2.3. Для получения искомой проекции необходимо опустить из концов отрезка перпендикуляры на ось абсцисс (см. рисунок). Однако прямая $x = 2$, проходящая через данные точки, перпендикулярна оси Ox , и поэтому проекции концов отрезка на эту ось совпадают. Проекцией отрезка является точка с координатами $(2, 0)$. $\square$

2.4. Если начальная цена равна t , то цена после повышения составляет

$$t + \frac{20}{100}t = \frac{6}{5}t,$$

а после понижения

$$\frac{6}{5}t - \frac{20}{100} \cdot \frac{6}{5}t = \frac{24}{25}t < t,$$

то есть итоговая цена меньше первоначальной. $\square$

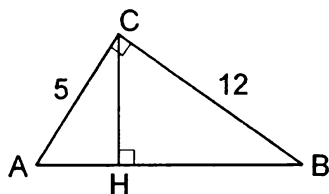
2.5. Так как $32768 = 2^{15}$, то имеем:

$$32768 = 2^{2^x} \iff 2^x = 15 \iff x = \log_2 15. \quad \square$$

2.6. После первого разрезания получилось 28 кусков. Далее каждое разрезание увеличивало общее число кусков на 6. Поэтому полученное в результате число кусков четно, а значит, не может равняться 2003. $\square$

2.7. Проведем высоту CH из вершины C (см. рисунок). Требуется найти длину отрезка AH . Из подобия треугольников ACH и ABC получим $AC^2 = AH \cdot AB$, откуда

$$AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{AC^2}{\sqrt{AC^2 + BC^2}} = \frac{25}{13}$$

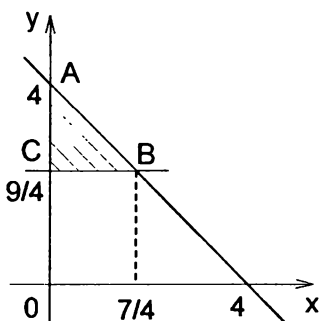


(в предпоследнем равенстве мы воспользовались теоремой Пифагора). $\square$

2.8. Найдем уравнение первой касательной, проведенной в точке с абсциссой $x_0 = 2$. В общем виде уравнение касательной можно записать следующим образом:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Учитывая, что $f(2) = 2$, $f'(2) = -1$, получаем $y = -x + 4$.



Найдем уравнение второй касательной. Точка максимума функции

$$f(x) = 3x - x^2 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

имеет координаты $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Касательная в точке максимума параллельна оси абсцисс, и задается уравнением $y = \frac{9}{4}$.

Введем обозначения для вершин треугольника, образованного осью ординат и этими двумя касательными (см. рисунок):

$$A = (0, 4), B = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right), C = (0, \frac{9}{4}).$$

Искомая площадь равна

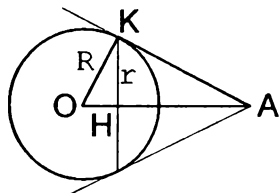
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{49}{32}. \quad \square$$

2.9. Так как вписанная в куб сфера имеет радиус 1, то ребро этого куба равно 2. Диаметр описанной сферы равен диагонали куба, то есть

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3},$$

откуда

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot (\sqrt{3})^2 = 12\pi. \quad \square$$



2.10. Рассмотрим сечение данной фигуры плоскостью, проходящей через точку A и центр сферы O (см. рисунок). Из подобия треугольников OKH и OAK получим

$$\frac{OK}{OA} = \frac{OH}{OK} \Rightarrow OA = \frac{OK^2}{OH} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad \square$$

2.11. Выпишем для степеней двойки: 2, 4, 8, 16, ... остатки от деления на 10. Это 2, 4, 8, 6, ...; дальше числа периодически повторяются. Следовательно, определить остаток от деления 2^n на 10 можно, зная остаток от деления n на 4. В нашем случае показатель степени равен

$$2^{1001} = 2 \cdot 2^{1000} = 2 \cdot 4^{500},$$

что делится на 4, поэтому $2^{2^{1001}}$ дает остаток 6 при делении на 10. $\square$

2.14. Из неравенства, связывающего среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел, имеем при $a > 0$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2,$$

причем равенство достигается только при $a = 1$. Аналогично, при $a < 0$

$$a + \frac{1}{a} \leq -2,$$

причем равенство достигается только при $a = -1$. Поскольку $|\sin x| \leq 1$, то данное уравнение может иметь решения только при $a = \pm 1$. Рассмотрим оба случая:

$$a = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$a = -1 \Rightarrow \sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

2.15. УКАЗАНИЕ: “разделить” 1 на 11 столбиком.

2.16. Обозначим данные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2002}$. Имеем:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{2001} + a_{2002} &= (a_1 + a_2) + \dots + (a_{2001} + a_{2002}) > \\ &> 1001 \cdot 1 = 1001. \end{aligned}$$

Значит, верен ответ 1), и ответ 2) неверен.

Ответ 3) также неверен. Например, для

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{2002} = \frac{2}{3}$$

получаем

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2002} = \frac{2}{3} \cdot 2002 < 2001. \quad \square$$

2.17. Первое утверждение истинно тогда и только тогда, когда дискриминант данного уравнения положителен:

$$D = 4a^2 - 4 > 0 \iff a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Второе утверждение истинно тогда и только тогда, когда

$$a - a^2 > 0 \iff a(1 - a) > 0 \iff a \in (0, 1).$$

Так как указанные промежутки в первом и втором случаях не пересекаются, то утверждения (а) и (б) не могут быть истинны одновременно. Поэтому искомое множество значений параметра a есть объединение всех найденных промежутков:

$$a \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty). \quad \square$$

2.18. Заметим, что при любом n данное неравенство имеет пару $(0, 0)$ решением. Кроме того, имеется лишь конечное число целочисленных решений.

Пусть (x, y) — ненулевое целочисленное решение данного неравенства. Тогда пары $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ также являются решениями, причем среди этих четырех решений либо все различны, либо различных ровно два. Таким образом, имеется четное число ненулевых целочисленных решений, и еще одно нулевое решение. $\square$

3.2. Пусть сейчас Ивану x лет. Когда Марии будет x лет, Ивану будет 24 года. Так как разница в возрасте Ивана и Марии постоянна, то

$$x - 12 = 24 - x \iff x = 18.$$

Сейчас Ивану 18 лет. $\square$

3.3. Так как

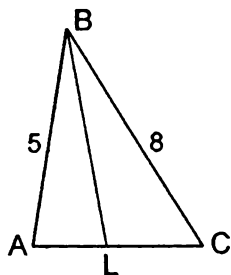
$$a^2 + 2a + 3 = (a + 1)^2 + 2 > 1 \quad \text{при всех } a,$$

то уравнение не имеет решений ни при каком a . В частности, ни при каком a значение $x = 1$ не является решением данного уравнения. $\square$

3.4. Так как данная функция $y(x)$ нечетна, то ее производная четна. $\square$

3.5. Треугольники ABL и CBL имеют общую высоту, проведенную из вершины B , поэтому их площади относятся как длины оснований (см. рисунок):

$$\frac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle CBL}} = \frac{AL}{CL}.$$



Согласно теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника, имеем

$$\frac{AL}{CL} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{8}.$$

Получаем соотношения

$$S_{\triangle ABL} : S_{\triangle CBL} = 5 : 8 \quad \text{и} \quad S_{\triangle ABL} + S_{\triangle CBL} = S_{\triangle ABC} = 10.$$

Отсюда легко находим, что

$$S_{\triangle ABL} = \frac{5}{13} \cdot 10 = \frac{50}{13}. \quad \square$$

3.6. Вычислим производную данной функции:

$$y'(x) = -4 \cos \left(2x - \frac{\pi}{8} \right).$$

Найдем все значения x , при которых эта производная равна $2\sqrt{2}$:

$$-4 \cos \left(2x - \frac{\pi}{8} \right) = 2\sqrt{2} \iff \cos \left(2x - \frac{\pi}{8} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{8} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} \pm \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Отберем из этих значений те, которые лежат в промежутке $[0, \pi]$. Так как числа в каждой из серий получаются с “шагом” π , то каждая серия дает ровно одно значение из указанного промежутка.

Среди значений первой серии (с плюсом) это

$$\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{8} = \frac{7\pi}{16},$$

для второй серии (с минусом) —

$$\frac{\pi}{16} - \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{16}.$$

Так как $\frac{11\pi}{16} > \frac{7\pi}{16}$, то ответом является $x = \frac{11\pi}{16}$. $\square$

3.7. УКАЗАНИЕ: объем тетраэдра равен трети произведения площади основания на длину высоты. Площадь основания (любого) равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Высоту легко найти при помощи теоремы Пифагора.

3.8. Заметим, что все простые числа, кроме 2, нечетны. Поэтому $p + 3$ четно для всех простых p , кроме $p = 2$, для которого $p + 3 = 2 + 3 = 5$ — простое число. Значит, ответы 1), 2), 3) и 4) неверны. $\square$

3.9. Среди прямоугольников одного периметра максимальную площадь имеет квадрат. Поэтому дыра имеет квадратную форму. Так как ее периметр равен 20, то сторона имеет длину 5, значит, длина диагонали равна $5\sqrt{2}$. $\square$

3.10. Произведение натуральных чисел равно произведению их наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя. В нашем случае это произведение равно $36 \cdot 6 = 216 = 2^3 \cdot 3^3$. Перебираем все возможные представления 216 в виде произведения:

$$1 \cdot 216, \quad 2 \cdot 108, \quad 3 \cdot 72, \quad 4 \cdot 54,$$

$$6 \cdot 36, \quad 8 \cdot 27, \quad 9 \cdot 24, \quad 12 \cdot 18.$$

Отберем пары, удовлетворяющие условию задачи — те, для которых наибольший общий делитель равен 6: это $6 \cdot 36$, $12 \cdot 18$. Легко видеть, что сумма сомножителей минимальна в последнем случае и равна 30. $\square$

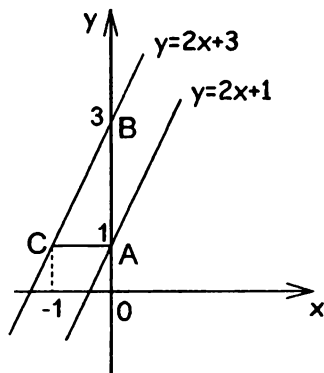
3.11. Согласно определению, $\arcsin t$ — это такой угол из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$, синус которого равен t . Поэтому, если выполнено равенство $\arcsin y = x$, то непременно $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. С другой стороны, при всех $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ данное равенство выполняется (это вытекает из определения $\arcsin$). $\square$

3.12. Пусть $x = a^3$, $y = a^5\sqrt{b}$, $z = \frac{a\sqrt{a}}{b^7}$. Из условия $\log_a b = \sqrt{5}$ вытекает, что x, y, z положительны и отличны от 1. Имеем:

$$\begin{aligned} \log_x y \cdot \log_y z \cdot \log_z x &= \frac{\log_y y}{\log_y x} \log_y z \cdot \log_z x = \\ &= \frac{\log_y z}{\log_y x} \log_z x = \log_z x \cdot \log_z x = 1. \end{aligned}$$

Значение данного выражения равно 1. $\square$

3.13. Сделаем чертеж и введем обозначения (см. рисунок). Расстояние между данными прямыми равно высоте треугольника ABC , опущенной на сторону BC . Найдем длину этой высоты. Треугольник ABC прямоугольный, $\angle A = 90^\circ$. Ясно, что $AC = 1$, $AB = 2$. Отсюда $S_{\triangle ABC} = 1$, и так как $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h_a \cdot BC$, то $h_a = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. $\square$



3.14. УКАЗАНИЕ: множеством решений каждого из неравенств является некоторый отрезок, может быть, состоящий из одной точки. При этом любые два отрезка имеют непустое пересечение. Следовательно (докажите!), все три отрезка имеют непустое пересечение.

3.15. Числа $f(1), f(3), \dots, f(2003)$ образуют арифметическую прогрессию. Ее первый член равен $f(1) = 5$, разность равна 8, всего 1002 члена. Найдем сумму этой прогрессии:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 5 + 8 \cdot 1001}{2} \cdot 1002 = 4017018. \quad \square$$

3.16. Так как $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$, то данное уравнение имеет вид

$$\sqrt{3x-1} = \frac{3}{\sqrt{3x-1}} \iff \frac{3x-4}{\sqrt{3x-1}} = 0 \iff x = \frac{4}{3}. \quad \square$$

3.17. Минутная стрелка правильно идущих часов делает полный оборот за 1 час; минутная стрелка часов Незнайки за 1 час делает $1 + \frac{10}{60} = \frac{7}{6}$ оборота; стрелка часов Знайки делает $1 - \frac{5}{60} = \frac{11}{12}$ оборота. Часы покажут 19 часов тогда, когда минутная стрелка этих часов сделает 11 полных оборотов. Поскольку часы Незнайки спешат, а Знайки — отстают, то 19 часов будет раньше на часах Незнайки. Поэтому они встретятся тогда, когда 19 часов будет на часах Знайки. Вычислим, через сколько времени это произойдет (отсчитывая с момента установки часов на 8):

$$11 : \frac{11}{12} = 12 \text{ часов.}$$

Значит, встреча состоится в 20 часов по точному времени. $\square$

3.18. Решим данное уравнение. Сделаем замену переменной $t = x + 1$. Имеем:

$$(t-3)^4 + (t+3)^4 = 272 \iff (\text{раскрываем скобки})$$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 108t^2 + 162 = 272 \Leftrightarrow t^4 + 54t^2 - 55 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 = -55 \text{ или } t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Тогда $x = 0$ или $x = -2$, уравнение имеет два решения. □

4.1. Согласно определению, функция $y(x)$ четна, если при всех x (из области определения) имеем $y(-x) = y(x)$, и нечетна, если $y(-x) = -y(x)$. Для данной функции имеем

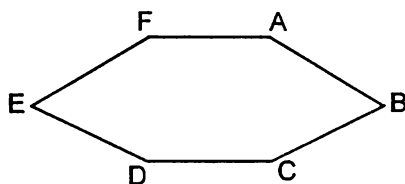
$$y(-x) = 2(-x)^3 = -2x^3 = -y(x),$$

то есть $y(x)$ нечетна. Ясно, что четной она не является: например, $y(1) = 2 \neq y(-1) = -2$. Ответ 5) также неверен: данная функция является строго возрастающей. □

4.2. Может: $2003 = 7 + 2 \cdot 998$. □

4.3. Может. Например, для чисел $1 + \sqrt{2}$ и $1 - \sqrt{2}$. (Убедитесь, что эти числа иррациональны!) □

4.4. Такие шестиугольники существуют, один из них изображен на рисунке. □



4.6. Имеем:

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1].$$

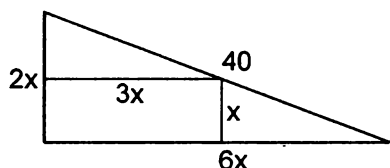
Множество решений — отрезок. □

4.7. Для числа $(-y)$ имеем $1 < -y < 3$. Складывая почленно это неравенство с неравенством $0 < x < 3$, получаем $1 < x - y < 6$. □

4.8. Вычислим производную данной функции:

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= 3 \cdot 3x^2 \ln x + 3x^3 \cdot \frac{1}{x} - 36 \ln x - 36x \cdot \frac{1}{x} - 21x^2 + 108 = \\
 &= 9x^2 \ln x + 3x^2 - 36 \ln x - 36 - 21x^2 + 108 = \\
 &= 9x^2 \ln x - 36 \ln x - 18x^2 + 72 = \\
 &= 9(\ln x - 2)(x^2 - 4) = 9(\ln x - 2)(x - 2)(x + 2).
 \end{aligned}$$

Итак, производная равна 0 при $x = 2$ и при $x = e^2$ (при $x = -2$ не определен $\ln x$). $\square$



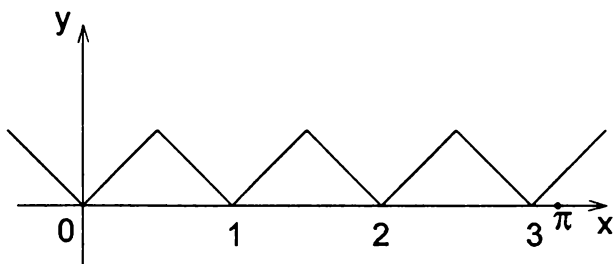
4.9. Пусть расстояния от середины гипотенузы до катетов равны x и $3x$ (см. рисунок). Тогда длины катетов равны $2x$ и $6x$. Найдём x , пользуясь теоремой Пифагора:

$$\begin{aligned}
 (2x)^2 + (6x)^2 &= 40^2 \iff 40x^2 = 40^2 \\
 \iff x &= 2\sqrt{10} \implies P = 40 + 2x + 6x = 40 + 16\sqrt{10}. \quad \square
 \end{aligned}$$

4.10. Имеем:

$$\begin{aligned}
 50! &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50 > 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 9 \cdot \overbrace{10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}^{40 \text{ раз}} > \\
 &> 10^{40} = (10^4)^{10} > (2^{10})^{10} = 2^{100}. \quad \square
 \end{aligned}$$

4.11. Построим график функции $f(x)$ (см. рисунок). Видно, что при $x \in \left[3, \frac{7}{2}\right]$ указанная функция задается формулой $f(x) = x - 3$. Значит, $f(\pi) = \pi - 3$. $\square$



4.12. Остаток при делении натурального числа на 9 равен остатку при делении на 9 суммы цифр этого числа. Поэтому однозначное число, которое получится в результате описанной процедуры, дает такой же остаток при делении на 9, что и исходное число 2^{100} . Найдем этот остаток. Последовательные степени двойки 2, 4, 8, 16, 32, 64 ... дают 2, 4, 8, 7, 5, 1, а дальше остатки повторяются. Поэтому необходимо определить остаток от деления показателя степени, равного 100, на 6. Так как 100 дает остаток 4 при делении на 6, то 2^{100} дает остаток 7 при делении на 9, и искомое число равно 7. $\square$

4.13. Решением данного неравенства является промежуток

$$x \in [a - \sqrt{a^2 - 1}, a + \sqrt{a^2 - 1}].$$

Этот промежуток содержит хотя бы одно положительное значение тогда и только тогда, когда

$$a + \sqrt{a^2 - 1} > 0 \iff \sqrt{a^2 - 1} > -a \iff$$

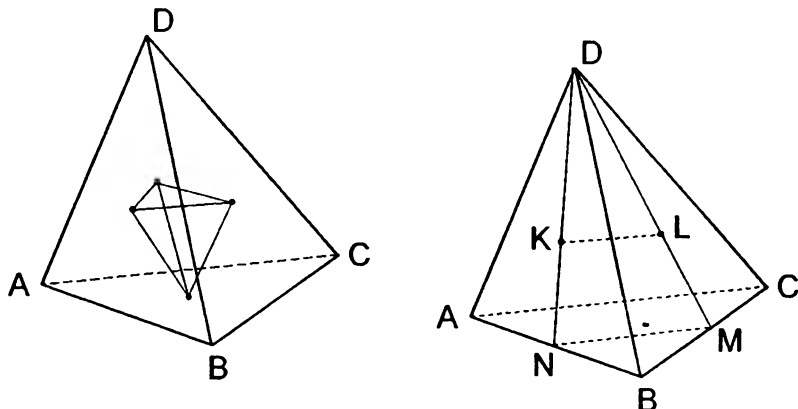
$$\left[\begin{cases} a^2 - 1 \geq 0 \\ -a < 0 \\ a^2 - 1 \geq a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ a > 0 \end{cases} \iff a \in [1, +\infty). \right.$$

$\square$

4.14. Так как при всех x имеем $x^2 \geq 0 \geq \cos x - 1$, то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ \cos x - 1 = 0 \end{cases} \iff x = 0. \quad \square$$

4.15. Ясно, что полученный тетраэдр является правильным. Найдем длину его ребра. Введем обозначения (см. рисунок).



Центры K, L граней ABD, BCD являются точками пересечения медиан этих граней, поэтому N, M — середины отрезков AB, BC соответственно. Значит, $MN = \frac{1}{2}$ как средняя линия треугольника ABC . Далее, медианы делятся в точке их пересечения в отношении $2 : 1$ считая от вершины, поэтому

$$\triangle KDL \sim \triangle NDM, \quad KL = \frac{2}{3}MN = \frac{1}{3}.$$

Итак, длина ребра малого тетраэдра равна $\frac{1}{3}$. Согласно результату задачи 3.7, его объем равен $\frac{\sqrt{2}}{324}$. $\square$

4.16. УКАЗАНИЕ: числа $f(1), f(2), f(4), \dots, f(2^{10})$ образуют геометрическую прогрессию.

4.17. По сравнению с обычным маршрутом, машина не проехала расстояние от места встречи до остановки и такое же расстояние от остановки до места встречи. При этом было сэкономлено 20 минут. Значит, на путь от места встречи до остановки машина потратила бы 10 минут. Следовательно, встреча произошла в 8 часов 50 минут. $\square$

4.18. Сгруппируем слагаемые попарно: первое с 91-ым, второе с 92-ым, ..., 90-е с 180-ым. Получим, пользуясь формулой приведения:

$$\begin{aligned} & (\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha + 90^\circ)) + (\cos^2(\alpha + 1^\circ) + \cos^2(\alpha + 91^\circ)) + \dots \\ & \dots + (\cos^2(\alpha + 89^\circ) + \cos^2(\alpha + 179^\circ)) = \\ & = (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) + (\cos^2(\alpha + 1^\circ) + \sin^2(\alpha + 1^\circ)) + \dots \\ & \dots + (\cos^2(\alpha + 89^\circ) + \sin^2(\alpha + 89^\circ)) = 90. \end{aligned}$$

Итак, при любом α значение данного выражения равно 90. $\square$

5.1. Функция $|f(x)|$ всегда четна, так как $|f(-x)| = |f(x)|$ в силу четности $f(x)$. Четной и нечетной одновременно может быть только функция, равная нулю при любом x , поэтому ответы 2), 3) неверны. $\square$

5.2. Радианная мера r и градусная мера d связаны соотношением $r = \frac{\pi d}{180}$, поэтому искомое значение равно $\frac{\pi \cdot 36}{180} = \frac{\pi}{5}$. $\square$

5.3. Пусть брату x лет, сестре y . Согласно условию задачи имеем:

$$x - 2 = \frac{1}{2}(x + 2) \quad \Rightarrow \quad x = 6,$$

$$y + 3 = 3(y - 3) \quad \Rightarrow \quad y = 6. \quad \square$$

5.4. Так как $a_7 = a_1 + 6d$, то имеем:

$$d = \frac{a_7 - a_1}{6} = 3.$$

По формуле суммы арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

получаем $S_{20} = 610$. $\square$

5.5. Пусть дано число x . Тогда 5% от его 10% равно

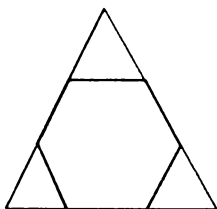
$$\frac{5}{100} \left(\frac{10}{100} x \right),$$

а 10% от его 5% равно

$$\frac{10}{100} \left(\frac{5}{100} x \right),$$

то есть тому же числу. □

5.7. Рассмотрим процесс построения такого числа. Для первой его цифры имеется четыре возможности: 1, 2, 3, 4. Для второй цифры, так как она отлична от первой, — уже три. Для третьей цифры остается две возможности и для четвертой — одна. Всего чисел может быть $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. □



5.8. Легко видеть, что длина стороны шестиугольника равна $\frac{1}{3}$. Поэтому его площадь в шесть раз больше площади правильного треугольника со стороной $\frac{1}{3}$:

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \quad \square$$

5.9. Для значений α из указанного интервала (а на самом деле и для всех $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) имеем

$$\sin \alpha + \cos \alpha > \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Значит, верен ответ 1). Легко видеть, что неравенства пунктов 3) и 4) верны не для всех $\alpha \in (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4})$. □

5.10. Вместо x в функцию $f(x)$ подставляем x^3 :

$$f(g(x)) = (x^3)^2 = x^6. \quad \square$$

5.11. УКАЗАНИЕ: нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = x^2 - 2ax + 1$. При любом значении a это парабола, направленная ветвями вверх.

5.13. Пусть $\frac{a}{b}$ — правильная дробь, то есть $a < b$, а $\frac{b}{a}$ — обратная ей. Правильная удалена от единицы на расстояние

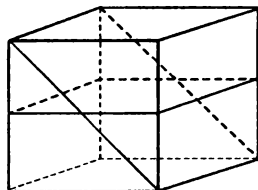
$$1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b},$$

а неправильная — на

$$\frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a}.$$

Так как $a < b$, то $\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{a}$, то есть правильная дробь всегда ближе к единице. $\square$

5.14. Три плоскости симметрии параллельны граням куба. Еще 6 содержат пару противоположных ребер. Всего 9 плоскостей симметрии (см. рисунок). $\square$



5.15. Пусть x является решением данного уравнения. Так как при всех допустимых x имеем

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{и} \quad \sin(\arcsin(x+1)) = x+1,$$

то получаем, что $x = x+1$, однако таких x не существует. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений. $\square$

5.16. Исследуем знак каждого из сомножителей, для чего найдем те целые x , при которых он отрицателен.

$$x^2 - 2 < 0 \iff x^2 < 2 \iff x = 0, x = \pm 1;$$

$$x^2 - 22 < 0 \iff x^2 < 22 \iff x = 0, x = \pm 1, \dots, x = \pm 4;$$

$$x^2 - 202 < 0 \iff x^2 < 202 \iff x = 0, x = \pm 1, \dots, x = \pm 14;$$

$$x^2 - 2002 < 0 \iff x^2 < 2002 \iff x = 0, x = \pm 1, \dots, x = \pm 44.$$

Произведение четырех сомножителей отрицательно тогда, когда либо отрицателен только один из них, или положителен только

один. Легко увидеть (например, изобразив полученные точки на числовой прямой), что это имеет место при следующих значениях x :

$$x \in [-44, -15] \cup [-4, -2] \cup [2, 4] \cup [15, 44], \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Всего целочисленных решений $2 \cdot ((44 - 15 + 1) + (4 - 2 + 1)) = 66$. $\square$

5.17. Остаток от деления натурального числа на 9 равен остатку от деления на 9 суммы его цифр. Поэтому однозначное число, которое получится в результате описанной процедуры, дает такой же остаток от деления на 9, что и исходное число 3^{100} . Так как $3^{100} = 9^{50}$, то 3^{100} делится на 9. Однозначных чисел, делящихся на 9, два: 0 и 9. Число 0 не может получиться, так как каждая следующая сумма цифр получается в результате суммирования нескольких положительных чисел. $\square$

5.18. Согласно известной формуле для вычисления длины медианы, имеем:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2),$$

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

Следовательно,

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3}{4} \cdot 20 = 15. \quad \square$$

6.1. Это постоянная функция, ее производная равна нулю. $\square$

6.2. Косинус тупого угла треугольника всегда отрицателен. $\square$

6.3. Так как один из сомножителей $\log_2 1 = 0$, то и все произведение равно нулю. $\square$

6.4. Числитель и знаменатель дроби делятся на 5. Следовательно, дробь сократима. $\square$

6.6. Решим данное неравенство:

$$y^2 - 2y - 2 < 1 \iff y^2 - 2y - 3 < 0 \iff y \in (-1, 3).$$

Отберем целочисленные решения, лежащие в этом интервале: 0, 1, 2. Сумма их квадратов равна $1^2 + 2^2 = 5$. $\square$

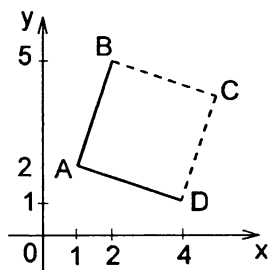
6.7. Рассмотрим остатки пяти последовательных натуральных чисел от деления на 5. Все пять остатков различны: это числа 0, 1, 2, 3, 4 (возможно, в другом порядке). Сумма этих остатков $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ делится на 5. Поэтому сумма пяти последовательных натуральных чисел всегда делится на 5. Легко убедиться в том, что такая сумма не может равняться пяти. Следовательно, она всегда является составным числом. Пример $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ показывает, что сумма может делиться на 3. $\square$

6.8. Имеем:

$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{10},$$

$$AD = \sqrt{(1-4)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10},$$

откуда (см. рисунок) $S = 10$. $\square$



6.9. К концу второго дня улитка будет на высоте

$$27 - 6 + 27 = 48 \text{ см.}$$

К концу вторых суток улитка спустится на высоту

$$48 - 6 = 42 \text{ см.}$$

В течение третьего дня она поднимется до высоты $42 + 27 = 69$ см. $\square$

6.10. Наибольшее и наименьшее значения данной функции достигаются либо на концах отрезка $[-5, 5]$, либо в тех точках, где производная функции равна нулю. Найдем нули производной:

$$3x^2 + 6x - 72 = 0 \iff x^2 + 2x - 24 = 0 \iff x = -6 \text{ или } x = 4.$$

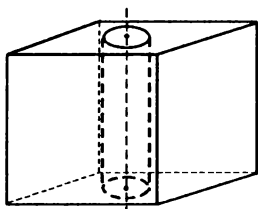
Точка $x = -6$ не принадлежит указанному отрезку. Вычисляем указанные значения:

$$f(-5) = -125 + 3 \cdot 25 - 72 \cdot (-5) + 90 = 400;$$

$$f(4) = 64 + 3 \cdot 16 - 72 \cdot 4 + 90 = -86;$$

$$f(5) = 125 + 3 \cdot 25 - 72 \cdot 5 + 90 = -70.$$

Максимальное из них равно 400. □



6.11. Площадь поверхности куба с ребром 5 равна $6 \cdot 5^2 = 150$. Для нахождения площади поверхности тела после вырезания цилиндра нужно вычесть удвоенную площадь круга (основания цилиндра) и прибавить площадь боковой поверхности цилиндра. Площадь основания цилиндра равна $\pi \cdot 1^2 = \pi$. Площадь боковой поверхности $5 \cdot \pi \cdot 2 = 10\pi$.

Искомая площадь равна

$$S = 150 - 2 \cdot \pi + 10\pi = 150 + 8\pi. \quad \square$$

6.13. Пусть v_1 (км/ч) — скорость пешехода, v_2 (км/ч) — скорость велосипедиста. Согласно условию задачи, имеем:

$$\frac{10}{v_1} = \frac{16}{v_2} \Rightarrow v_2 = \frac{8}{5}v_1.$$

Значит, при движении пешехода и велосипедиста навстречу друг другу по прямой AC они встретятся через

$$\frac{13}{v_1 + v_2} = \frac{13}{13v_1/5} = \frac{5}{v_1} \text{ (ч)},$$

следовательно, расстояние от точки A до места встречи равно

$$v_1 \cdot \frac{5}{v_1} = 5 \text{ (км)}. \quad \square$$

6.15. Если t — общий корень данных многочленов, то

$$t^2 + at + 1 = t^2 + t + a \Rightarrow (a - 1)t = a - 1.$$

Следовательно, либо $a = 1$, либо $t = 1$. Рассмотрим оба случая.

1) $a = 1$, тогда оба трехчлена совпадают: $x^2 + x + 1$, однако не имеют действительных корней. Этот случай не подходит.

2) $t = 1$ является общим корнем, тогда

$$\begin{cases} 1^2 + a + 1 = 0 \\ 1^2 + 1 + a = 0 \end{cases} \iff a = -2. \quad \square$$

6.16. Обозначим данный треугольник через ABC , пусть $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$. Пусть O — центр вписанной окружности, A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из O на BC, AC, AB соответственно (см. рисунок). Эти перпендикуляры являются и радиусами вписанной окружности.

Так как

$$\triangle AB_1O = \triangle AC_1O, \quad \triangle BC_1O = \triangle BA_1O,$$

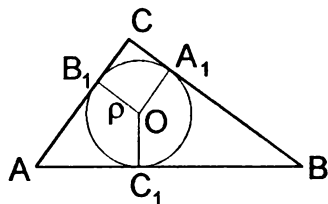
то

$$S_{\triangle ABC} = S_{OB_1CA_1} + 2S_{\triangle AOB}.$$

Четырехугольник OB_1CA_1 является квадратом со стороной ρ , его площадь равна ρ^2 . Найдем площадь треугольника AOB :

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OC_1 \cdot AB = \frac{1}{2} \rho c.$$

Значит, $S_{\triangle ABC} = \rho^2 + \rho c$. $\square$



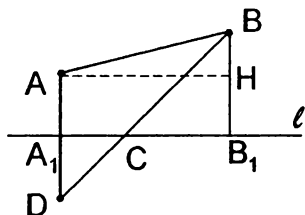
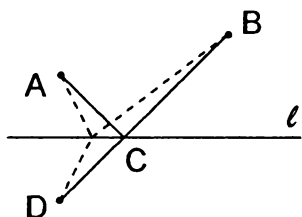
6.17. Применим данное в условии неравенство к числу $f(x)$:

$$f(f(x)) > f(x).$$

Однако $f(x) > x$ и, значит, при всех x имеем $f(f(x)) > x$.

Приведем пример, показывающий, что ответы 1) и 3) неверны. Пусть $f(x) = x^2 + 1$, тогда $f(x) = x^2 + 1 > x$ для всех x , и $f(x)$ не является возрастающей на $\mathbb{R}$. $\square$

6.18. Пусть точка A — дом математика, точка B — дом физика, прямая l — берег реки, на котором находятся дома. Для определения кратчайшего пути надо найти такую точку C на прямой l , что сумма расстояний до нее от точек A, B минимальна. Возьмем точку D , симметричную A относительно l . Тогда $AC = DC$. Кратчайшее расстояние от D до B достигается при движении по прямой. Поэтому искомая точка C есть точка пересечения прямой l и отрезка DB (см. рисунок).



Длину пути, равную $AC + CB = BD$, легко вычислить при помощи теоремы Пифагора. Именно, опустим перпендикуляр AH из точки A на прямую BB_1 . Тогда (все расстояния указываем в метрах)

$$BH = BB_1 - HB_1 = 50,$$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{132100 - 2500} = 360 \Rightarrow A_1B_1 = 360.$$

Далее, треугольники A_1CD и B_1CB подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$, откуда $A_1C = 120$ и $CB_1 = 240$. Вновь применяя теорему Пифагора к треугольникам A_1CD и B_1CB , находим

$$AC + CB = DC + CB = \sqrt{A_1D^2 + A_1C^2} + \sqrt{BB_1^2 + CB_1^2} =$$

$$= \sqrt{50^2 + 120^2} + \sqrt{100^2 + 240^2} = 130 + 260 = 390.$$

Значит, математику надо пройти 390 метров, на это он затратит 780 секунд, или 13 минут. $\square$

7.2. Так как

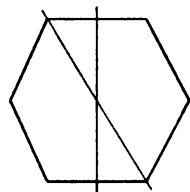
$$a_1 + a_{12} = (a_2 - d) + (a_{11} + d) = a_2 + a_{11} = 5,$$

по формуле суммы арифметической прогрессии находим

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = 30. \quad \square$$

7.4. Верен ответ 2), так как $\pi - 3 < 1 \Rightarrow \log_4(\pi - 3) < 0. \quad \square$

7.5. Правильный шестиугольник имеет шесть осей симметрии. Три оси соединяют пары противоположных вершин, другие три — середины противоположных сторон (см. рисунок). $\square$



7.6. Средняя скорость равна отношению длины всего пути ко времени, затраченному на весь путь. Пусть автомобиль потратил на каждую часть пути t часов, тогда он проехал всего

$$100t + 90t = 190t \text{ километров,}$$

затратив на это $2t$ часов. Средняя скорость при этом равна

$$\frac{190t}{2t} = 95 \text{ (км/ч)}. \quad \square$$

7.7. Если в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то суммы длин его противоположных сторон равны

$$AB + CD = BC + AD,$$

откуда легко найти периметр:

$$P = (AB + CD) + (BC + AD) = 2 \cdot (14 + 5) = 38. \quad \square$$

7.8. Имеем:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = \frac{c + d}{c - d}. \quad \square$$

7.9. Имеем:

$$\log_5 4 \cdot \log_4 3 = \frac{\log_4 4}{\log_4 5} \cdot \log_4 3 = \frac{\log_4 3}{\log_4 5} = \log_5 3,$$

$$\log_5 3 \cdot \log_3 2 = \frac{\log_3 3}{\log_3 5} \cdot \log_3 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 5} = \log_5 2,$$

$$\log_5 2 \cdot \log_2 5 = 1. \quad \square$$

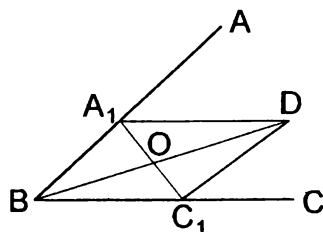
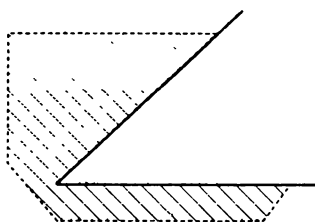
7.10. Пусть в комнате x мышей и y тараканов. Получаем следующее уравнение: $4x + 6y + 2(x + y) = 34 \iff 3x + 4y = 17$. Легко убедиться (например, перебором), что это уравнение имеет лишь одно решение в натуральных числах: $x = 3, y = 2$. $\square$

7.11. Решим данное неравенство:

$$-2x^2 + 4x + 10 > 0 \iff x^2 - 2x - 5 < 0 \iff x \in (1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}).$$

Отберем натуральные значения из полученного интервала: 1, 2, 3. Их сумма равна 6. $\square$

7.12. Так как $1,4 < \sqrt{2} < 2$, то $\pi < 4,2 < 3\sqrt{2} < 6 < 2\pi$. На рисунке штриховкой отмечена внутренность угла ABC . Ясно, что середины всех отрезков с концами на сторонах угла лежат вне угла. Покажем, что любая точка O внешности угла является серединой некоторого отрезка с концами на сторонах угла.



Построим такую точку D , чтобы точка O являлась серединой отрезка BD . Проведем через точку D прямые, параллельные сторонам угла, они пересекают лучи BA и BC в точках A_1 и C_1 соответственно. По построению четырехугольник A_1BC_1D является параллелограммом, O — точкой пересечения его диагоналей. Следовательно, O — середина отрезка A_1C_1 . Это и есть искомый отрезок, так как его концы лежат на сторонах угла. $\square$

7.13. В данное равенство подставим $x = 2$ и $x = \frac{1}{2}$:

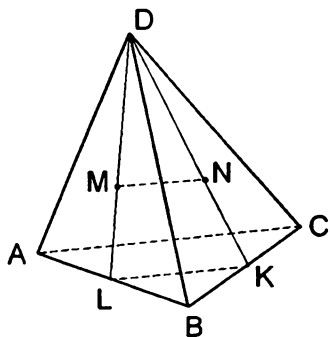
$$f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4}.$$

Умножая второе равенство на 3 и вычитая первое, найдем $f(2) = -\frac{13}{32}$. $\square$

7.14. Так как $2^{150} > 2^{10} = 1024 > 300$, то $2^{300} < 2^{2^{150}}$. $\square$

7.15. Обозначим вершины тетраэдра A, B, C, D . Пусть M и N — центры граней ABD, BCD соответственно, K и L — середины ребер BC и AB (см. рисунок). Так как KL есть средняя линия треугольника ABC , то $KL = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим треугольник KLD . Поскольку M — центр грани ABD , то M есть точка пересечения ее медиан, поэтому $MD = 2LM$. Аналогично $DN = 2KN$. Значит, треугольник DNM подобен треугольнику DKL с коэффициентом $\frac{2}{3}$, и $MN = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. $\square$



7.16. Покажем, что таких треугольников не существует. Пусть длины катетов равны $2k - 1$ и $2n - 1$, где $k, n \in \mathbb{N}$, тогда квадрат гипотенузы равен

$$(2k - 1)^2 + (2n - 1)^2 = 4(k^2 + n^2 - k - n) + 2,$$

то есть четен, но не делится на 4. Однако если квадрат целого числа четен, то четно само это число, и потому его квадрат должен делиться на 4. Следовательно, гипотенуза не может быть целым числом. $\square$

7.17. Рассмотрим два последовательных числа 7249999 и 7250000. Сумма цифр каждого из них делится на 7, и сумма цифр большего числа четна. $\square$

7.18. Рассмотрим возможные варианты.

1) Пусть $a < 0$, тогда левая часть уравнения неотрицательна, а правая неположительна. Равенство выполнено, только если обе части равны нулю, то есть $x = 1 = a$. Это противоречит предположению о том, что $a < 0$.

2) Пусть $a \geq 0$. Тогда обе части уравнения неотрицательны. Возведем в квадрат:

$$(x-1)^2 = a^2(x-a)^2 \iff (ax-a^2-x+1)(ax-a^2+x-1) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} ax - a^2 - x + 1 = 0 \\ ax - a^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} a = 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 1 \\ x = a + 1 \\ x = \frac{a^2 + 1}{a + 1} \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом, при $a = 1$ любое $x \in \mathbb{R}$ является решением.

Пусть $a \neq 1$. Найдем те a , при которых два найденных корня совпадают:

$$a + 1 = \frac{a^2 + 1}{a + 1} \iff (a + 1)^2 = a^2 + 1 \iff a = 0.$$

Итак, данное уравнение имеет единственное решение при $a = 0$. $\square$

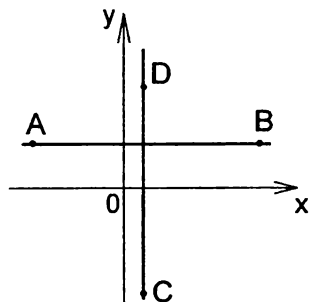
8.3. Сможет. Для этого надо сделать 3 больших прыжка в одну сторону и 4 маленьких — в противоположную. $\square$

8.4. Найдем выражение для $f(x)$. Подставляя поочередно $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \\ c = 6. \end{cases}$$

Следовательно, $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$ и $f(0) = 6$. Заметим, что при решении системы можно было ограничиться вычислением c , так как $f(0) = c$. $\square$

8.5. Уравнение прямой AB есть $y = 2$. Прямая CD задается уравнением $x = 1$. Точка их пересечения имеет координаты $(1, 2)$ (см. рисунок). $\square$



8.6. Пусть $2S$ (км) — длина всего пути. Первую половину пути автомобиль проехал за $\frac{S}{100}$ часов, а вторую — за $\frac{S}{90}$ часов. Средняя скорость равна отношению длины всего пути к суммарному затраченному времени:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2S}{\frac{S}{100} + \frac{S}{90}} = \frac{2}{\frac{1}{100} + \frac{1}{90}} = \frac{1800}{19} \quad (\text{км/ч}). \quad \square$$

8.7. Так как при всех y выполнено неравенство $|\sin y| \leq 1$, то ответ 1) верен. Покажем, что утверждения 2), 3), 4) неверны.

2) Функция $\arcsin x$ определена лишь при $x \in [-1, 1]$, поэтому $f(x)$ определена не при всех x .

3) Область определения функции $f(x)$ ограничена, поэтому $f(x)$

не является периодической.

4) $f(x)$ не является четной. Например,

$$f(-1) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq f(1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad \square$$

8.8. Рассмотрим возможные варианты.

Если число n дает остаток 0 при делении на 3, то $n = 3k$ и $n^2 + 1 = 9k^2 + 1$ дает остаток 1.

Если n дает остаток 1 при делении на 3, то есть $n = 3k + 1$, то $n^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2$ дает остаток 2.

Если n дает остаток 2, то $n = 3k + 2$ и $n^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5$ дает остаток 2.

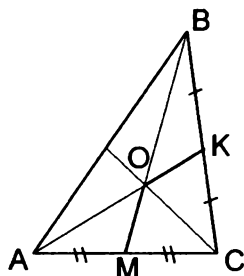
Таким образом, число $n^2 + 1$ может при делении на 3 иметь остаток 1 или 2. $\square$

8.9. Так как

$$\sqrt{15} > \frac{7}{2} > \pi \quad \text{и} \quad \sqrt{15} < \sqrt{16} = 4 < \frac{9}{2} < \frac{3\pi}{2},$$

то данный угол лежит в третьей четверти. $\square$

8.10. Верен ответ 3): это может быть круг, расположенный в плоскости $z = 0$. Значит, ответы 1) и 2) неверны. Ответ 4) также неверен, так как проекция шара на любую плоскость является кругом. $\square$



8.11. Три медианы треугольника делят его на шесть треугольников равной площади. Поэтому (см. рисунок)

$$\begin{aligned} S_{МСКО} &= S_{\Delta МСО} + S_{\Delta КСО} = \\ &= \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = 20. \end{aligned} \quad \square$$

8.12. УКАЗАНИЕ: это число делится на 3, но не делится на 9. $\square$

8.13. Пусть d — расстояние от вершины D до плоскости ABC . Тогда объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}d \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}d \cdot \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{10}{3}d \sin \angle BAC.$$

Заметим, что можно независимо друг от друга изменять величины d и $\sin \angle BAC$. Поэтому объем максимален, когда максимальны обе величины: d и $\sin \angle BAC$. Это происходит при $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ и $d = AD = 2$, тогда объем равен $\frac{20}{3}$. Заметим, что в этом случае все плоские углы при вершине A прямые. $\square$

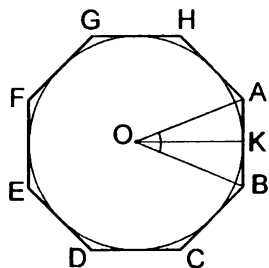
8.14. Первый портной произведет разрезы на расстояниях 2, 4, 6, ..., 98 метров от начала, т.е. на всех четных расстояниях. Второй портной разрежет материю на расстояниях 5, 10, 15, ..., 95 метров от начала, т.е. на расстояниях, кратных 5.

Поэтому, чтобы найти общее число разрезов, необходимо найти количество натуральных чисел, строго меньших 100, которые делятся на 2 или на 5. Количество чисел, делящихся на 2, равно 49; чисел, делящихся на 5, имеется 19. Если сложить 49 и 19, то получится количество чисел, которые делятся на 2 или на 5, но при этом числа, делящиеся на 10, будут посчитаны дважды. Количество чисел, делящихся на 10, равно 9. Поэтому чисел, делящихся на 2 или на 5, всего

$$49 + 19 - 9 = 59.$$

Это общее число различных разрезов. Число кусков на 1 больше числа разрезов, т.е. равно 60. $\square$

8.15. Пусть $ABCDEFGH$ — рассматриваемый восьмиугольник, O — центр вписанной в него окружности (см. рисунок). Достаточно найти площадь треугольника ABO , так как она составляет $\frac{1}{8}$ часть площади всего многоугольника. Пусть K — точка касания стороны AB с



окружностью. Имеем:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABO} &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \angle AOB = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{OK}{\cos \angle AOK} \right)^2 \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} \cdot \sin \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Так как

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1 + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2},$$

то

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1,$$

значит, площадь $ABCDEFGH$ равна $8(\sqrt{2} - 1)$. $\square$

8.16. УКАЗАНИЕ: рассмотреть функцию $f(x) = -\frac{1}{x}$. Она *не является* возрастающей на *всей* области определения!

8.17. Пусть t и $3t$ — корни данного уравнения. Имеем систему:

$$\begin{cases} 2t^2 - at + 1 = 0 \\ 18t^2 - 3at + 1 = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение системы на 9 и вычитая второе уравнение, выразим t через a :

$$t = \frac{4}{3a}.$$

Подставляя t в первое уравнение системы, найдем подходящие a :

$$2t^2 - at + 1 = 0; \quad \frac{32}{9a^2} - \frac{4}{3} + 1 = 0 \iff a = \pm \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

Отметим, что при этих значениях a исходное уравнение в действительности имеет два корня, так как его дискриминант, равный $a^2 - 8$, положителен:

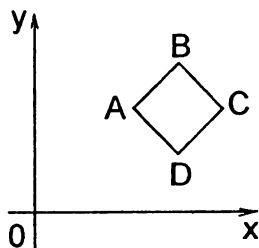
$$a^2 - 8 = \frac{16 \cdot 6}{9} - 8 = \frac{24}{9} > 0. \quad \square$$

8.18. Имеем:

$$\begin{aligned} 10^{11} - (10+1) \cdot 10^{10} + (10+1) \cdot 10^9 - \dots - (10+1) \cdot 10^2 + (10+1) \cdot 10 - 1 = \\ = 10^{11} - 10^{11} - 10^{10} + 10^{10} + 10^9 - \dots - 10^2 + 10^2 + 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

(легко видеть, что все слагаемые, кроме двух последних, входят в сумму дважды, один раз со знаком плюс, второй раз со знаком минус). $\square$

9.1. Данное множество — квадрат $ABCD$ с центром в точке $(5, 4)$ (вместе с внутренностью и с границей). Координаты его вершин: $A = (4, 4)$, $B = (5, 5)$, $C = (6, 4)$, $D = (5, 3)$ (см. рисунок). Легко видеть, что в этом квадрате точек с целочисленными координатами всего 5: это его центр и вершины. Найдём среднее геометрическое их ординат, то есть чисел 4, 4, 5, 4, 3:



$$\sqrt[5]{4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt[5]{2^6 \cdot 15} = 2\sqrt[5]{30}.$$

$\square$

9.2. Такой треугольник не существует, поскольку числа 2, 3, 5 не удовлетворяют неравенству треугольника. $\square$

9.3. Согласно известной формуле имеем:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 1 = -\frac{23}{27}. \quad \square$$

9.4. Заметим, что при $x > 1$ выполнены неравенства

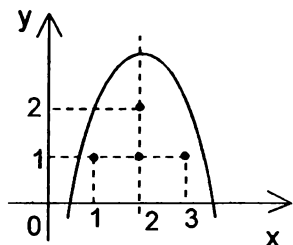
$$x^2 > 1 \Rightarrow 2^{x^2} > 2 \quad \text{и} \quad 5^x > 5 \Rightarrow 2^{x^2} 5^x > 10.$$

Однако $x = 1$ удовлетворяет данному в условии задачи неравенству, и поэтому $x = 1$ является ответом к задаче. $\square$

9.6. Если точка с положительными координатами (x, y) лежит ниже данной параболы, то выполнены неравенства:

$$0 < y < -x^2 + 4x - 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}).$$



Так как x должно быть натуральным числом, то имеются возможности $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Рассмотрим каждую из них (см. рисунок):

а) $x = 1$. Так как $y(1) = 2$, то удовлетворяет условию точка с координатами $(1, 1)$.

б) $x = 2$. Так как $y(2) = 3$, то удовлетворяют условию точки $(2, 1)$ и $(2, 2)$.

в) $x = 3$. Так как $y(3) = 2$, то подходит точка $(3, 1)$.

Всего получили 4 точки. □

9.7. Пусть частное равно k , тогда имеем

$$101 = kn + \frac{k}{5} \iff 505 = k(5n + 1).$$

Число 505 может быть представлено в виде произведения двух натуральных чисел следующими способами:

1) $505 = 1 \cdot 505$, $k = 1$, $5n + 1 = 505$ — невозможно, так как $5n + 1$ не делится на 5, а 505 делится.

2) $505 = 5 \cdot 101$, $k = 5$, $5n + 1 = 101$, откуда $n = 20$ — подходит.

3) $505 = 101 \cdot 5$ не подходит, как и в первом случае.

4) $505 = 505 \cdot 1$, $k = 505$, $5n + 1 = 1$, откуда $n = 0$ — не подходит, так как 0 не является натуральным числом. □

9.8. Решим данное неравенство, для чего вычислим корни квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{15}.$$

Таким образом, решением данного неравенства служит отрезок $[-4 - \sqrt{15}, -4 + \sqrt{15}]$. Отберем из этого отрезка целые отрицательные значения. Так как

$$-8 < -4 - \sqrt{15} < -7 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < -\sqrt{15} < -3 \quad \Leftrightarrow \quad 4 > \sqrt{15} > 3$$

и

$$-1 < -4 + \sqrt{15} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 < \sqrt{15} < 4,$$

то это числа

$$-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7,$$

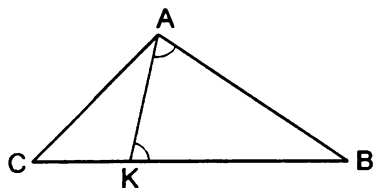
и их произведение отрицательно. □

9.9. Докажем, что в треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол. Согласно теореме синусов, имеем

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Поэтому напротив большей стороны лежит угол с большим синусом. Значит, против большего острого угла лежит большая сторона.

Покажем теперь, что если один из углов треугольника тупой, то напротив него лежит наибольшая из сторон. Рассмотрим треугольник ABC , пусть угол A — тупой (см. рисунок). Построим такой отрезок AK , заключенный внутри угла BAC , что



$$\angle BAK = \frac{\pi - \angle ABC}{2}.$$

Это возможно, так как $\angle BAK < \frac{\pi}{2}$. Точка K лежит на отрезке BC . Треугольник ABK равнобедренный по построению. Значит, $BC > BK = AB$. Неравенство $BC > AC$ доказывается аналогично. □

9.10. УКАЗАНИЕ: Сумма величин внешних углов любого выпуклого многоугольника равна 2π (докажите!). У правильного многоугольника все внешние углы равны.

9.12. Воспользуемся формулой для производной сложной функции. Здесь

$$y(x) = f(g(x)), \quad \text{где} \quad f(x) = \sqrt[5]{x} \quad \text{и} \quad g(x) = x^4 + 3x + 2.$$

Так как

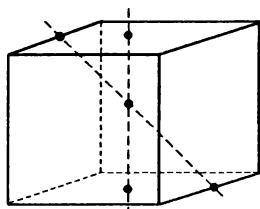
$$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \quad \text{и} \quad g'(x) = 4x^3 + 3,$$

то

$$y'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{4x^3 + 3}{5\sqrt[5]{(x^4 + 3x + 2)^4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{7}{5\sqrt[5]{6^4}} = \frac{7}{5\sqrt[5]{1296}}.$$

□



9.13. Имеется 6 осей симметрии, соединяющих середины противоположных ребер куба, и 3 оси, соединяющие центры противоположных граней. Всего 9 осей (см. рисунок). □

9.14. Знаменатель q геометрической прогрессии (b_n) равен отношению какого-то ее члена к предыдущему: $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. В нашей прогрессии, например, натуральны первый и второй члены, поэтому знаменатель рационален. Значит, число

$$b_{101} = b_{100} \cdot q$$

рационально. Следовательно, ответ 4) неверен, а ответ 3) верен. Приведем пример, показывающий, что неверны ответы 1) и 2). Это прогрессия

$$2^{99}, 2^{98}, 2^{97}, \dots, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$$

□

9.15. Если m — делитель натурального числа n , то и $\frac{n}{m}$ также является делителем n . Таким образом, все делители числа n разбиваются на пары. Исключение составляет случай, когда два числа пары равны между собой, тогда количество делителей нечетно. Такое, очевидно, может случиться только если n является полным квадратом. $\square$

9.16. УКАЗАНИЕ: сумма коэффициентов произвольного многочлена $f(x)$ равна его значению в точке $x = 1$, то есть $f(1)$.

9.17. Приведенные высказывания равносильны (соответственно) следующим:

— Число иррационально и равно $3\sqrt{2}$;

— Число дает остаток 1 при делении на 5 и равно π .

Рассмотрим первое высказывание. Если бы была верна его вторая часть (“число равно $3\sqrt{2}$ ”), то была бы верна и первая (“число иррационально”), так как $3\sqrt{2}$ иррационально. Следовательно, число иррационально и *не равно* $3\sqrt{2}$.

Рассмотрим второе высказывание. Первая часть его не может быть верной, так как нам уже известно, что число иррационально, а делить с остатком возможно лишь целые числа. Значит, справедлива его вторая часть, то есть неизвестное число равно π . $\square$

9.18. Представим оба слагаемых в виде обыкновенных дробей. Пусть $a = 0,(1)$, $b = 0,(01)$. Тогда

$$a = 0,(1) = 0,1 + 0,0(1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}a \Rightarrow a = \frac{1}{9};$$

$$b = 0,(01) = 0,01 + 0,00(01) = \frac{1}{100} + \frac{1}{100}b \Rightarrow b = \frac{1}{99}.$$

Их сумма равна

$$a + b = \frac{1}{9} + \frac{1}{99} = \frac{12}{99} = 0,(12)$$

(последнее равенство может быть установлено аналогично тому, как было сделано при представлении b обыкновенной дробью). $\square$

10.1. Из нечетности функции $f(x)$ имеем

$$f(-2) = -f(2) = -2^4 = -16. \quad \square$$

10.2. Данное неравенство задает на координатной плоскости квадрат с вершинами в точках $A = (7, -3)$, $B = (2, 2)$, $C = (-3, -3)$, $D = (2, -8)$. Его диагональ имеет длину 10, а площадь равна половине квадрата диагонали: $S = 50$. $\square$

10.3. Многочлен второй степени не может иметь более двух корней. Поэтому такой многочлен равен нулю при всех x , откуда $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. $\square$

10.4. Пусть A — объем производимой работы, v — исходная производительность труда. Тогда

$\frac{A}{v}$ — время, затраченное до повышения производительности,

$$v + \frac{30}{100}v = \frac{13}{10}v \text{ — повышенная производительность.}$$

Время, затраченное после повышения производительности, равно

$$\frac{A}{13/10v} = \frac{10A}{13v}.$$

Это время составляет $\frac{10}{13}$ исходного времени, что на $100 \cdot \frac{3}{13}\% = 23\frac{1}{13}\%$ меньше. $\square$

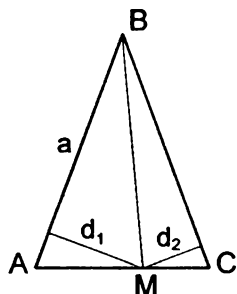
10.5. Из условия следует, что после того как от урока прошло 10 минут и еще треть всего урока, до конца осталось 20 минут. Пусть t (минут) — общая продолжительность урока. Имеем:

$$t = 10 + \frac{t}{3} + 20 \Rightarrow t = 45.$$

Урок длился 45 минут. $\square$

10.6. УКАЗАНИЕ: данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos 4x = 1. \end{cases}$$



10.7. Пусть d_1, d_2 — расстояния от точки M до сторон AB и BC соответственно (см. рисунок). Заметим, что

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BCM} = \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot d_1 + \frac{1}{2} BC \cdot d_2 = \frac{a}{2} (d_1 + d_2). \end{aligned}$$

С другой стороны, вычисляя площадь треугольника ABC по формуле Герона, получаем

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{\left(a + \frac{b}{2}\right) \left(a - \frac{b}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2}.$$

Приравняв полученные выражения, находим

$$d_1 + d_2 = \frac{b}{2a} \sqrt{4a^2 - b^2}.$$

□

10.11. Искомая сумма есть сумма первых 50 членов арифметической прогрессии

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99$$

с первым членом, равным 1, и разностью 2. Находим ее значение по известной формуле

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 99}{2} \cdot 50 = 2500.$$

□

10.12. Обозначим $f(x) = \arccos 4x$, $g(x) = \sin 2x + 1$. Имеем:

$$y(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}} \Rightarrow y'(0) = \left(\frac{f(0)}{g(0)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{(g'(0))^2}.$$

Так как $f(0) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $g(0) = 1$ и

$$f'(x) = -\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} \Rightarrow f'(0) = -4,$$

$$g'(x) = 2 \cos 2x \Rightarrow g'(0) = 2,$$

то окончательно получаем, что

$$y'(0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-4 - \pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}(4 + \pi)}{4\sqrt{\pi}}.$$

□

10.14. Имеем

$$3\sqrt{\log_3 2} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\log_2 3}}} = 2\sqrt{\log_2 3},$$

откуда следует, что

$$2\sqrt{\log_2 3} - 3\sqrt{\log_3 2} = 2\sqrt{\log_2 3} - 2\sqrt{\log_2 3} = 0.$$

□

10.15. Как и в задаче 8.13, объем пирамиды максимален, когда все плоские углы при вершине D прямые. Тогда объем пирамиды равен 1. С другой стороны, объем равен трети произведения расстояния от точки D до плоскости ABC на площадь этой грани. Вычислим площадь грани ABC , пользуясь формулой Герона. По теореме Пифагора получим

$$AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad BC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

$$AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13})(\sqrt{5} + \sqrt{10} - \sqrt{13}) \times} \\ &\times \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{10} + \sqrt{13})(-\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13})} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(2 + 10\sqrt{2})(10\sqrt{2} - 2)} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Искомое расстояние равно

$$1 : \left(\frac{1}{3} S_{ABC} \right) = \frac{3}{S_{ABC}} = \frac{6}{7}. \quad \square$$

10.16. Решение аналогично 9.15.

10.17. Заметим, что функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ при $x \geq 1$ является возрастающей. Действительно, пусть $x > y \geq 1$, тогда

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \left(x + \frac{1}{x} \right) - \left(y + \frac{1}{y} \right) = \\ &= \frac{x^2 + 1}{x} - \frac{y^2 + 1}{y} = \frac{(xy - 1)(x - y)}{xy} > 0. \end{aligned}$$

Для данных в условии задачи чисел имеем

$$a = f(1), \quad b = f(\log_3 \pi), \quad c = f(\log_3 \pi^2).$$

Так как $1 < \log_3 \pi < \log_3 \pi^2$, то $a < b < c$. $\square$

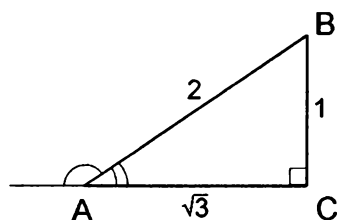
10.18. Сумма квадратов нескольких чисел всегда неотрицательна, и она равна нулю только тогда, когда все числа равны нулю, поэтому ответ 1) неверен. Покажем, что верен ответ 3). Для этого возьмем 100000 чисел, каждое из которых равно $\frac{1}{100000} = 0,00001$. Тогда их сумма равна 1, а сумма квадратов равна

$$100000 \cdot \left(\frac{1}{100000} \right)^2 = \frac{1}{100000} = 0,00001 < 0,0001.$$

Таким образом, ответ 3) верен, а ответ 2) неверен (так как 0,00001 меньше 1). Ответ 4) неверен: можно взять, например, числа 3 и -2 , их сумма равна 1, а сумма их квадратов равна 13. $\square$

11.1. Заметим, что если x — решение данного уравнения, то и $(-x)$ — тоже решение. Кроме того, интервал $(-1/3, 1/3)$ симметричен относительно 0. Поэтому все лежащие в нем решения попарно сократятся. Не будет “пары” лишь у корня $x = 0$, но он не даст вклада в сумму корней. $\square$

11.2. Может. Например, $(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2}) = -1$ (убедитесь, что сомножители иррациональны!). $\square$



11.3. Сумма внешнего угла A и угла BAC треугольника равна π (см. рисунок). Найдём угол BAC . Заметим, что $AB^2 = BC^2 + AC^2$ и поэтому треугольник ABC прямоугольный (угол ACB прямой). Тогда

$$\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BAC = \frac{\pi}{6}.$$

Следовательно, внешний угол при вершине A равен $\frac{5\pi}{6}$. $\square$

11.4. Трёхзначные делящиеся на 7 числа, расположенные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию с разностью 7. Ее первый член равен 105, последний — 994. Поэтому таких чисел всего

$$\frac{994 - 105}{7} + 1 = 128$$

и их сумма равна

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{105 + 994}{2} \cdot 128 = 70336. \quad \square$$

11.6. Новые цены составляют $\frac{11}{10}$ часть старых. Поэтому продуктов на данную сумму можно будет купить $\frac{10}{11}$ часть от количества продуктов до повышения цен, то есть на $\frac{1}{11}$ часть меньше. Это составляет $\frac{100}{11}\% = 9\frac{1}{11}\%$. $\square$

11.8. Ответы 3) и 4) неверны, как показывают примеры чисел 2^2 и 3^2 . Покажем, что верен ответ 2). Для числа $16 = 4^2$ произведение делителей равно $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 = 32^2$. Однако для числа $9 = 3^2$ произведение делителей $1 \cdot 3 \cdot 9 = 27$ не является полным квадратом. $\square$

11.9. Соотношение а) не выполняется при $x = 0$.

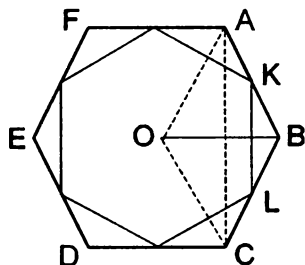
Выражение в левой части б) определено лишь при $x \in [-1, 1]$ (это область определения функции $\arcsin$), и потому не может быть верным при всех $x \in \mathbb{R}$.

Соотношение с) не выполняется, например, для $x = 2\pi$:

$$\arcsin(\sin 2\pi) = \arcsin(0) = 0 \neq 2\pi.$$

При $x = \frac{1}{2}$ не выполняется неравенство d), так как $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.
Итак, верен ответ 1). $\square$

11.10. Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ (см. рисунок). Тогда отрезки $OA, \dots, OF$ разбивают шестиугольник на шесть равных правильных треугольников. Четырехугольник $ABCO$ является ромбом и состоит из двух таких треугольников, поэтому его площадь равна $\frac{1}{3}S$. Диагональ AC разбивает ромб на два равных треугольника, поэтому $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6}S$.



Пусть K, L — середины сторон AB, BC , тогда

$$S_{\triangle KBL} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{24}S,$$

откуда получаем, что искомая площадь равна

$$S - 6 \cdot S_{\triangle KBL} = \frac{3}{4}S. \quad \square$$

11.12. Обозначим рассматриваемые числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Известно, что

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = 4, \quad \frac{a_4 + \dots + a_{10}}{7} = 6.$$

Следовательно,

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12, \quad a_4 + \dots + a_{10} = 42$$

и

$$\frac{a_1 + \dots + a_{10}}{10} = \frac{12 + 42}{10} = \frac{27}{5}. \quad \square$$

11.13. Имеем

$$x^4 + 25 = (x^2)^2 + 5^2 \geqslant 2 \cdot x^2 \cdot 5 \Rightarrow \frac{x^2}{x^4 + 25} \leqslant \frac{1}{10},$$

причем равенство достигается при $x = \pm\sqrt{5}$. $\square$

11.15. Для любых $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ справедливо неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом: $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$. Применяя это неравенство к числам $2^{\sin x}$ и $2^{\cos x}$, получаем

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geqslant 2\sqrt{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}} = 2^{1+\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)} = 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(x+\frac{\pi}{4}))}.$$

При всех x выполнены неравенства

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant -1 \Rightarrow 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(x+\frac{\pi}{4}))} \geqslant 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Следовательно, при всех x имеем $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geqslant 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$. $\square$

11.16. Рассмотрим числа

$$101! + 2, \quad 101! + 3, \quad 101! + 4, \quad \dots, \quad 101! + 100, \quad 101! + 101.$$

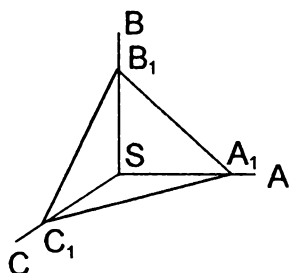
Так как $101! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100 \cdot 101$, то

$$101! + 2 \quad \text{делится на } 2,$$

$$101! + 3 \quad \text{делится на } 3,$$

$$101! + 101 \quad \text{делится на } 101.$$

Итак, все указанные числа — составные. $\square$



11.17. Допустим, что сечение указанного вида существует (см. рисунок). Обозначим $A_1S = a$, $B_1S = b$, $C_1S = c$. Тогда

$$A_1B_1^2 = a^2 + b^2, \quad B_1C_1^2 = b^2 + c^2,$$

$$A_1C_1^2 = a^2 + c^2,$$

откуда

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 - A_1C_1^2 = 2b^2 > 0 \Rightarrow \angle A_1B_1C_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично, $\angle B_1A_1C_1 < \frac{\pi}{2}$ и $\angle B_1C_1A_1 < \frac{\pi}{2}$. Однако по предположению, один из углов треугольника $A_1B_1C_1$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Противоречие показывает, что сечения указанного вида не существует. $\square$

11.18. Заметим, что

$$0,2(13) = 0,2 + 0,0(13) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \cdot 0,(13).$$

Поэтому достаточно представить в виде обыкновенной дроби число $a = 0,(13)$. Справедливо равенство

$$0,(13) = 0,13 + 0,00(13) \Rightarrow$$

$$a = \frac{13}{100} + \frac{a}{100} \Rightarrow a = \frac{13}{100} : \frac{99}{100} = \frac{13}{99}.$$

Следовательно, исходное число равно

$$0,2(13) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{13}{99} = \frac{211}{990}.$$

$\square$

12.1. Так как $\ln^3 \pi = (\ln \pi)^3 > 0$, то минимальное значение $f(x)$ равно $f(0) = 0$. $\square$

12.2. Пусть $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, тогда $ab = \frac{mp}{nq}$ — рационально. $\square$

12.3. Площадь выпуклого четырехугольника с диагоналями d_1, d_2 равна половине произведения диагоналей на синус угла φ между ними: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$. Максимальное значение этого выражения достигается при $\sin \varphi = 1$, или $\varphi = 90^\circ$, и равно $\frac{1}{2}d_1d_2$. Отметим, что существует бесконечно много “экстремальных” четырехугольников. $\square$

12.4. Функция постоянна, поэтому ее производная равна 0. $\square$

12.5. Разложим число 147 на множители: $147 = 3 \cdot 7 \cdot 7$. Перечислим все его натуральные делители:

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 3 \cdot 7, \quad 7 \cdot 7, \quad 3 \cdot 7 \cdot 7.$$

Суммируя полученные числа, находим ответ:

$$1 + 3 + 7 + 21 + 49 + 147 = 228. \quad \square$$

12.6. При отрицательных q члены данной последовательности поочередно то положительны, то отрицательны, и поэтому она не является убывающей.

При $q \geq 1$ последовательность также не является убывающей, так как второй ее член q не меньше первого 1.

При $q = 0$ все члены, начиная со второго, — нули и последовательность не является убывающей.

Покажем, что она убывает при всех $q \in (0, 1)$. Действительно, при таких q имеем (каждое неравенство цепочки получается из предыдущего после умножения на q , а самое первое неравенство справедливо согласно выбору q):

$$1 > q \Rightarrow q > q^2 \Rightarrow q^2 > q^3 \Rightarrow q^3 > q^4 \dots \quad \square$$

12.9. УКАЗАНИЕ: Найти (целое!) число яиц, которое снесет каждая курица за 101 день. Сложить полученные значения.

12.10. Пользуясь формулой для разности квадратов, находим

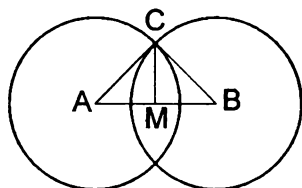
$$(1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + (5^2 - 6^2) + \dots + (99^2 - 100^2) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + (5-6)(5+6) + \dots + (99-100)(99+100) = \\
 &= -(1+2+3+\dots+99+100) = -\frac{100 \cdot 101}{2} = -5050. \quad \square
 \end{aligned}$$

12.11. Вершина параболы имеет координаты $x = a$, $y = 1 - 2a^2$, откуда $y = 1 - 2x^2$. Поэтому, когда a пробегает все вещественные значения, вершины парабол лежат на линии $y = 1 - 2x^2$. Так как a может быть любым, то $x = a$ может быть любым, поэтому каждая точка линии $y = 1 - 2x^2$ может служить вершиной некоторой параболы из данного семейства. $\square$

12.12. Рассмотрим сечение данной фигуры плоскостью, проходящей через центры сфер (см. рисунок). Искомый радиус равен CM . Применим теорему Пифагора к треугольнику ACM :

$$AM = \frac{d}{2}, \quad AC = R \Rightarrow CM = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}. \quad \square$$



12.13. Функция $\arcsin t$ определена при $t \in [-1, 1]$, поэтому непременно $x \in [-1, 1]$. Кроме того, при всех таких x выполняется исходное равенство. В самом деле, по определению $\arcsin x$ — это такой угол из интервала $[-\pi/2, \pi/2]$, синус которого равен x , то есть $\sin(\arcsin x) = x$. $\square$

12.14. Сумма цифр такого числа равна $2003 \cdot 1 + 2003 \cdot 2 = 6009$, что делится на 3, но не делится на 9. Согласно признакам делимости на 3 и 9, наше число также делится на 3, но не делится на 9, и потому не может быть полным квадратом. $\square$

12.15. УКАЗАНИЕ. Возможны четыре ситуации: машины движутся навстречу друг другу, машины движутся в противоположных направлениях, первая едет за второй, вторая едет за первой.

12.16. Задача состоит в нахождении такого натурального числа n , что:

$$n \leq 100; \quad n \text{ делится на } 3; \quad \frac{8}{100}n \text{ — целое число.}$$

Так как $\frac{8}{100} = \frac{2}{25}$, то n делится на 25. Среди чисел, не превышающих 100, ровно 4 числа делятся на 25, это 25, 50, 75, 100. Из них только 75 делится на 3. Значит, на предприятии 75 рабочих, из них треть, то есть 25 человек, женщины. $\square$

12.17. Справедлива формула $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$. Найдем длины сторон рассматриваемого треугольника. Для этого решим систему

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \\ 2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \\ 3 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = \frac{8}{3} \\ c^2 = \frac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ c = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ясно, что выполнено соотношение

$$b^2 + c^2 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4 = a^2.$$

По теореме, обратной теореме Пифагора, получаем, что рассматриваемый треугольник — прямоугольный. Заметим еще, что такой треугольник существует, так как числа a, b, c удовлетворяют неравенству треугольника:

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a. \quad \square$$

12.18. У чисел

$$b = 8,(7) = 8,7777777 \dots \quad \text{и} \quad c = 8,(71) = 8,71717171 \dots$$

совпадают целые части и один знак после запятой. Второй после запятой знак больше у числа b , поэтому $b > c$.

Сравним a и b . Имеем

$$2\sqrt{19} < 8,72 \Leftrightarrow \sqrt{19} < 4,36 \Leftrightarrow 19 < (4,36)^2 = 19,0096.$$

Итак,

$$a = 2\sqrt{19} < 8,72 < 8,77 < b.$$

Сравним теперь a и c . Имеем

$$2\sqrt{19} > 8,7172 \Leftrightarrow \sqrt{19} > 4,3586 \Leftrightarrow 19 > 18,99739396.$$

Следовательно, $b > a > c$. $\square$

13.1. Так как $-\frac{\pi}{2} < -1 < \frac{\pi}{2}$, то $\cos(-1) > 0$. Кроме того, $\cos(-1) < 1 < \pi$. Поэтому $\sin(\cos(-1)) > 0$. $\square$

13.2. Имеем: $(1-2) + (3-4) + (5-6) + \dots + (99-100) = -50$. $\square$

13.3. Обозначим данное число через n . Тогда $n+5 = 9k$, $k \in \mathbb{N}$. Значит, $n-1 = (n+5)-6 = 9k-6$ делится на 3. Поэтому остаток от деления n на 3 равен 1. $\square$

13.6. Таких прямоугольников не существует. В самом деле, так как $y-5$ есть длина стороны, то $y > 5$. По условию $x+y=3$ и $x > 0$, откуда $y < 3$. Это противоречит полученному соотношению $y > 5$. $\square$

13.7. Правильным ответом является 4), так как

$$\sqrt{2} < 1,63 < \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 < (1,63)^2 = 2,6569 < 3$$

и число $1,63 = \frac{163}{100}$ рационально. Легко убедиться, что ответы 1), 2), 3) неверны. $\square$

13.8. Задача состоит в решении неравенства

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x} \geq 0 &\Leftrightarrow x \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq x \\ x \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad \square$$

13.9. УКАЗАНИЕ. Полученное тело — цилиндр высоты a , в его основании лежит круг радиуса $a\sqrt{2}$.

13.10. Возможно, что во всех аудиториях людей поровну, и поэтому ответы 1) и 4) неверны. Ответ 3) также неверен: возможно, во всех аудиториях по 2 человека.

Покажем, что верен ответ 2). Рассуждаем от противного: если нет четырех аудиторий с одинаковым числом человек, то для каждого числа от 0 до 20 имеется не более 3 аудиторий с этим количеством людей. Но в этом случае может получиться всего лишь $3 \cdot 21 = 63$ аудитории, а по условию их 70. Значит, исходное предположение о том, что нет четырех аудиторий с одинаковым числом человек, неверно. $\square$

13.11. Такие треугольники обязательно подобны (по двум углам). Равные треугольники удовлетворяют условию задачи, поэтому ответ 2) неверен.

Возьмем разносторонний треугольник, пусть длины его сторон равны a, b, c . Тогда подобный ему треугольник со сторонами $\frac{a}{b}a, a, \frac{a}{b}c$ не равен ему (так как коэффициент подобия отличен от 1). Однако эта пара треугольников удовлетворяет условию задачи. Таким образом, единственным верным ответом является 3). $\square$

13.12. Так как $2 < e < 3$, то $8 < 2e^2 < 18$ и $33 < e^5 + 1$. Значит, $b > a > c$. $\square$

13.13. Имеем:

$$f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x) - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x.$$

Область определения есть $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, так как при $x = 1$ не определено значение $f(x)$. $\square$

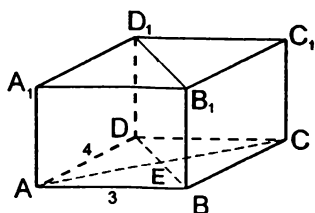
13.14. Так как $|\sin x| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$, то

$$\sin^5 x \leq \sin^2 x \quad \text{и} \quad \cos^{13} x \leq \cos^2 x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^5 x + \cos^{13} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Значит, наибольшее значение функции y не превышает 1. С другой стороны, ясно, что значение $y = 1$ достигается, например, при $x = 0$. $\square$

13.15. Угол между прямыми AC и B_1D_1 равен углу между прямыми AC и BD (см. рисунок). Таким образом, искомый острый угол равен углу AEB треугольника ABE , где E — точка пересечения AC и BD . Имеем:



$$AB = 3, \quad AE = EB = \frac{5}{2}.$$

По теореме косинусов получаем

$$\cos \angle AEB = \frac{AE^2 + BE^2 - AB^2}{2AE \cdot BE} = \frac{25/4 + 25/4 - 9}{2 \cdot 25/4} = \frac{7}{25},$$

откуда $\angle AEB = \arccos \frac{7}{25}$. $\square$

13.16. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} \geq -2 &\Leftrightarrow \frac{1 + 2 \cos x}{\cos x} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cos x \geq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cos x \leq 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$\square$

13.17. Пусть l_a, l_b, l_c — длины биссектрис данного треугольника, l'_a, l'_b, l'_c — длины отрезков, соединяющих вершины с точкой пересечения биссектрис. Имеем:

$$S = \frac{1}{3}(S + S + S) = \frac{1}{6}(ah_a + bh_b + ch_c).$$

Так как высота h_a есть кратчайшее расстояние от вершины A до стороны BC , то $h_a < l_a < 1$, аналогично $h_b < 1$ и $h_c < 1$. Далее, из неравенства треугольника вытекает, что

$$a < l'_b + l'_c < l_b + l_c < 2,$$

аналогично $b < 2$ и $c < 2$. Окончательно получаем

$$S < \frac{1}{6}(2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = 1. \quad \square$$

13.18. Заметим, что любое $a \leq 0$ удовлетворяет условию задачи. Действительно, при $a < 0$ второе неравенство не имеет решений, поэтому не существует значений x , удовлетворяющих одновременно обоим неравенствам. При $a = 0$ второе неравенство имеет единственное решение $x = 0$, не удовлетворяющее первому неравенству.

Пусть $a > 0$. Решим первое неравенство:

$$a^2 x^2 - 1 > 0 \iff x^2 > \frac{1}{a^2} \stackrel{\text{т.к. } a > 0}{\iff} x \in \left(-\infty, -\frac{1}{a}\right) \cup \left(\frac{1}{a}, +\infty\right).$$

Для второго неравенства имеем:

$$x^2 \leq a \iff x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}].$$

Отберем такие a , при которых указанные решения не пересекаются. Так как оба множества решений симметричны относительно 0, достаточно решить неравенство

$$\sqrt{a} \leq \frac{1}{a} \iff a^3 \leq 1 \iff a \in (0, 1].$$

Объединяя полученные промежутки, получаем $a \in (-\infty, 1]$. $\square$

14.1. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда $f(0) = b$ и $f'(x) = a$, откуда $a = 3$, $b = 5$ и $f(x) = 3x + 5$. Значит, $f(1) = 8$. $\square$

14.3. Одна курица за два дня снесет 2 яйца, значит, две курицы — 4 яйца. $\square$

14.4. Решение аналогично 11.12. $\square$

14.5. Неверно определение 2), так как ему, кроме параллелограммов, удовлетворяют еще и равнобокие трапеции. Легко видеть, что остальные определения верны. $\square$

14.6. Имеем:

$$\begin{aligned}\sqrt{(16 + \sqrt{257})^2} + \sqrt{(16 - \sqrt{257})^2} &= |16 + \sqrt{257}| + |16 - \sqrt{257}| = \\ &= 16 + \sqrt{257} + (\sqrt{257} - 16) = 2\sqrt{257},\end{aligned}$$

так как $\sqrt{257} > \sqrt{256} = 16$. $\square$

14.7. Пусть для квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ дискриминант равен

$$D = b^2 - 4ac = 2003.$$

Тогда b^2 дает остаток 3 при делении на 4, что невозможно. $\square$

14.8. Равносильными называются уравнения, множества решений которых совпадают. Ясно, что первое и третье уравнения решений не имеют (поскольку всегда $|\cos t| \leq 1$), а второе уравнение имеет решения. Следовательно, равносильны первое и третье уравнения, а второе не равносильно им. $\square$

14.9. Так как $5^2 + 12^2 = 13^2$, то данные треугольники являются прямоугольными. Радиус окружности, вписанной в первый треугольник, равен $r = \frac{1}{2}(5 + 12 - 13) = 2$. Следовательно, коэффициент подобия равен 2. Площадь первого треугольника равна $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$. Значит, площадь второго треугольника равна $2^2 \cdot 30 = 120$. $\square$

14.10. Имеем:

$$f(f(x)) = 1 - \frac{1}{f(x)} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = -\frac{1}{x-1}, \quad x \neq 0;$$

$$f(f(f(x))) = 1 - \frac{1}{f(f(x))} = 1 - \frac{1}{-\frac{1}{x-1}} = x, \quad x \neq 0, 1. \quad \square$$

14.11. Обозначим $a = 2^{3^{2001}}$, тогда имеем:

$$2^{3^{2002}} + 1 = 2^{3^{2001} \cdot 3} + 1 = a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1).$$

Очевидно, данное число можно разложить в произведение натуральных сомножителей, больших единицы. Следовательно, оно является составным. Верен ответ 2). Ясно, что все остальные ответы неверны. $\square$

14.13. Пусть α — величина угла между сторонами длины 3 и 4. Тогда $S = 6 \sin \alpha$. Для минимизации S надо минимизировать $\sin \alpha$, то есть максимизировать $\cos^2 \alpha$. Согласно теореме косинусов, имеем:

$$\cos \alpha = -\frac{1}{24}(a^2 + 10a).$$

Видно, что при $a \in [-3, 1]$ максимальное значение $\cos^2 \alpha$ достигается при $a = -3$. Итак, “экстремальный” треугольник имеет длины сторон 2, 3, 4. Пользуясь формулой Герона, вычисляем его площадь: $S = \frac{3\sqrt{15}}{4}$. $\square$

14.14. Покажем, что первое число минимально:

$$22^{22} > 2^{22} = (2^{11})^2 > (2^{10})^2 > 1000^2 > 222^2;$$

$$2^{222} > 2^{2^5} = 2^{32} > 2^{20} = 1024^2 > 222^2. \quad \square$$

14.15. Сумма коэффициентов многочлена равна значению этого многочлена при $x = 1$. Для его нахождения не нужно раскрывать скобки, имеем

$$(5 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 1)^{2003} = (-1)^{2003} = -1. \quad \square$$

14.16. Велосипедисты встретились через

$$\frac{150}{15 + 15} = 5 \text{ часов.}$$

Все это время муха была в движении, она пролетела

$$5 \cdot 20 = 100 \text{ километров.} \quad \square$$

14.17. Предположим, что данное число рационально. Тогда из соотношения

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

следует, что $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ является рациональным числом. Легко проверить, что это неверно. $\square$

14.18. Заметим, что число $4a + 2b + c$ есть значение трехчлена $ax^2 + bx + c$ при $x = 2$, а c — значение этого трехчлена при $x = 0$. Имеются три возможности.

1) Если $a > 0$, то $ax^2 + bx + c$ всегда положительно. В частности, $c > 0$.

2) Если $a < 0$, то $ax^2 + bx + c$ всегда отрицательно. Это противоречит условию.

3) Если $a = 0$, то уравнение линейно: $bx + c = 0$. По условию оно не имеет решений, значит, $b = 0$. Тогда $4a + 2b + c > 0$, следовательно, $c > 0$. $\square$

II. Тесты механико–математического факультета

1995 год

1. Мальчик пил чай с сахаром. Он положил три ложки на один стакан чая. Полностью растворив сахар, он отпил $2/3$ стакана чая, добавил одну ложку сахара и долил стакан до полного. Размешав сахар и отпив $1/3$ стакана, мальчик решил, что чай недостаточно сладкий. Сколько сахара нужно добавить, чтобы сделать чай таким же сладким, как вначале?

2. Решить неравенство

$$\left| \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} \right| \geq 2.$$

3. В арифметической прогрессии первый член и разность положительны, а сумма первых десяти членов равна разности квадратов шестого и пятого членов. Найти разность этой прогрессии.

4. Найти корни уравнения

$$\sin 2x + 1 + \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

лежащие в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$.

5. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, касающаяся отрезков AB , BC , CD и DA в точках K , L , M и N соответственно. Найти $\angle LMN$, если $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ и $\angle ABC = \frac{\pi}{5}$.

6. Найти пару (x, y) , удовлетворяющую уравнению

$$xy = 4(\sqrt{y} - 1),$$

для которой x принимает наибольшее значение.

7. В треугольнике ABC биссектриса BB_1 пересекает медиану AA_1 в точке O . Найти отношение λ площади треугольника BOA_1 к площади треугольника AOB_1 , если $AB : AC = 1 : 4$.

8. Найти наименьшее b , при котором существует a такое, что уравнение $\sqrt{2x - x^2} + |2x - a| = b$ имеет четыре решения.

1996 год

1. Решить уравнение

$$16 \sin^2 x + 3 \operatorname{tg}^2 x - 5 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{3 - |x|} \geq -\frac{2}{x}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{17-x^2}(x+3) \geq \log_{17-x^2}(x^2 - x - 2).$$

4. Решить при всех значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x^2 - a^2} + a\sqrt{x^2 + 1} = 0.$$

5. Прямая, проходящая через точку пересечения медиан треугольника ABC , пересекает стороны BA и BC в точках A_1 и C_1 соответственно. При этом $BA_1 < BA = 4$, $BC = 2$, $BA_1 \cdot BC_1 = 4$. Найти BA_1 .

6. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt[6]{x^3 - 6x^2 + 9x}}{\cos x - \sin x} \geq 0.$$

7. По шоссе в одну сторону с постоянными скоростями движутся мотоциклист и пешеход, а навстречу им с постоянной скоростью движется автомобиль. Когда мотоциклист и пешеход были в одной точке, до автомобиля было 48 км. Когда пешеход и автомобиль встретились, пешеход отстал от мотоциклиста на 16 км. На сколько километров отставал пешеход от мотоциклиста в момент встречи автомобиля и мотоциклиста?

8. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC , у которого $AB = 4$, $AC = 5$, $\angle BAC = 60^\circ$. Через точки E , F и G , лежащие на ребрах A_1B_1 , A_1C_1 и AB соответственно, проведено сечение, причем $A_1E = 2$, $A_1F = 3$ и $AG = 1$. Найти объем той части призмы, которая содержит ребро CC_1 , если $CC_1 = 6$.

1997 год

1. Решить уравнение

$$4 \cos 4x \cos^2 2x (\cos 2x - 1) + 12 (\cos^3 2x + \sin^2 2x - 1) - \cos^2 2x = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{4x - x^2 + 1} + x - 4}{\log_2 \left(\frac{9}{2} - x \right) + 1} \leq 0.$$

3. Около окружности описана трапеция площади 100. Хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции, параллельна ее основаниям и имеет длину 5. Найти радиус окружности.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 3} \cdot \arctg(2x + 1) + \sqrt{x^2 - 4x + 6} \cdot \arctg(2 - x) = 0.$$

5. В треугольнике ABC биссектриса AK и медиана CM перпендикулярны. Найти AC , если $AK = 8$, $CM = 6$.

6. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$|x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 3x - 10| = |x^2 - 3x| + a$$

имеет ровно 6 различных решений.

7. Из строительных блоков двух типов можно собрать три типа домов. Для сборки 10-квартирного дома надо 18 блоков первого типа и 30 — второго. Для сборки 15-квартирного дома надо 30 блоков первого типа и 42 — второго. Для сборки 18-квартирного дома надо 40 блоков первого типа и 60 — второго. Всего есть 205 блоков первого типа и 301 второго. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир было наибольшим?

8. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \sin^2 \pi x + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x} + \sqrt{x+1} - 1$$

на промежутке $0 < x < +\infty$ и указать, при каких x оно достигается.

9. При каких значениях параметров a и b найдутся два различных корня уравнения

$$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x + a = 0,$$

которые также будут корнями уравнения

$$x^3 + 3x^2 + 2x + b = 0?$$

10. В пирамиде $SABC$ периметр грани ASB равен 20, периметр грани ACB равен 12, отношение площади треугольника ASB к площади треугольника ACB равно $\sqrt{5}$ и $AS = SB$. Известно, что перпендикуляры к граням, восстановленные из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке. Найти все ребра пирамиды.

1998 год

1. Курица съедает 1 кг зерна за 9 дней, утка — за 6, а гусь — за 2. На сколько дней хватит 175 кг зерна 4 курицам, 5 уткам и 3 гусям?

2. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = 74^\circ$, $\angle D = 120^\circ$. Найти угол между биссектрисами углов B и C .

3. Пусть $a = \log_9 6$. Найти $\log_{3\sqrt{2}} \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}}$.

4. Первый, второй и третий члены геометрической прогрессии равны соответственно третьему, шестому и восьмому членам некоторой арифметической прогрессии, а их произведение равно 125. Найти первый член геометрической прогрессии.

5. Решить неравенство

$$2^{\cos 2x} + 10 > 6 \cdot 2^{1 - \sin^2 x}.$$

6. В треугольнике ABC площадью 12 на стороне BC взята точка N так, что $NC : BC = 3 : 4$. Медиана AM пересекает медиану BL в точке D , а прямую LN — в точке E . Найти площадь четырехугольника $BDEN$.

7. При каких значениях a функция

$$y(x) = \log_{2a+1}(\sqrt{a^2 + 4x^2} - 2x) - 2$$

является нечетной?

8. Сколько решений имеет система

$$\begin{cases} x = \sin \pi y, \\ y = -\cos \pi x, \\ x < \frac{1}{2} ? \end{cases}$$

9. Найти объем фигуры, заданной в координатном пространстве неравенством

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x^2 + y^2 + z^2 - x - y) \leq 0.$$

1999 год

1. Решить неравенство

$$\sqrt{5} \cdot 5^{\frac{7-2x}{2}} + 5^{x-2} > 10.$$

2. Длину кирпича увеличили на 70%, а ширину и высоту уменьшили на 50% и 20% соответственно. Увеличился или уменьшился от этого объем кирпича и на сколько процентов?

3. Решить неравенство

$$\sqrt{10x^2 - 70x + 120} \leq 3x - 9.$$

4. Вычислить $\arccos(\sin(-3))$.

5. Решить неравенство

$$\log_{\frac{5x}{14}} \left(x^2 - \frac{1}{14} \right) \geq 1.$$

6. В трапеции с основаниями 3 и 4 найти длину отрезка, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции в отношении 5 : 2, считая от меньшего основания.

7. Сколько корней имеет уравнение $||x + 6| - 9| - 4| = 4$?

8. В треугольнике ABC провели высоты AL и BM , причем точки L и M оказались лежащими на сторонах BC и AC соответственно. Затем провели прямую LM до пересечения с продолжением стороны AB . Какое наибольшее количество пар подобных треугольников можно насчитать на этом чертеже, если на нем не образовалось ни одной пары равных треугольников?

9. Найти многочлен вида $x^k + ax^{k-1} + \dots + bx + c$, где $a, \dots, b, c \in \mathbb{Z}$ и $k < 7$, одним из корней которого является число $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$.

10. Площади проекций некоторого треугольника на координатные плоскости Oxy и Oyz равны соответственно $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$, а площадь проекции на плоскость Oxz — целое число. Найти площадь самого треугольника, если известно, что она тоже является целым числом.

2001 год*

1. Толя полил удобрением помидоры на участке из расчета 2 лейки на 5 кустов, а надо было — 3 лейки на 7 кустов. Из какого расчета ему нужно дополнительно полить кусты, чтобы исправить ошибку?

2. Найти все числа, кратные числу 72 и имеющие десятичную запись вида $\overline{7X531Y}$, где X, Y — цифры.

3. Пройдя $\frac{4}{9}$ длины моста, пешеход заметил, что его догоняет машина, повернул назад и встретился с ней у начала моста. Если бы он продолжал идти вперед, то машина догнала бы его у конца моста. Найти отношение скорости машины к скорости пешехода.

4. Из образцов трех сплавов олова, цинка и меди получили новый сплав, в котором количества указанных веществ, расположенные в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию. Первый образец массой 5 г состоял из олова и меди, второй — из 16 г меди и 7 г цинка, а третий — из 8 г цинка и 21 г олова. Сколько граммов олова было в первом образце?

5. Найти все решения уравнения

$$|\sin 2x + \cos x| = ||\sin 2x| - |\cos x||,$$

расположенные на интервале $(-2\pi, 2\pi)$.

6. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на его гипотенузу, делит биссектрису острого угла в отношении 4 : 5, считая от вершины. Найти величину этого угла.

7. Какое точное время между 3 и 4 часами ночи показывают часы в момент, когда положения их часовой и минутной стрелок совпадают?

*В 2000 г. тест не проводился.

8. Даны три точки, расстояния между которыми равны 5, 6 и 8. Сколько существует разных треугольников, для которых каждая из этих точек — либо вершина, либо середина стороны?

9. Вычислить $\log_{\sqrt{x}}(x^7 + x^2 - 1)^3$, где x — положительный корень уравнения $x^{16} + x^9 + x^2 = 1$.

10. Сфера касается всех ребер пирамиды $SABC$, причем боковых ребер SA , SB и SC — в точках A_1 , B_1 и C_1 . Найти объем пирамиды $SA_1B_1C_1$, если $SA = AB = AC = 6$ и $BC = 2$.

2002 год

1. Начав с 21, Володя выписывает последовательно действительные числа так, что каждое следующее число на 4 меньше предыдущего. Игорь, увидев очередное число, подсчитывает сумму всех выписанных к этому моменту чисел. Какая из найденных Игорем сумм ближе всего к 62 ?

2. Найти $2^{3x-1} + 2^{-3x-1}$, если $2^x + 2^{-x} = 3$.

3. Отрезок KL , концы K и L которого лежат соответственно на основаниях AD и BC трапеции $ABCD$, делит трапецию на части, отношение площадей которых равно 3 : 2. Найти LB , если $KA = 3$, $KD = 5$ и $BC = 1$.

4. Спортивная делегация состояла из спортсменов и чиновников. Средний возраст спортсменов составил 21 год, а чиновников — 46 лет. При этом средний возраст всех членов делегации оказался равным 37 годам. Выразить в процентах долю чиновников в делегации.

5. Решить уравнение

$$\log_2(|x - 4| - |x - 1|) \cdot \log_9(|x + 5| - |x + 3|) = \frac{1}{2}.$$

6. Прямая касается окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC , в точке B и пересекает продолжение гипотенузы AC за вершину C в точке, удаленной от C на расстояние 6. В каком отношении высота прямого угла делит гипотенузу, если $AC = 8$?

7. На сколько частей делят прямоугольник, заданный на координатной плоскости неравенствами $0 \leq x \leq 2\pi$ и $-2 \leq y \leq 2$, графики функций $y = \sin 7x$ и $y = \sin 3x$?

8. Найти максимально возможный объем треугольной пирамиды при условии, что две ее грани — равные треугольники со сторонами 5, 6 и 7.

9. Команда из пяти лыжников разного класса получила от спонсоров 17 пар лыж. Сколькими способами можно распределить лыжи между лыжниками, руководствуясь следующим правилом: в каждой произвольно взятой паре лыжников более сильный лыжник должен получить не меньше более слабого, и при этом самый слабый должен получить по крайней мере две пары?

10. Среди значений параметра $\varphi \in [0, 2\pi]$ указать те, для которых наибольшее значение функции

$$y = \cos x - \frac{3}{2} \cos \varphi + \cos(x + \varphi)$$

будет максимальным.

**Ответы к тестам
механико–математического факультета
1995 год**

1. $2/3$ ложки.
2. $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1] \cup [5, +\infty)$.
3. $d = 5$.
4. $x = \frac{3\pi}{4}$.
5. $\angle LMN = \frac{11\pi}{15}$.
6. $x = 1, y = 4$.
7. $6 < \lambda < 15$.
8. $b = 2$.

1996 год

1. $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
2. $x \in (-3, -2] \cup (0, 3) \cup [6, +\infty)$.
3. $x \in [1 - \sqrt{6}, -1) \cup (2, 1 + \sqrt{6}] \cup (4, \sqrt{17})$.
4. Если $-1 < a < 0$, то $x = \pm \sqrt{\frac{1+a^2}{1-a^2}}$; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \leq -1$ или $a > 0$, то нет решений.
5. $BA_1 = 2$.
6. $x \in [0, \frac{\pi}{4}) \cup \{3\} \cup (-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n), n \in \mathbb{N}$.
7. На 12 километров.
8. $V = \frac{99\sqrt{3}}{4}$.

1997 год

1. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.
2. $x \in [2 - \sqrt{5}, \frac{6-\sqrt{6}}{2}] \cup (4, 2 + \sqrt{5}]$.
3. $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$.
4. $x = -3$.
5. $AC = 3\sqrt{5}$.
6. $a \in \{10\} \cup (\frac{41}{4}, 12)$.
7. 3 дома на 10 квартир и 5 домов на 15 квартир.
8. $f_{\min} = 2$ при $x = 3$.
9. $a = 0, b = 0$.
10. $AB = BC = AC = 4, AS = BS = CS = 8$.

1998 год

1. На 63 дня.
2. 83° , верным считался и ответ 97° .
3. $\frac{5-8a}{3+6a}$.
4. $b_1 = \frac{15}{2}$ или $b_1 = 5$.
5. $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
6. $\frac{5}{4}$.
7. $a = -\frac{1}{4}$.
8. Три решения.
9. $V = \frac{5\pi\sqrt{2}}{6}$.

1999 год

1. $x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.
2. Уменьшился на 32%.
3. $x \in \{3\} \cup [4, 13]$.
4. $\frac{3\pi}{2} - 3$.
5. $x \in (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{1}{2}] \cup (\frac{14}{5}, +\infty)$.
6. $\sqrt{14}$.
7. 6 корней.
8. 10 пар.
9. $x^6 - 15x^4 - 4x^3 + 75x^2 - 60x - 121$.
10. 7.

2001 год

1. 1 лейка на 35 кустов.
2. 705312 и 795312.
3. 9.
4. 2 грамма.
5. $x \in \{-\frac{3\pi}{2}\} \cup [-\pi, 0] \cup \{\frac{\pi}{2}\} \cup [\pi, 2\pi)$.
6. $\arccos \frac{4}{9}$.
7. $3\frac{3}{11}$ часа или 3 часа $16\frac{4}{11}$ минут.
8. 11 треугольников.
9. 138.
10. $V_{SA_1B_1C_1} = \frac{\sqrt{26}}{36}$.

2002 год

1. Седьмая сумма, равная 63.
2. 9.
3. $LB = \frac{3}{5}$.
4. 64%.
5. $x \in [-3, 1]$.
6. $\frac{7}{3}$.
7. На 14 частей.
8. $V_{max} = \frac{144}{5}$.
9. 13 способами.
10. $\varphi = 2 \arccos(\pm \frac{1}{3})$.

Решения тестов механико—математического факультета

1995 год

1. После того, как мальчик отпил $2/3$ стакана чая, у него осталось $1/3$ стакана, в котором растворена одна ложка сахара. Добавив одну ложку и наполнив стакан, он получил растворенные в этом стакане две ложки сахара. Чтобы сделать чай таким же сладким, как и вначале, необходимо добавить в этот стакан еще одну ложку. Но так как мальчик отпил $1/3$ стакана, т.е. у него осталось $2/3$ стакана, то ему необходимо добавить $2/3$ ложки сахара. $\square$

2. Проведем следующие эквивалентные преобразования:

$$\left| \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} \right| \geq 2 \iff \left| \frac{(x + 2)(x - 3)}{x + 2} \right| \geq 2 \iff$$

$$\iff \begin{cases} |x - 3| \geq 2 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} x - 3 \geq 2 \\ x - 3 \leq -2 \end{cases} \\ x \neq -2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 1 \end{cases} \\ x \neq -2 \end{cases} \iff x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1] \cup [5, +\infty). \quad \square$$

3. Пусть a_1 и d — первый член и разность данной прогрессии соответственно. Согласно условию задачи имеем:

$$\frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (a_1 + 5d)^2 - (a_1 + 4d)^2 \iff$$

$$\iff (2a_1 + 9d) \cdot 5 = (2a_1 + 9d) \cdot d \iff d = 5,$$

поскольку a_1 и d положительны и, значит, $2a_1 + 9d \neq 0$. $\square$

4. Пусть $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = t$, тогда

$$t^2 = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \cos(2x + \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{1 + \sin 2x}{2},$$

откуда $\sin 2x = 2t^2 - 1$. Имеем:

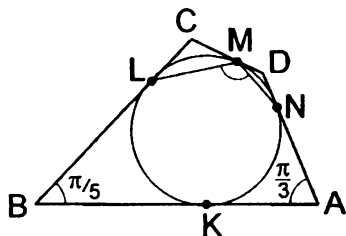
$$2t^2 + \sqrt{2}t = 0 \iff t = 0 \text{ или } t = -\sqrt{2}.$$

При $t = -\sqrt{2}$ уравнение не имеет решений, при $t = 0$ имеем

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff x + \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \iff x = -\frac{\pi}{4} + \pi k.$$

Интервалу $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ из этой серии принадлежит только $x = \frac{3\pi}{4}$. $\square$

5. Так как угол между касательными, проведенными к окружности из одной точки, равен полуразности дуг, определяемых на окружности точками касания, имеем (см. рисунок):



$$\angle BAD = \frac{\pi}{3} = \frac{\overset{\frown}{KMN} - \overset{\frown}{KN}}{2} = \pi - \overset{\frown}{KN}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{KN} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\angle ABC = \frac{\pi}{5} = \frac{\overset{\frown}{KML} - \overset{\frown}{KL}}{2} = \pi - \overset{\frown}{KL} \Rightarrow \overset{\frown}{KL} = \frac{4\pi}{5}.$$

Далее, так как угол LMN является вписанным в данную окружность, получим

$$\angle LMN = \frac{1}{2} \overset{\frown}{LN} = \frac{\overset{\frown}{KN} + \overset{\frown}{KL}}{2} = \frac{11\pi}{15}.$$

$\square$

6. Данное уравнение является квадратным относительно $\sqrt{y}$:

$$x(\sqrt{y})^2 - 4\sqrt{y} + 4 = 0.$$

Если $x = 0$, то $y = 1$. Если $x \neq 0$, то квадратное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант больше либо равен нулю:

$$D \geq 0 \iff 4 - 4x \geq 0 \iff x \leq 1.$$

Наибольшее значение, которое может при этом принять x , это $x = 1$, которому соответствует $y = 4$. $\square$

7. Пусть $AB = 1$, $AC = 4$, $BC = a$ ($3 < a < 5$ согласно неравенству треугольника). Имеем (см. рисунок):

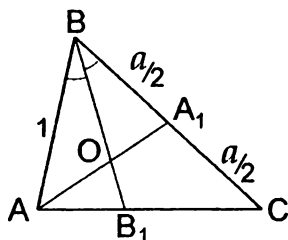
$$\frac{S_{\triangle BOA_1}}{S_{\triangle AOB_1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BO \cdot OA_1 \cdot \sin \angle BOA_1}{\frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB_1 \cdot \sin \angle AOB_1} = \frac{BO \cdot OA_1}{AO \cdot OB_1}.$$

Согласно теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника ($\triangle ABA_1$) имеем

$$\frac{OA_1}{AO} = \frac{BA_1}{AB} = \frac{a}{2}.$$

Найдем BO/OB_1 . Применим теорему Менелая к треугольнику B_1BC и секущей OA_1 :

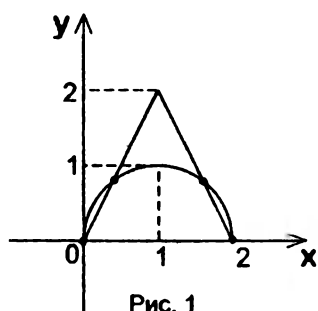
$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC} = 1 \iff \frac{BO}{OB_1} \cdot \frac{1}{1+a} = 1 \iff \frac{BO}{OB_1} = 1+a.$$



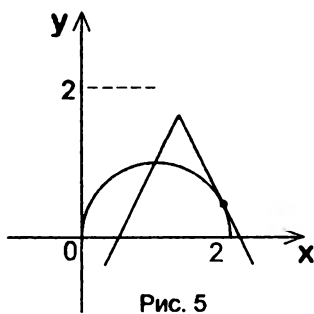
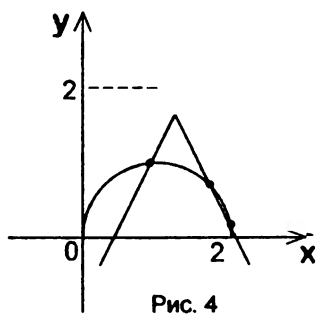
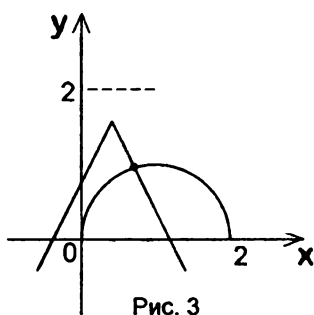
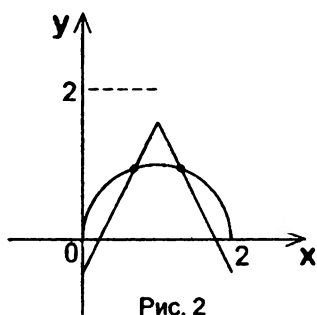
Здесь мы снова применили теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника, но уже к треугольнику ABC . Далее,

$$\lambda = \frac{S_{\triangle BOA_1}}{S_{\triangle AOB_1}} = \frac{a^2 + a}{2},$$

эта величина изменяется в интервале $(6, 15)$ при $a \in (3, 5)$. $\square$



8. Построим на координатной плоскости графики функций $y = \sqrt{2x - x^2}$ и $y = b - |2x - a|$. Проверкой убеждаемся, что при $b = 2$ и $a = 2$ уравнение имеет ровно четыре решения (рис.1). Ясно также, что при $b < 2$ четырех решений уже быть не может ни при каком a (рис. 2, 3, 4, 5).



□

1996 год

1. Заметим, что $\cos x \neq 0$, и проведем эквивалентные преобразования:

$$16 \sin^2 x + 3 \operatorname{tg}^2 x - 5 = 0 \iff 16 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x - 5 \cos^2 x = 0$$

$$\iff 4 \sin^2 2x + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - 5 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0 \iff$$

$$4 \sin^2 2x - 4 \cos 2x - 1 = 0 \iff 4 \cos^2 2x + 4 \cos 2x - 3 = 0 \iff$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \iff 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \iff x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

2. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{1}{3-x} \geq -\frac{2}{x} \\ x < 0 \\ \frac{1}{3+x} \geq -\frac{2}{x} \end{cases} \right] \iff \left[\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{6-x}{(3-x)x} \geq 0 \\ x < 0 \\ \frac{6+3x}{(3+x)x} \geq 0 \end{cases} \right] \iff$$

$$\left[\begin{cases} x > 0 \\ x \in (0, 3) \cup [6, +\infty) \\ x < 0 \\ x \in (-3, -2] \cup (0, +\infty) \end{cases} \right] \iff \left[\begin{cases} x \in (0, 3) \cup [6, +\infty) \\ x \in (-3, -2] \end{cases} \right] \iff$$

$$\iff x \in (-3, -2] \cup (0, 3) \cup [6, +\infty).$$

□

3. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{cases} 17 - x^2 > 1 \\ x + 3 \geq x^2 - x - 2 \\ x^2 - x - 2 > 0 \\ 0 < 17 - x^2 < 1 \\ x + 3 \leq x^2 - x - 2 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \right] \iff \left[\begin{cases} x^2 < 16 \\ x^2 - 2x - 5 \leq 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \\ 16 < x^2 < 17 \\ x^2 - 2x - 5 \geq 0 \\ x > -3 \end{cases} \right] \iff$$

$$\iff x \in [1 - \sqrt{6}, -1) \cup (2, 1 + \sqrt{6}] \cup (4, \sqrt{17}). \quad \square$$

4. При $a = 0$ очевидно, что $x = 0$ — единственное решение. При $a > 0$ решений нет, так как одно слагаемое в левой части уравнения положительно, а другое — неотрицательно. При $a < 0$ данное уравнение равносильно уравнению

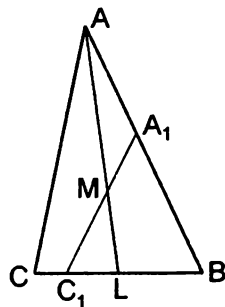
$$x^2 - a^2 = a^2(x^2 + 1) \iff x^2(1 - a^2) = 1 + a^2.$$

Если $a \leq -1$, то это уравнение решений не имеет, если $a > -1$, то уравнение имеет два решения $x = \pm \sqrt{\frac{1+a^2}{1-a^2}}$. $\square$

5. Пусть AL — медиана треугольника ABC , а M — точка пересечения медиан этого треугольника (см. рисунок). Применив теорему Менелая к треугольнику BAL и секущей A_1C_1 , получим:

$$\frac{BA_1}{A_1A} \cdot \frac{AM}{ML} \cdot \frac{LC_1}{C_1B} = 1 \iff$$

$$\iff \frac{BA_1}{4 - BA_1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{BC_1 - 1}{BC_1} = 1.$$



Учитывая условие $BA_1 \cdot BC_1 = 4$, находим $BA_1 = 2$. $\square$

6. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \\ \cos x - \sin x \neq 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x > 0 \\ \cos x - \sin x > 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \\ x > 0 \\ x \neq 3 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0. \end{array} \right.$$

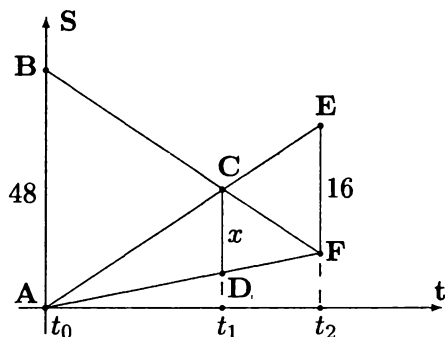
Далее,

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0 &\iff -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z} \\ &\iff -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n. \end{aligned}$$

Окончательно с учетом остальных условий получаем, что

$$x \in [0, \frac{\pi}{4}) \cup \{3\} \cup (-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

7. Пусть t_0 — момент времени, когда пешеход и мотоциклист находились в одной точке, t_1 — момент встречи мотоциклиста и автомобиля, а t_2 — момент встречи пешехода и автомобиля (см. рисунок).



Пусть в момент времени t_1 расстояние между пешеходом и мотоциклистом было равно x км (длина отрезка CD). Согласно

условию задачи, в момент времени t_0 расстояние между мотоциклистом и автомобилем было равно 48 км (длина отрезка AB), а в момент времени t_2 — 16 км (длина отрезка EF). Из подобия треугольников ABC и EFC имеем:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{CE} = 3 \iff AC = 3CE \iff AC = \frac{3}{4}AE.$$

Из подобия треугольников ACD и AEF имеем:

$$\frac{CD}{EF} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{4} \iff \frac{x}{16} = \frac{3}{4} \iff x = 12. \quad \square$$

8. Продолжим прямые EG и A_1A до пересечения в точке, которую обозначим через S (см. рисунок). Прямая SF пересечет ребро AC в точке H , тогда $EFHG$ — искомое сечение призмы. Будем искать объем той части призмы, которая не содержит ребро CC_1 , как разность объемов треугольных пирамид SA_1EF и $SAGH$.

Из подобия треугольников SA_1E и SAG можно получить соотношение

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1E}{AG} = 2,$$

которое вместе с условием $AA_1 = 6$ дает $SA_1 = 12$ и $SA = 6$. Далее, площадь треугольника A_1EF равна

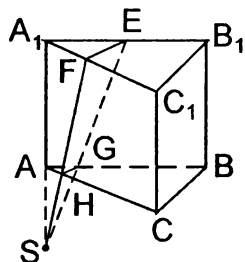
$$S_{\triangle A_1EF} = \frac{1}{2} \cdot A_1E \cdot A_1F \cdot \sin \angle EA_1F = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Аналогично, площадь треугольника AGH составляет

$$S_{\triangle AGH} = \frac{1}{2} \cdot AG \cdot AH \cdot \sin \angle GAH = \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

так как $AH = \frac{1}{2}A_1F = \frac{3}{2}$. Далее, объем пирамиды SA_1EF равен

$$V_{SA_1EF} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1EF} \cdot SA_1 = 6\sqrt{3},$$



а объем пирамиды $SAGH$ равен

$$V_{SAGH} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle AGH} \cdot SA = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

следовательно, объем той части призмы, которая не содержит ребро CC_1 , равен $\frac{21\sqrt{3}}{4}$. Так как объем всей призмы равен

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \cdot AA_1 = 30\sqrt{3},$$

то объем той части призмы, которая содержит ребро CC_1 , равен $\frac{99\sqrt{3}}{4}$. $\square$

1997 год

1. Проведем эквивалентные преобразования:

$$\begin{aligned} 4 \cos 4x \cos^2 2x (\cos 2x - 1) + 12(\cos^3 2x + \sin^2 2x - 1) - \cos^2 2x &= 0 \\ \iff 4 \cos 4x \cos^2 2x (\cos 2x - 1) + 12(\cos^3 2x - \cos^2 2x) - \cos^2 2x &= 0 \\ \iff \cos^2 2x (4 \cos 4x (\cos 2x - 1) + 12 \cos 2x - 13) &= 0 \iff \\ \iff \cos^2 2x (4(2 \cos^2 2x - 1)(\cos 2x - 1) + 12 \cos 2x - 13) &= 0 \iff \\ \iff \cos^2 2x (8 \cos^3 2x - 8 \cos^2 2x + 8 \cos 2x - 9) &= 0 \iff \\ \iff \cos 2x = 0 \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

так как

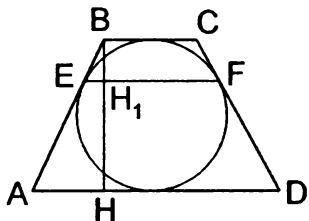
$$\begin{aligned} 8 \cos^3 2x - 8 \cos^2 2x + 8 \cos 2x - 9 &= \\ = 8 \cos^2 2x (\cos 2x - 1) + 8(\cos 2x - 1) - 1 &\leq -1 \quad \text{при всех } x. \quad \square \end{aligned}$$

2. Исходное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{cases} \sqrt{4x - x^2 + 1} + x - 4 \leq 0 \\ \log_2 \left(\frac{9}{2} - x \right) + 1 > 0 \end{cases} \right] \iff \left[\begin{cases} \sqrt{4x - x^2 + 1} \leq 4 - x \\ x < 4 \end{cases} \right] \iff \left[\begin{cases} \sqrt{4x - x^2 + 1} + x - 4 \geq 0 \\ \log_2 \left(\frac{9}{2} - x \right) + 1 < 0 \end{cases} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{cases} 4x - x^2 + 1 \leq (4 - x)^2 \\ 4x - x^2 + 1 \geq 0 \\ x < 4 \end{cases} \right] \iff \left[\begin{cases} 2x^2 - 12x + 15 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 1 \leq 0 \\ x < 4 \end{cases} \right] \iff \\
 & \left[\begin{cases} 4x - x^2 + 1 \geq 0 \\ 4 < x < \frac{9}{2} \end{cases} \right] \iff \left[\begin{cases} x^2 - 4x - 1 \leq 0 \\ 4 < x < \frac{9}{2} \end{cases} \right] \\
 & \iff x \in \left[2 - \sqrt{5}, \frac{6 - \sqrt{6}}{2} \right] \cup (4, 2 + \sqrt{5}). \quad \square
 \end{aligned}$$

3. Так как $\angle BEF = \angle CFE$ (и равен половине дуги EF), то трапеция $EBCF$, а, значит, и трапеция $ABCD$ — равнобокая. Обозначим через $AD = a$ и $BC = b$ основания трапеции, а через $BH = h$ ее высоту. У описанного около окружности четырехугольника суммы противоположных сторон равны, поэтому $AB = CD = \frac{a+b}{2}$. Применяя к прямоугольному треугольнику ABH теорему Пифагора, находим



$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 = ab.$$

С другой стороны, $EF = b + 2EH_1 = b + 2BE \cos \angle BEH_1$, где H_1 — точка пересечения EF и BH . Так как $BE = CF = \frac{b}{2}$, имеем:

$$\begin{aligned}
 5 &= b + 2 \cdot \frac{b}{2} \cos \angle BEH_1 = b(1 + \cos \angle BAH) = \\
 &= b \left(1 + \frac{AH}{AB} \right) = b \left(1 + \frac{a-b}{a+b} \right) = \frac{2ab}{a+b}.
 \end{aligned}$$

Так как для площади трапеции справедлива формула $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, получаем уравнение $(a+b)h = 200$. Имеем систему:

$$\begin{cases} h^2 = ab \\ 2ab = 5(a+b) \\ (a+b)h = 200 \end{cases} \implies h^2 = ab = \frac{5}{2}(a+b) = \frac{5}{2} \cdot \frac{200}{h} \iff$$

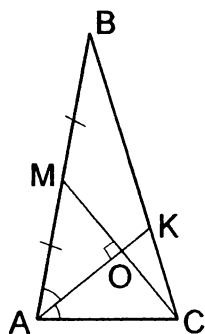
$$\Leftrightarrow h = \sqrt[3]{500} \Leftrightarrow r = \frac{h}{2} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}}. \quad \square$$

4. Перепишем данное уравнение следующим образом:

$$\sqrt{(2x+1)^2 + 2} \cdot \operatorname{arctg}(2x+1) = \sqrt{(x-2)^2 + 2} \cdot \operatorname{arctg}(x-2).$$

Так как функция $y(t) = \sqrt{t^2 + 2} \cdot \operatorname{arctg} t$ является возрастающей на всей области определения (на $\mathbb{R}$), то каждое свое значение она принимает ровно в одной точке. Следовательно, решения данного уравнения будут совпадать с решениями уравнения

$$2x+1 = x-2 \Leftrightarrow x = -3. \quad \square$$



5. Пусть O — точка пересечения прямых AK и CM . Так как в треугольнике $САМ$ биссектриса $АО$ является высотой, то этот треугольник равнобедренный. Введем следующие обозначения: пусть $AC = AM = MB = x$, $CK = y$, $KB = 2y$. Последнее соотношение выполняется в силу теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника. Далее, согласно формуле для вычисления длины медианы ($CM = \frac{1}{2}\sqrt{2AC^2 + 2BC^2 - AB^2}$)

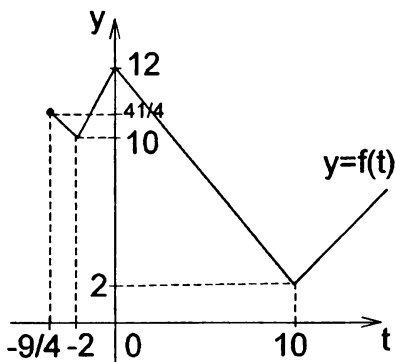
и формуле для вычисления длины биссектрисы ($AK = \sqrt{AC \cdot AB - CK \cdot KB}$) имеем систему:

$$\begin{cases} 6 = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 2(3y)^2 - (2x)^2} \\ 8 = \sqrt{2x^2 - 2y^2} \end{cases} \Rightarrow x = 3\sqrt{5}. \quad \square$$

6. Пусть $t = x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$, тогда $t \geq -\frac{9}{4}$. Построим на этом промежутке график функции

$$f(t) = |t+2| + |t-10| - |t| \quad (\text{см. рисунок}).$$

Из графика видно, что прямая $y = a$ пересекает этот график ровно в трех точках, если $a = 10$ или $a \in \left[\frac{41}{4}, 12\right)$. Во всех случаях, кроме $a = \frac{41}{4}$, каждому значению переменной t будет соответствовать ровно два значения x , причем все шесть значений переменной x будут различны. $\square$



7. Пусть x , y и z — количество домов на 10, 15 и 18 квартир соответственно. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: найти максимальное значение выражения $t = 10x + 15y + 18z$ при условиях

$$\begin{cases} 18x + 30y + 40z \leq 205 \\ 30x + 42y + 60z \leq 301. \end{cases} \quad (*)$$

Покажем, что t принимает максимальное значение при $z = 0$. Действительно, пусть t максимально при некоторых x_0, y_0, z_0 , удовлетворяющих условиям (*), причем $z_0 > 0$. Рассмотрим тогда значения $x_0 + 2, y_0, z_0 - 1$. Легко видеть, что неравенства (*) выполняются, а значение t увеличилось. Это противоречит максимальнойности t . Итак, $z = 0$ и требуется найти максимальное значение выражения $t = 10x + 15y$ при условиях

$$\begin{cases} 18x + 30y \leq 205 \\ 30x + 42y \leq 301 \end{cases} \implies \begin{cases} 18x + 30y \leq 204 \\ 30x + 42y \leq 300 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x + 5y \leq 34 \\ 5x + 7y \leq 50 \end{cases} \implies 8x + 12y \leq 84 \implies t = 10x + 15y \leq 105.$$

Итак, $t \leq 105$. Покажем, что это значение достигается. Для этого необходимо и достаточно найти натуральные x, y , удовлетворяю-

щие системе уравнений

$$\begin{cases} 3x + 5y = 34 \\ 5x + 7y = 50 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 5. \end{cases} \quad \square$$

8. Пусть для $x > 0$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x} + \sqrt{x+1} - 1 = \frac{\sqrt{x+1} + 1}{x} + \sqrt{x+1} - 1 = \\ &= \frac{\sqrt{x+1} + 1}{(\sqrt{x+1})^2 - 1} + \sqrt{x+1} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} + (\sqrt{x+1} - 1). \end{aligned}$$

Ясно, что $g_{\min} = 2$ при $x = 3$. Так как $f(x) \geq g(x)$ при всех x и $f(3) = g(3)$, то и $f_{\min} = 2$ при $x = 3$. $\square$

9. Пусть $x = 0$ является решением второго уравнения. Это возможно, если $b = 0$; другими решениями этого уравнения являются $x = -1$ и $x = -2$. Проверкой убеждаемся, что при $a = 0$ числа $x = 0$ и $x = -2$ также являются корнями первого уравнения. Пусть теперь $x = 0$ является решением первого уравнения. Тогда $a = 0$, и уравнение имеет еще только одно решение $x = -2$. Числа $x = 0$ и $x = -2$ являются корнями второго уравнения, только если $b = 0$. Если же $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $x = 0$ не является решением ни первого, ни второго уравнения, поэтому можно провести следующие равносильные преобразования:

$$\begin{cases} x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x + a = 0 \\ x^3 + 3x^2 + 2x + b = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x + a = 0 \\ x^4 + 3x^3 + 2x^2 + bx = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 + (6-b)x + a = 0 \\ x^3 + 3x^2 + 2x + b = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 3x^3 + (6-b)x^2 + ax = 0 \\ 3x^3 + 9x^2 + 6x + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (3+b)x^2 + (6-a)x + 3b = 0 \\ 3x^2 + (6-b)x + a = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3(3+b)x^2 + 3(6-a)x + 9b = 0 \\ 3(3+b)x^2 + (6-b)(3+b)x + a(3+b) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3(6-a) - (6-b)(3+b))x + 9b - a(3+b) = 0 \\ 3x^2 + (6-b)x + a = 0 \end{cases}$$

при $b \neq -3$. При $b = -3$ имеем:

$$\begin{cases} (3+b)x^2 + (6-a)x + 3b = 0 \\ 3x^2 + (6-b)x + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6-a)x - 9 = 0 \\ 3x^2 + 9x + a = 0. \end{cases}$$

Ясно, что полученная система не может иметь два различных решения ни при каком a . Далее, согласно условию задачи, система

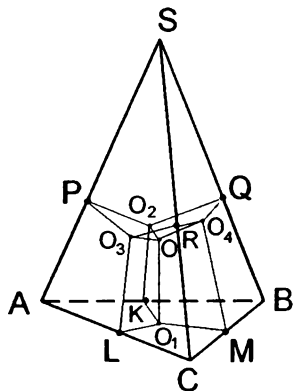
$$\begin{cases} (3(6-a) - (6-b)(3+b))x + 9b - a(3+b) = 0 \\ 3x^2 + (6-b)x + a = 0 \end{cases}$$

должна иметь два различных решения. Но первое уравнение этой системы является линейным, а всякое линейное уравнение вида $Ax + B = 0$ имеет два различных решения тогда и только тогда, когда $A = 0$ и $B = 0$. Имеем:

$$\begin{cases} 3(6-a) - (6-b)(3+b) = 0 \\ 9b - a(3+b) = 0. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются пары $(0, 0)$, $(6, 6)$, $(18, -6)$. Пара $(0, 0)$ является ответом к задаче, а пары $(6, 6)$ и $(18, -6)$ — нет, так как при этих значениях (a, b) уравнение $3x^2 + (6-b)x + a = 0$ не имеет решений. $\square$

10. Обозначим через O_1 , O_2 , O_3 и O_4 центры вписанных окружностей в треугольники ABC , ABS , ACS и BCS соответственно. Пусть также O — точка пересечения перпендикуляров к граням пирамиды, восстановленных в точках O_1 , O_2 , O_3 и O_4 (см. рисунок). Рассмотрим плоскость OO_1O_2 . Она перпендикулярна граням ABC и ABS , следовательно перпендикулярна ребру AB как линии пересечения этих граней. Следовательно, радиусы



вписанных в треугольники ABC и ABS окружностей, проведенных к стороне AB , попадут в одну точку, которую мы обозначим через K . Аналогично, рассматривая плоскости OO_1O_3 , OO_1O_4 , OO_2O_3 , OO_2O_4 и OO_3O_4 , на остальных ребрах пирамиды получим следующие точки: $L \in AC$, $M \in BC$, $P \in AS$, $Q \in BS$ и $R \in CS$. Таким образом, K, L, M, P, Q, R — точки касания вписанных в грани пирамиды окружностей и ребер пирамиды. Из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, имеем:

$$AK = AP = AL = x, \quad BK = BM = BQ = y,$$

$$CL = CM = CR = z, \quad SP = SQ = SR = t.$$

Так как $AS = BS$, то $x = y$. Поскольку периметр треугольника ASB равен 20, то $t = 10 - 2x$. Так как периметр треугольника ACB равен 12, то $z = 6 - 2x$. Далее, в силу равнобедренности треугольников ASB и ACB получаем

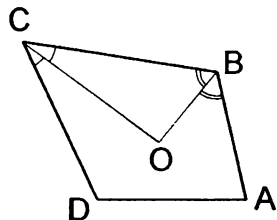
$$\frac{S_{\triangle ASB}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{SK}{CK} = \frac{\sqrt{(10-x)^2 - x^2}}{\sqrt{(6-x)^2 - x^2}} = \sqrt{5},$$

откуда $x = 2$. Следовательно, ребра данной пирамиды равны $AB = BC = AC = 4$ и $AS = BS = CS = 8$ — пирамида правильная. Ясно также, что в правильной треугольной пирамиде перпендикуляры к граням, восстановленные из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке. $\square$

1998 год

1. Курица съедает за 1 день $1/9$ кг зерна, утка — $1/6$, а гусь — $1/2$. Значит, за один день 4 курицы, 5 уток и 3 гусь съедят $\frac{4}{9} + \frac{5}{6} + \frac{3}{2} = \frac{25}{9}$ кг зерна. Таким образом, 175 кг зерна им хватит на $175 : \frac{25}{9} = 63$ дня. $\square$

2. Пусть O — точка пересечения биссектрис углов B и C (см. рисунок). Тогда



$$\begin{aligned}\angle BOC &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = \\ &= \frac{1}{2}(360^\circ - \angle B - \angle C) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D) = 97^\circ.\end{aligned}$$

За угол между прямыми по определению принимается *меньший* угол. Поэтому ответом является 83° . Ответ 97° также считался верным. $\square$

3. Если $a = \log_9 6 = \log_3 \sqrt{6} = \log_3 \sqrt{3} + \log_3 \sqrt{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_3 2$, то $\log_3 2 = 2a - 1$. Имеем далее:

$$\begin{aligned}\log_{3\sqrt{2}} \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}} &= \frac{\log_3 \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}}}{\log_3 3\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{3} \log_3 18 - \frac{1}{2} \log_3 12}{1 + \log_3 \sqrt{2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{3}(2 + \log_3 2) - \frac{1}{2}(1 + 2 \log_3 2)}{1 + \frac{1}{2} \log_3 2} = \frac{\frac{1}{3}(2a + 1) - \frac{1}{2}(4a - 1)}{a + \frac{1}{2}} = \frac{5 - 8a}{3 + 6a}.\end{aligned}$$

$\square$

4. Пусть a_1 и d — соответственно первый член и разность данной арифметической прогрессии. Тогда $a_1 + 2d$, $a_1 + 5d$ и $a_1 + 7d$ — соответственно третий, шестой и восьмой члены этой прогрессии. Так как эти три числа являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии, то выполнено соотношение

$$(a_1 + 5d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 7d),$$

откуда $a_1 = -11d$ или $d = 0$. С другой стороны, согласно условию задачи имеем

$$(a_1 + 2d)(a_1 + 5d)(a_1 + 7d) = 125.$$

Если $a_1 = -11d$, получим $d = -\frac{5}{6}$ и $a_1 = \frac{55}{6}$. В этом случае $b_1 = a_3 = a_1 + 2d = \frac{15}{2}$. Если же $d = 0$, то $a_1 = 5$ и $b_1 = a_3 = 5$. $\square$

5. Проведем следующие эквивалентные преобразования:

$$2^{\cos 2x} + 10 > 6 \cdot 2^{1-\sin^2 x} \iff 2^{\cos 2x} + 10 > 6 \cdot 2^{\cos^2 x} \iff$$

$$2^{\cos 2x} + 10 > 6 \cdot 2^{\frac{1+\cos 2x}{2}} \iff 2^{\cos 2x} + 10 > 6\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{\cos 2x}{2}}.$$

Пусть $t = 2^{\frac{\cos 2x}{2}}$. Имеем:

$$t^2 + 10 > 6\sqrt{2}t \iff t > 5\sqrt{2} \text{ или } t < \sqrt{2}.$$

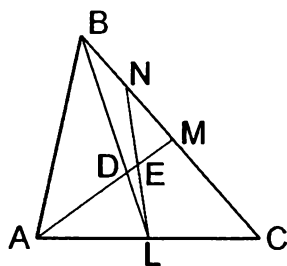
Если $t > 5\sqrt{2}$, то

$$2^{\frac{\cos 2x}{2}} > 5\sqrt{2} \iff \cos 2x > 2\log_2 5\sqrt{2} \iff \text{нет решений,}$$

так как $2\log_2 5\sqrt{2} > 1$. Если же $t < \sqrt{2}$, то

$$2^{\frac{\cos 2x}{2}} < \sqrt{2} \iff \cos 2x < 1 \iff \cos 2x \neq 1 \iff x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

□



6. Будем искать площадь четырехугольника $BDEN$ как разность площадей треугольников LBN и LDE . Так как $BN : BC = 1 : 4$, то $S_{\triangle LBN} = \frac{1}{4}S_{\triangle LBC}$. Но $S_{\triangle LBC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 6$, значит, $S_{\triangle LBN} = \frac{3}{2}$. Далее имеем:

$$\frac{S_{\triangle LDE}}{S_{\triangle LBN}} = \frac{LD \cdot LE}{LB \cdot LN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{LE}{LN}.$$

Найдем указанное отношение, применив к треугольнику LNC и секущей EM теорему Менелая:

$$\frac{CM}{MN} \cdot \frac{NE}{EL} \cdot \frac{LA}{AC} = 1 \iff \frac{2}{1} \cdot \frac{NE}{EL} \cdot \frac{1}{2} = 1 \iff NE = EL,$$

и, следовательно, $LE : LN = 1 : 2$. Окончательно получаем:

$$\frac{S_{\triangle LDE}}{S_{\triangle LBN}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{LE}{LN} = \frac{1}{6} \iff S_{\triangle LDE} = \frac{1}{4} \implies S_{BDEN} = \frac{5}{4}. \quad \square$$

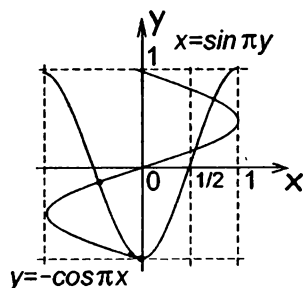
7. Так как согласно условию задачи должно быть выполнено условие $y(-x) = -y(x)$ при всех допустимых x , имеем:

$$\log_{2a+1}(\sqrt{a^2 + 4x^2} + 2x) - 2 = -\log_{2a+1}(\sqrt{a^2 + 4x^2} - 2x) + 2 \iff$$

$$\iff \log_{2a+1} a^2 = 4 \iff a = -\frac{1}{4}.$$

Проверкой убеждаемся, что значение $a = -\frac{1}{4}$ удовлетворяет условию задачи. $\square$

8. Построим на одной координатной плоскости кривые, задаваемые уравнениями $x = \sin \pi y$ и $y = -\cos \pi x$ (см. рисунок). Видно, что при $x < \frac{1}{2}$ эти две линии пересекаются ровно в трех точках. Заметим, что точка $(0, -1)$ не является точкой касания кривых, поскольку в ней кривая $y = -\cos \pi x$ имеет горизонтальную касательную, а $x = \sin \pi y$ — наклонную.

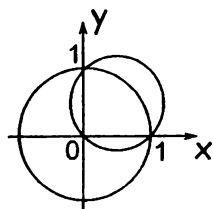


$\square$

9. Равенства $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 - x - y = 0$ задают в координатном пространстве две пересекающиеся сферы. Рассмотрим сечение этих сфер плоскостью $z = 0$, проходящей через центр каждой из сфер. Этим сечением являются две пересекающиеся окружности

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{и} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{см. рисунок}).$$

Нам необходимо вычислить объемы частей каждого из шаров, лежащих вне другого шара, и сложить полученные величины. Искомый объем мы найдем как сумму объемов двух шаров минус удвоенный объем их общей части. При этом первым мы будем считать большой шар радиуса $R_1 = 1$, а вторым — малый шар радиуса $R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Общая часть этих шаров



состоит из половины второго шара и сегмента первого шара. Так как объем шарового сегмента радиуса R высоты h находится по формуле $V = \pi(Rh^2 - \frac{h^3}{3})$, окончательно имеем:

$$\begin{aligned} V_{\text{иск}} &= V_1 + V_2 - 2V_{\text{общ}} = \\ &= \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \frac{4}{3}\pi R_2^3 - 2\left(\frac{2}{3}\pi R_2^3 + \pi\left(R_1 h^2 - \frac{h^3}{3}\right)\right) = \\ &= \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \right. \\ &\quad \left. + \pi\left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)\right) = \frac{5\pi\sqrt{2}}{6}. \quad \square \end{aligned}$$

1999 год

1. Проведем следующие эквивалентные преобразования:

$$\begin{aligned} \sqrt{5} \cdot 5^{\frac{7-2x}{2}} + 5^{x-2} > 10 &\iff 5^{4-x} + 5^{x-2} > 10 \iff \\ (5^{2-\frac{x}{2}} - 5^{\frac{x}{2}-1})^2 > 0 &\iff 5^{2-\frac{x}{2}} \neq 5^{\frac{x}{2}-1} \iff x \neq 3. \quad \square \end{aligned}$$

2. Пусть a , b и c — соответственно длина, ширина и высота исходного кирпича. Тогда $1,7a$, $0,5b$ и $0,8c$ — размеры кирпича после их изменения. Первоначальный объем кирпича равен abc , после изменения — $1,7a \cdot 0,5b \cdot 0,8c = 0,68abc$, что составляет 68% исходного объема. $\square$

3. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 10x^2 - 70x + 120 \geq 0 \\ 3x - 9 \geq 0 \\ 10x^2 - 70x + 120 \leq (3x - 9)^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x \in (-\infty, 3] \cup [4, +\infty) \\ x \geq 3 \\ x^2 - 16x + 39 \leq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \{3\} \cup [4, +\infty) \\ x \in [3, 13] \end{cases} \iff x \in \{3\} \cup [4, 13]. \quad \square \end{aligned}$$

4. Согласно определению арккосинуса имеем:

$$\alpha = \arccos(\sin(-3)) \iff \begin{cases} \cos \alpha = \sin(-3) \\ \alpha \in [0, \pi] \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \cos \alpha + \cos(\frac{\pi}{2} - 3) = 0 \\ \alpha \in [0, \pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}) = 0 \\ \alpha \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} &= \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} &= \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \alpha &\in [0, \pi] \end{aligned} \right. & \iff & \begin{cases} \left[\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2} + 3 + 2\pi n \\ \alpha &= \frac{3\pi}{2} - 3 + 2\pi n \\ \alpha &\in [0, \pi] \end{aligned} \right. \end{cases}$$

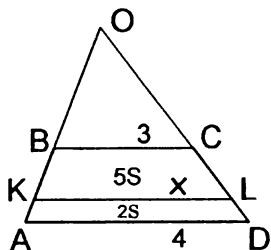
$$\iff \alpha = \frac{3\pi}{2} - 3. \quad \square$$

5. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{cases} \frac{5x}{14} > 1 \\ x^2 - \frac{1}{14} \geq \frac{5x}{14} \\ 0 < \frac{5x}{14} < 1 \\ 0 < x^2 - \frac{1}{14} \leq \frac{5x}{14} \end{cases} \right] \iff \left[\begin{cases} x > \frac{14}{5} \\ x \in (-\infty, -\frac{1}{7}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty) \\ x > 0 \\ x < \frac{14}{5} \\ x \in [-\frac{1}{7}, \frac{1}{2}] \\ x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{14}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{14}}, +\infty) \end{cases} \right]$$

$$\iff x \in (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{1}{2}] \cup (\frac{14}{5}, +\infty). \quad \square$$

6. Обозначим трапецию $ABCD$ и продолжим боковые стороны AB и DC до их пересечения в точке O (см. рисунок). Пусть также KL — данный в условии задачи отрезок и его длина равна x . Так как площади трапеций $AKLD$ и $KBCL$ равны $2S$ и $5S$ соответственно, имеем:



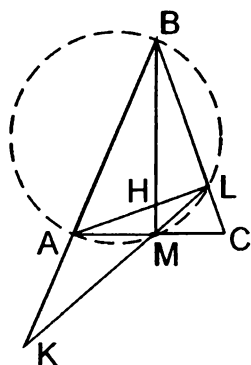
$$\frac{9}{16} = \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOD}} = \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BOC} + 7S} \implies S_{\triangle BOC} = 9S.$$

Значит, площадь треугольника KOL равна $9S + 5S = 14S$.
Имеем далее:

$$\frac{9}{x^2} = \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle KOL}} = \frac{9S}{14S} = \frac{9}{14} \Rightarrow x = \sqrt{14}. \quad \square$$

7. Проведем следующие эквивалентные преобразования:

$$\begin{aligned} ||x+6|-9|-4| = 4 &\Leftrightarrow \begin{cases} ||x+6|-9|-4 = 4 \\ ||x+6|-9|-4 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} ||x+6|-9| = 8 \\ ||x+6|-9| = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |x+6|-9 = 8 \\ |x+6|-9 = -8 \\ |x+6|-9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} |x+6| = 17 \\ |x+6| = 1 \\ |x+6| = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+6 = 17 \\ x+6 = -17 \\ x+6 = 1 \\ x+6 = -1 \\ x+6 = 9 \\ x+6 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = -23 \\ x = -5 \\ x = -7 \\ x = 3 \\ x = -15. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$



8. Согласно условию задачи треугольник ABC является остроугольным и разносторонним. Обозначим через K точку пересечения прямых AB и ML , а через H — точку пересечения прямых AL и BM (см. рисунок). Так как окружность, построенная на AB как на диаметре, содержит точки M и L , сумма углов MAB и MLB равна 180° , следовательно, $\angle MAB = \angle MLC$. Кроме того, $\angle AHM = \angle BHL$ и $\angle AHB = \angle MHL$ как вертикальные. Возвращаясь к построенной нами окружности, получим, что $\angle MAL = \angle MBL$ и $\angle LAB = \angle LMB$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу.

Следовательно, 4 треугольника: BHL , BCM , AHM , ACL подобны друг другу. Это дает 6 пар подобных треугольников. Кроме того, имеются следующие пары подобных треугольников: ABC и LMC , AMK и LBK , AHB и MHL , ALK и MBK , всего 10 пар. $\square$

9. Проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} x = \sqrt[3]{2} + \sqrt{5} &\iff x - \sqrt{5} = \sqrt[3]{2} \iff (x - \sqrt{5})^3 = 2 \iff \\ x^3 - 3x^2\sqrt{5} + 15x - 5\sqrt{5} &= 2 \iff x^3 + 15x - 2 = \sqrt{5}(3x^2 + 5) \\ \implies (x^3 + 15x - 2)^2 &= 5(3x^2 + 5)^2 \iff \\ \iff x^6 - 15x^4 - 4x^3 + 75x^2 - 60x - 121 &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

10. Пусть α , β и γ — углы, образованные плоскостью данного треугольника с координатными плоскостями Oyz , Oxz и Oxy соответственно. Тогда $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Обозначим через S площадь самого треугольника, а через S_y — площадь его проекции на плоскость Oxz . Так как площадь проекции треугольника на плоскость равна площади этого треугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью треугольника и плоскостью проекции, то имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \sqrt{6} = S \cos \gamma \\ \sqrt{7} = S \cos \alpha \\ S_y = S \cos \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos \gamma = \frac{\sqrt{6}}{S} \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{S} \\ \cos \beta = \frac{S_y}{S} \end{cases} \implies$$

$$\frac{7}{S^2} + \frac{S_y^2}{S^2} + \frac{6}{S^2} = 1 \iff S^2 = 13 + S_y^2 \iff (S + S_y)(S - S_y) = 13.$$

Далее перебором, учитывая, что S и S_y — целые числа и $S \geq S_y$, получим $S = 7$. $\square$

2001 год

1. Чтобы исправить ошибку, Толе необходимо полить кусты из расчета $\frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{1}{35}$, то есть 1 лейка на 35 кустов. $\square$

2. Число делится на 72 тогда и только тогда, когда оно делится на 8 и на 9. Так как данное число делится на 8, трехзначное число $\overline{31Y}$, на которое оно оканчивается, также должно делиться на 8. Следовательно, $Y = 2$. Далее, число делится на 9, если только сумма его цифр делится на 9. А это означает, что $X = 0$ или $X = 9$. $\square$

3. Разность расстояний, пройденных пешеходом в первом и во втором случае, равна $1/9$ длины моста. Разность же расстояний, пройденных в этих случаях машиной, равна длине всего моста. Следовательно, отношение скорости машины к скорости пешехода равно 9. $\square$

4. Пусть x — количество граммов олова в первом образце. Тогда $(5 - x)$ — количество граммов меди в этом образце. Следовательно, количества олова, меди и цинка в новом сплаве составляют $(x + 21)$, $(21 - x)$ и 15 г соответственно. Согласно условию задачи, должно быть выполнено одно из следующих трех соотношений:

- 1) $(x + 21) + (21 - x) = 30$;
- 2) $(x + 21) + 15 = 2(21 - x)$;
- 3) $(21 - x) + 15 = 2(x + 21)$.

Из этих трех уравнений только второе имеет положительное решение: $x = 2$. $\square$

5. Проведем следующие эквивалентные преобразования:

$$|\sin 2x + \cos x| = ||\sin 2x| - |\cos x|| \iff$$

$$\iff (\sin 2x + \cos x)^2 = (|\sin 2x| - |\cos x|)^2 \iff$$

$$\sin^2 2x + \cos^2 x + 2 \sin 2x \cos x = \sin^2 2x + \cos^2 x - 2|\sin 2x \cos x| \iff$$

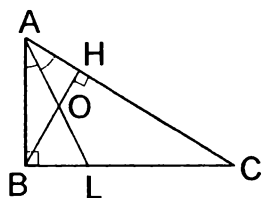
$$\iff |\sin 2x \cos x| = -\sin 2x \cos x \iff \sin 2x \cos x \leq 0 \iff$$

$$\iff 2 \sin x \cos^2 x \leq 0 \iff \cos x = 0 \text{ или } \sin x \leq 0 \iff$$

$$\iff x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}\right\} \cup [-\pi, 0] \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup [\pi, 2\pi),$$

так как $x \in (-2\pi, 2\pi)$. $\square$

6. Обозначим через AL биссектрису острого угла прямоугольного треугольника, а через BH — высоту этого треугольника, опущенную на гипотенузу (см. рисунок). Пусть O — точка пересечения AL и BH . Из подобия треугольников ABL и AHO (по двум углам) имеем:



$$\frac{4}{9} = \frac{AO}{AL} = \frac{AH}{AB} = \cos \angle A \implies \angle A = \arccos \frac{4}{9}. \quad \square$$

7. Пусть α° — угол, пройденный часовой стрелкой за период времени от трех часов ночи до момента ее встречи с минутной стрелкой. Тогда $90^\circ + \alpha^\circ$ — угол, пройденный за тот же период времени минутной стрелкой. Так как скорость часовой стрелки в 12 раз меньше скорости минутной, имеем:

$$90^\circ + \alpha^\circ = 12\alpha^\circ \iff \alpha = \left(\frac{90}{11}\right)^\circ.$$

Поскольку часовая стрелка проходит угол в 1° за $1/30$ часа, угол α° она пройдет за $\frac{90}{11} \cdot \frac{1}{30} = \frac{3}{11}$ часа. Стрелки совпадут в $3\frac{3}{11}$ часа. $\square$

8. Обозначая буквой В вершину треугольника, а буквой С середину стороны, получаем для трех точек 8 вариантов: ВВВ, ВВС, ВСВ, ВСС, СВВ, СВС, ССВ, ССС. Варианты ВВВ и ССС дают по одному треугольнику (рис. 1).

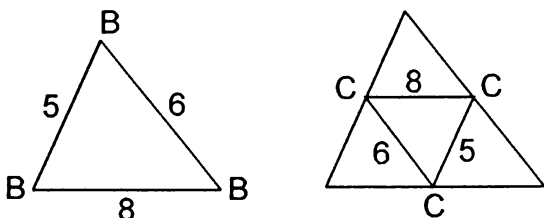


Рис. 1

Варианты ВСС, СВС и ССВ дают по три треугольника (рис. 2). В каждом из этих вариантов один из треугольников совпадает с треугольником варианта ССС. Кроме того, в каждой паре этих вариантов есть равные треугольники, отличные от треугольника варианта ССС. Таким образом, мы получаем три новых треугольника.

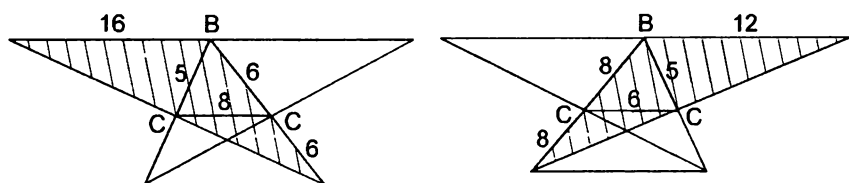


Рис. 2

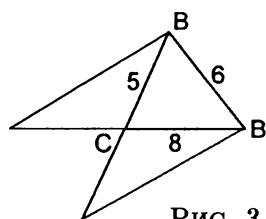


Рис. 3

И, наконец, варианты ВВС, ВСВ и СВВ дают по два треугольника (рис. 3), все шесть из которых различны. Складывая полученные числа, мы находим, что существует 11 различных треугольников, удовлетворяющих условию задачи. $\square$

9. Верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{x}}(x^7 + x^2 - 1)^3 &= 6 \log_x(x^7 + x^2 - 1) = 6 \log_x(x^7 - x^9 - x^{16}) = \\ &= 6 \log_x(x^7(1 - x^2 - x^9)) = 6(7 + \log_x(1 - 1 + x^{16})) = 6(7 + 16) = 138. \end{aligned}$$

При этом во втором равенстве было использовано соотношение $x^2 - 1 = -x^9 - x^{16}$, а в четвертом равенстве — соотношение $x^2 + x^9 = 1 - x^{16}$. $\square$

10. Пусть K , L и M — точки касания сферы с ребрами AB , BC и AC соответственно (см. рис. 1). Используя равенство отрезков касательных, проведенных к сфере из одной точки, введем следующие обозначения: $SA_1 = SB_1 = SC_1 = x$, $AA_1 = AK = AM = y$, $BB_1 = BK = BL = z$ и $CC_1 = CL = CM = t$. Согласно условию задачи имеем:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y + z = 6 \\ y + t = 6 \\ z + t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 1 \\ t = 1. \end{cases}$$

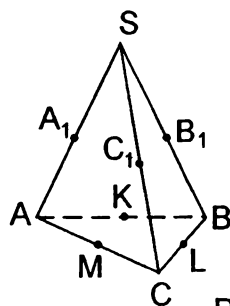


Рис. 1

Значит, пирамида $SABC$ является правильной и длины ее ребер равны $AS = AB = AC = 6$ и $BS = BC = CS = 2$. Высота AO этой пирамиды равна $AO = \sqrt{36 - (\frac{2}{\sqrt{3}})^2} = \frac{2\sqrt{78}}{3}$ и ее объем составляет

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta BCS} \cdot AO = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{78}}{3} = \frac{2\sqrt{26}}{3}.$$

Далее, высота A_1O_1 пирамиды $SA_1B_1C_1$ составляет $1/6$ часть высоты AO пирамиды $SABC$ (см. рис. 2), значит, площадь треугольника SB_1C_1 составляет $1/4$ часть площади треугольника SBC . Поэтому объем пирамиды $SA_1B_1C_1$ составляет $1/24$ часть объема пирамиды $SABC$ и равен $\frac{\sqrt{26}}{36}$. $\square$

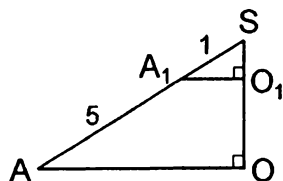


Рис. 2

2002 год

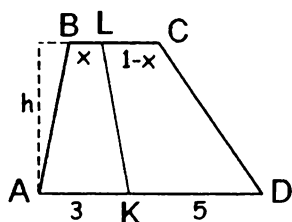
1. Задача сводится к нахождению минимума функции

$$f(n) = |S_n - 62| = \left| \frac{42 - 4(n-1)}{2} \cdot n - 62 \right| = |2n^2 - 23n + 62|$$

при натуральных n . Функция $f(n)$ принимает только целые неотрицательные значения, однако уравнение $f(n) = 0$ не имеет решений в натуральных числах. Уравнение $f(n) = 1$ имеет единственное натуральное решение $n = 7$, при этом получим $S_7 = 63$. $\square$

2. Верны следующие равенства:

$$2^{3x-1} + 2^{-3x-1} = \frac{1}{2}(2^{3x} + 2^{-3x}) = \frac{1}{2}((2^x + 2^{-x})^3 - 3(2^x + 2^{-x})) = 9. \quad \square$$



3. Пусть $LB = x$, $LC = 1 - x$, высота трапеции равна h (см. рисунок). Имеем:

$$\frac{3}{2} = \frac{S_{ABLK}}{S_{KLCD}} = \frac{\frac{1}{2}(3+x)h}{\frac{1}{2}(6-x)h} = \frac{3+x}{6-x} \iff$$

$$\iff x = \frac{12}{5},$$

что противоречит условию $x < 1$. Значит,

$$\frac{2}{3} = \frac{S_{ABLK}}{S_{KLCD}} = \frac{3+x}{6-x} \iff x = \frac{3}{5}. \quad \square$$

4. Обозначим через x и y соответственно число спортсменов и чиновников в спортивной делегации, через S_1 сумму возрастов всех спортсменов и через S_2 сумму возрастов всех чиновников. Имеем:

$$\begin{cases} S_1 = 21x \\ S_2 = 46y \\ S_1 + S_2 = 37(x + y) \end{cases} \implies 21x + 46y = 37(x + y) \iff 16x = 9y.$$

Значит, доля чиновников в делегации равна $\frac{y}{x+y} \cdot 100\% = 64\%$. $\square$

5. Найдем область определения данного уравнения:

$$\begin{cases} |x-4| > |x-1| \\ |x+5| > |x+3| \end{cases} \iff \begin{cases} (x-4)^2 > (x-1)^2 \\ (x+5)^2 > (x+3)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x > -4. \end{cases}$$

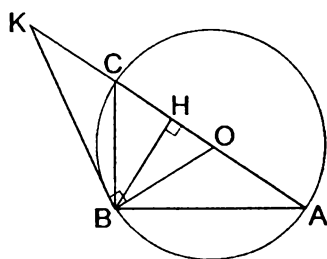
Следовательно, исходное уравнение равносильно следующей со-

вокупности:

$$\left[\begin{cases} -4 < x < -3 \\ \log_2 3 \cdot \log_9(2x+8) = \frac{1}{2} \\ -3 \leq x \leq 1 \\ \log_2 3 \cdot \log_9 2 = \frac{1}{2} \\ 1 < x \leq \frac{5}{2} \\ \log_2(5-2x) \cdot \log_9 2 = \frac{1}{2} \end{cases} \right] \iff \begin{cases} -4 < x < -3 \\ \log_2(2x+8) = 1 \\ -3 \leq x \leq 1 \\ 1 < x \leq \frac{5}{2} \\ \log_3(5-2x) = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff x \in [-3, 1]. \quad \square$$

6. Пусть O — центр данной окружности (это середина гипотенузы), K — точка пересечения касательной к этой окружности, проведенной в точке B , и прямой AC , BH — высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу (см. рисунок). Тогда верны следующие равенства: $AO = OB = OC = 4$, $OK = 10$. Применив теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику OBK , найдем $BK = 2\sqrt{21}$. Далее, используя подобие треугольников OBK и HVK , получаем:



$$\frac{HK}{BK} = \frac{BK}{OK} \iff \frac{HK}{2\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{10} \iff HK = 8,4 \implies$$

$$\implies AH = 5,6 \text{ и } HC = 2,4 \implies \frac{AH}{HC} = \frac{7}{3}. \quad \square$$

7. Так как оба графика проходят через точки $(0, 0)$ и $(2\pi, 0)$, ясно, что количество частей, на которые разделен прямоугольник, равно числу точек пересечения этих графиков на отрезке $[0, 2\pi]$ плюс единица. Найдем это число:

$$\sin 7x = \sin 3x \iff \sin 7x - \sin 3x = 0 \iff 2 \sin 2x \cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Поскольку на отрезке $[0, 2\pi]$ данное уравнение имеет 13 решений, прямоугольник разделен на 14 частей. $\square$

8. Сначала рассмотрим случай, когда данные две грани имеют общее ребро длины 5. Так как объем пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}S_{\Delta}h$, ясно, что наибольшее значение объема мы получим, если высота пирамиды, проведенная к одной из этих граней, максимальна. А это произойдет тогда, когда данные две грани перпендикулярны. Вычислим объем пирамиды в этом случае:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{2S_{\Delta}^2}{5} = \frac{2(9(9-5)(9-6)(9-7))}{15} = \frac{144}{5}.$$

Здесь мы использовали формулу Герона для вычисления площади треугольника и формулу $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$ для вычисления высоты этого треугольника, которая в рассматриваемом случае является также высотой пирамиды.

Пусть теперь эти же две грани имеют общее ребро длины 6 или общее ребро длины 7. Повторяя проведенное рассуждение, получим, что максимальное значение объема пирамиды в этих случаях будет равно $\frac{1}{3} \cdot \frac{2S_{\Delta}^2}{6}$ или $\frac{1}{3} \cdot \frac{2S_{\Delta}^2}{7}$, что меньше уже полученного числа $\frac{1}{3} \cdot \frac{2S_{\Delta}^2}{5} = \frac{144}{5}$. $\square$

9. Укажем все возможные способы распределения пар лыж (здесь числа расположены в порядке неубывания силы лыжников): 2,2,2,2,9; или 2,2,2,3,8; или 2,2,2,4,7; или 2,2,2,5,6; или 2,2,3,3,7; или 2,2,3,4,6; или 2,2,3,5,5; или 2,2,4,4,5; или 2,3,3,3,6; или 2,3,3,4,5; или 2,3,4,4,4; или 3,3,3,3,5; или 3,3,3,4,4; всего 13 способов. $\square$

10. Зафиксируем φ и найдем наибольшее значение функции

$$y(x) = \cos x - \frac{3}{2} \cos \varphi + \cos(x + \varphi) = 2 \cos \left(x + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{3}{2} \cos \varphi.$$

Ясно, что наибольшее значение этой функции будет равно $|2 \cos \frac{\varphi}{2}| - \frac{3}{2} \cos \varphi$, так как $|\cos(x + \frac{\varphi}{2})| \leq 1$ при всех x . Найдем теперь те $\varphi \in [0, 2\pi]$, при которых функция $|2 \cos \frac{\varphi}{2}| - \frac{3}{2} \cos \varphi$ принимает максимальное значение. Имеем:

$$\begin{aligned} \left| 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right| - \frac{3}{2} \cos \varphi &= \left| 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right| - \frac{3}{2} \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 \right) = \\ &= -3 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|^2 + 2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| + \frac{3}{2} = -3 \left(\left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно, наибольшее значение функции достигается при условии

$$\left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = \frac{1}{3} \iff \varphi = 2 \arccos \left(\pm \frac{1}{3} \right),$$

так как $\varphi \in [0, 2\pi]$.

□

III. Задачи устных экзаменов

Мех-мат, 1994 г.

1. Для каждого $a > 0$ найти наибольшее значение величины $|x - 2a|$, если выполнено условие $2|x| + |x - 3a| \leq 9a$.

2. Для каждого $a > 0$ найти наименьшее значение величины

$$x^2 - |x + a| + x - a$$

на отрезке $[-3, 3]$.

3. Для каждого $a > 0$ найти уравнения всех прямых, проходящих через начало координат и имеющих ровно две общие точки с графиком функции $y = x|x + 2a| + a^2$.

4. В тупоугольном треугольнике наибольшая сторона имеет длину 4, а наименьшая имеет длину 2. Может ли площадь треугольника быть больше, чем $2\sqrt{3}$?

5. Доказать, что уравнение $2^{x^2} \cdot 3^{-x} = \frac{2}{5}$ не имеет решений.

6. Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\log_{x-y}(x + y) \geq 1$.

Мех-мат, 1995 г.

1. Дан отрезок длины $\sqrt{5}$. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длины 1.

2. Дан отрезок длины 7. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длины $\sqrt{7}$.

3. С помощью циркуля и линейки по трем данным отрезкам a , h и m построить треугольник ABC со стороной $BC = a$, высотой $BH = h$ и медианой $BM = m$.

4. С помощью циркуля и линейки по трем данным отрезкам a , h и m построить треугольник ABC со стороной $BC = a$, высотой $BH = h$ и медианой $AM = m$.

5. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $BC = 9$ и $AC = 10$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке M . На отрезке BM взята точка O так, что $BO : OM = 3 : 1$. Площадь какого из треугольников ABO , BCO или ACO является наименьшей?

6. В треугольнике ABC известно, что $AB = 10$, $BC = 12$ и $AC = 8$. На отрезке AB взята точка K так, что $AK : KB = 2 : 3$, на отрезке BC взята точка M так, что $BM : MC = 2 : 1$, а на отрезке KM взята точка O так, что $KO : OM = 4 : 5$. Площадь какого из треугольников ABO , BCO или ACO является наименьшей?

7. Сколько корней имеет уравнение

$$3 - 2|x - 1| = 2 \left(\left| x - \frac{1}{4} \right| - \left| x + \frac{1}{4} \right| - \frac{3}{2} \right) ?$$

8. Сколько корней имеет уравнение

$$|x^2 - 2|x| + 1| = 3|2 - x| - 1 ?$$

Мех-мат, 1996 г.

1. Даны два отрезка: длины 1 и длины a . С помощью циркуля и линейки построить отрезок длины

а) $\frac{a^2 - 9}{a^2 + a - 2}$; б) $\sqrt[4]{a^3 - 4a^2 + 3a}$.

2. Является ли рациональным число

а) $\operatorname{tg} 5^\circ$;

б) $\sin 25^\circ$;

в) $\sqrt{3 - \sqrt{4 + \sqrt{12}}} + \sqrt{3 + \sqrt{4 - \sqrt{12}}}$?

3. Дан угол в 45° с вершиной O и треугольник ABC в котором $AB = 6$, $AC = 3$. Вершины A и B треугольника скользят по сторонам угла так, что точки O и C находятся относительно прямой AB

а) по разные стороны, причем $\angle ACB = 135^\circ$;

б) по одну сторону, причем $\angle ACB = 45^\circ$.

Какое множество точек пробегает при этом вершина C ?

Мех-мат, 1997 г.

1. Известно, что $\sin \alpha > 0$ и $\sin 3\alpha > \frac{1}{4}$. Доказать: $\sin \alpha > \frac{109}{1296}$.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E . Расстояние от точки B до прямой AD втрое больше, чем расстояние от точки C до прямой AD . Найти отношение площадей треугольников ABE и CDE , если $AE : EC = 3 : 2$.

3. Точка E лежит на диагонали AC трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD . Найти отношение $BC : AD$, если площади треугольников ABE и ADE относятся как $1 : 2$.

4. На ребре AA_1 единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка M так, что $AM = \frac{1}{7}$, а на ребре CC_1 взята точка K . Указать кратчайший маршрут из точки M в точку K по поверхности куба в зависимости от параметра $\alpha = \angle CK$.

5. На плоскости дан угол в 60° с вершиной A . Рассматриваются такие треугольники ABC , что вершины B и C лежат на сторонах угла и $4 \leq BC \leq 9$. Указать геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника ABC .

Мех-мат, 1998 г.

1. Сколько различных целочисленных пар (x, y) удовлетворяют уравнению $x^2 = 4y^2 + 2025$?

2. Доказать, что для любого простого числа $p > 5$ число $p^4 - 50p^2 + 49$ делится на 2880.

3. При каких значениях a график функции

$$y = (x + a)(|x + 1 - a| + |x - 3|) - 2x + 4a$$

имеет центр симметрии?

4. Найти количество трехзначных чисел, делящихся на 5 или на 7 (возможно, одновременно), но не делящихся на 3.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 3. Известно, что $13^\circ \leq \angle ABC \leq 43^\circ$. Найти наибольшее возможное значение площади четырехугольника $ABCD$.

6. Найти количество корней уравнения $\{x\} - \frac{1}{2} = \log_2 \frac{a}{x}$ для каждого значения $a \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}\right]$.

Мех-мат, 1999 г.

1. Найти все значения параметра a , при которых неравенство

$$|ax + 2y - 5| + a|x + 2ay - 2| \leq 3a$$

задает на координатной плоскости параллелограмм с внутреннейстью.

2. Изобразить на координатной плоскости все точки (p, q) , для каждой из которых уравнение $x^2 - px + q = 0$ имеет на промежутке $[-1, 1]$ ровно одно решение.

3. Пусть $r(M)$ — радиус наибольшего круга, который можно поместить в выпуклый четырехугольник M . Найти максимум величины $r(M)$ по всем четырехугольникам с периметром 17 и площадью 14.

4. Вычислить $\arctg 8 + \arctg \frac{19}{22} + \arccotg(-\frac{3}{2})$.

Мех-мат, 2000 г.

1. Найти все значения $x \in [0, 2\pi]$, для которых

$$\sin x \leq \sin 2x \leq \sin 3x \leq \sin 4x \leq \sin 5x.$$

2. Найти все тройки (x, y, z) натуральных чисел, для которых выполнено следующее равенство: $3xy + 3yz + 3xz = 5xyz + 3$.

3. Найти все пары (m, n) натуральных чисел, для которых выполнено следующее равенство: $\log_m(n - 7) + \log_n(5m - 17) = 1$.

4. Пусть точка X лежит на гипотенузе прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 9$ и $BC = 12$ на расстоянии x от вершины A . Обозначим через $n(x)$ число всех окружностей, проходящих через точки B и X и пересекающих катеты AB и BC в точках P и Q так, что отрезок PQ проходит через середину отрезка BX . Построить график функции $y = n(x)$.

Мех-мат, 2001 г.

1. Сколько корней может иметь уравнение

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x+4} = \sqrt{3x+10} \quad ?$$

2. Какую максимальную площадь может иметь четырехугольник, стороны которого последовательно равны $1-7a$, $7-6a$, $5-3a$, $14a+5$? Найти все значения a , при которых она достигается.

3. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 9$ и $AC = 10$ проведены высоты AH и CK и медиана BM . Рассматриваются всевозможные точки X , для каждой из которых окружности, проходящие через точки A , K , X и, соответственно, через точки C , H , X , касаются друг друга в точке X . Какие значения может принимать отношение $BX : XM$?

4. В единичном кубе с горизонтальным нижним основанием проводятся два плоских сечения. Наивысшая и наинизшая точки первого сечения находятся на расстоянии 0,8 и 0,4 от нижнего основания, а наивысшая и наинизшая точки второго сечения — на расстоянии 0,6 и 0,3. Найти наименьший объем, который при этих условиях может иметь часть куба, расположенная ниже первого сечения, но выше второго.

ВМК, 1997-98 г.

1. Доказать, что $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121 ни при каком целом n .

2. Доказать, что уравнение $x^2 - 5y^2 = 3$ не имеет решений в целых числах.

3. Решить в натуральных числах уравнение

$$x^2 - xy - 2x + 3y = 10.$$

4. Найти все целые значения a , при которых квадратный трехчлен $x^2 - (a + 5)x + 5a + 1$ можно разложить в произведение $(x + b)(x + c)$ двух сомножителей с целыми b и c .

5. Сравнить числа 18^{20} и 63^{13} .

6. Сравнить числа $\cos 5$ и $1/2$.

7. Сравнить числа $\sqrt{\log_3 \frac{9}{5}} + \sqrt{\log_3 5 + \frac{1}{2}}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{14}$.

8. Показать, что при $a \geq 1$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}.$$

9. Решить неравенство $\log_4^2(x+y) + \log_4^2(xy) \leq \log_2(x+y) - 1$.

10. Решить уравнение $\arcsin(x^3 + x^2 - 2) + \sqrt{6x - x^2 - 5} = 0$.

11. Решить уравнение $\max(2x, 3 - x) = \min(5 + 2x, 6x)$.

12. Решить систему

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

13. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ \cos(x - y) + xy = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

14. Действительные x, y, a таковы, что

$$\begin{cases} x + y = a - 1, \\ xy = a^2 - 7a + 14. \end{cases}$$

При каких a сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение?

15. Найти наибольшее значение функции $y = \sin^8 x + \cos^{14} x$.

16. Найти при $x < 0$ наибольшее значение функции

$$y = 4x + \frac{\pi}{x} - \cos(4x^2).$$

17. Найти минимальное и максимальное значение функции

$$y = a \cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x.$$

18. Существует ли линейная функция $f(x)$, которая удовлетворяет при всех x соотношению $2f(x+2) + f(4-x) = 2x + 5$?

19. Существует ли квадратичная функция $f(x)$, которая удовлетворяет при всех x соотношению $f(x+1) + f(2-x) = (x+1)^2$?

20. Вычислить $\operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2}) - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

21. Вычислить $\arcsin(\cos \arcsin x) + \arccos(\sin \arccos x)$.
22. Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $2y^2 \leq \log_2 x \cdot (3|y| - 2 \log_4 x)$.
23. Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|\sin x| + |\sin y| < 2$.
24. Изобразить на координатной плоскости Oab множество точек (a, b) , при которых уравнение $ax^2 + 2(b-1)x - a - 6 = 0$ имеет
- а) два решения разных знаков;
 - б) два положительных решения;
 - в) два отрицательных решения.
25. В треугольнике ABC с высотами AM и BN известно, что $AB = 1$, $AC = 4$ и $\angle AMN = \frac{\pi}{6}$. Найти BC .
26. Существует ли треугольник, длины высот которого равны
- а) 3, 4 и 8; б) 3, 5 и 9 ?
27. Дан отрезок длины $\sqrt{5}$. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длины 2.
28. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C прямые, а диагонали BD и AC относятся как 4 : 3. Найти углы B и D .
29. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BC$, $AC = CD$. Кроме того, $BC + CD = AD$. Найти углы трапеции.
30. Основания трапеции равны 1 и 7. Найти длину отрезка прямой, которая параллельна основаниям и делит трапецию на две равные по площади части.

ВМК, 1999 г.

1. Доказать, что число $n^3 - n + 3$ составное для любого натурального $n > 1$.

2. Целое число кратно 7 и при делении на 4 дает в остатке 3. Найти остаток от деления этого числа на 28.

3. Доказать, что если сумма целых чисел делится на 6, то и сумма кубов этих же чисел делится на 6.

4. Решить в целых числах уравнение $9^x = 4y + 1$.

5. Сравнить числа a и b , если известно, что $5(a - 1) = a^2 + b$.

6. Имеет ли смысл выражение $\sqrt{\log_3 3 - \log_5 11}$?

7. Изобразить на плоскости множество точек, удовлетворяющих равенству $|y - x| + |y - x^2| = 2$.

8. Построить график функции $y = \arcsin(|\sin x|)$.

9. Решить уравнение $\sin x \sin 3x = 2 \cos^2 x - \cos 2x$.

10. Решить уравнение $\frac{1}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2\cos^2 x} = \sin x + \cos x$.

11. При каких a уравнение $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = a$ имеет решения?

12. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x) = \arcsin x \cdot \arccos x + 1.$$

13. Решить неравенство $\log_2(\sqrt{x} + 1) \cdot \log_3(x + 2) \leq 1$.

14. В треугольнике все три высоты меньше 1. Доказать, что радиус вписанной окружности меньше $1/3$.

15. Доказать, что в любом треугольнике сумма длин всех трех медиан меньше периметра, но больше $3/4$ периметра треугольника.

16. В треугольнике ABC проведены высота CK и медиана CM . Известно, что $\angle ACK = \angle BCM$ и $\angle KCM \neq 0$. Найти величину угла ACB .

17. Построить параллелограмм по диагоналям и углу параллелограмма.

18. Построить треугольник по двум углам и биссектрисе третьего угла.

ВМК, 2000 г.

1. Решить в целых числах уравнение $x^2 = 2(xy - y^2 - y)$.

2. Натуральное число является полным квадратом и оканчивается на 5. Доказать, что его третья справа цифра четная (подразумевается, что число по крайней мере трехзначное).

3. Вычислить

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) \cdot \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \log_{2\sqrt{6}+7}(2\sqrt{6} + 5).$$

4. Что больше: $\lg 7 \cdot \lg 13$ или 1 ?

5. Вычислить $\sin \alpha$, если известно, что $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = 1,4$.

6. Вычислить $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23}$.

7. Найти область значений функции $f(x) = \sin(\cos(\cos^2 x))$.

8. Найти наибольшее значение выражения $\cos x + \cos y$ при условии, что $x + y = \frac{\pi}{2}$.

9. Изобразить на плоскости множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству $\log_y |\sin x| \geq 0$.

10. Решить уравнение $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 3x = \operatorname{tg} x + 11 \operatorname{tg} 3x - 30,5$.

11. Решить уравнение $2x^6 + 2x^2 = 2x^4 + 1$.

12. Решить уравнение $\sqrt{\lg(-x)} = \lg \sqrt{x^2}$.

13. Решить уравнение $x^{\lg 2x} = 5$.

14. Решить уравнение $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

15. Решить уравнение $4 \cdot 3^{3x+1} + 4 = 5 \cdot 2^{9x}$.

16. Решить уравнение $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$.

17. Решить систему

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$$

18. Доказать, что для неотрицательных чисел a , b и c имеет место неравенство

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

19. Найти x при условии, что числа $\lg 3$, $\lg(3^x - 10)$ и $\lg(3^x - 4)$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии.

20. Наибольшей стороне $BC = a$ треугольника ABC принадлежит точка M . Найти наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и ACM .

21. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Известно, что $AB = 6$, $AC = 3\sqrt{5}$ и $BL = 2\sqrt{2}$. Найти BC .

22. В равнобедренной трапеции средняя линия равна a , а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

23. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность и на дуге BC взята такая точка M , что $BM = 2$ и $CM = 3$. Найти AM .

24. В треугольнике даны две стороны a и b ($a > b$). Найти третью сторону, если известно, что $a + h_a \leq b + h_b$, где h_a и h_b — высоты, опущенные на a и b соответственно.

25. Пусть R , r и S соответственно радиусы описанной, вписанной окружностей и площадь прямоугольного треугольника. Известно, что $R + r = \sqrt{2S}$. Найти острые углы этого треугольника.

26. В окружность радиуса 1 вписан правильный четырнадцатигульник. Найти сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин этого четырнадцатигульника.

27. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найти, в каком отношении две плоскости, проходящие через точки A_1 , B , D и B_1 , C , D_1 соответственно, делят диагональ AC_1 .

28. Три шара касаются некоторой плоскости и попарно касаются друг друга. Найти радиусы шаров, если известно, что точки касания шаров с плоскостью являются вершинами треугольника со сторонами a , b и c .

ВМК, 2001 г.

1. Какое из чисел больше: $0,7(621)$ или $141/185$?

2. Найти все пятизначные числа, делящиеся на 45, запись которых в десятичной системе имеет вид $\overline{53x1y}$ (x и y — цифры).

3. Найти пять таких последовательных натуральных чисел, чтобы сумма квадратов трех первых из них равнялась сумме квадратов двух последних.

4. Выяснить, сколько решений в натуральных числах имеет система

$$\begin{cases} k^2 + l = m^2, \\ k + l^2 = n^2. \end{cases}$$

5. Найти все тройки простых чисел (p, q, r) , удовлетворяющие равенству $p^q + q^p = r$.

6. Найти все целые числа m и n , при которых один из корней уравнения $3x^3 + mx^2 + nx + 12 = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$.

7. Написать какое-либо рациональное уравнение с целыми коэффициентами, имеющее корень $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

8. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ z^2 + 4y^2 = 8y, \\ (2z-x)(x+3) = 5x + 16, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geq 0$.

9. Представить функцию $f(x) = \frac{3^x + x^2}{\sin x}$ в виде суммы четной и нечетной функций в области, где она определена.

10. Решить уравнение $\log_2(5 + 3 \cos 4x) = \sin^2(x + \frac{\pi}{4})$.

11. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$. Какие значения может принимать сумма $\alpha + \beta + \gamma$?

12. Известно, что $5 \sin \beta = \sin(2\alpha + \beta)$. Чему равно значение $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg} \alpha}$?

13. Решить уравнение $\arcsin \frac{x}{2} + 2 \arccos x = \pi$.

14. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x, y) = 6 \sin x \cos y + 2 \sin x \sin y + 3 \cos x.$$

15. Решить уравнение $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$.

16. Какое из чисел больше: $\log_3 10 + 4 \lg 3$ или 4?

17. Решить систему

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$$

18. Изобразить на координатной плоскости множество точек (x, y) , координаты которых удовлетворяют условию

$$|x^2 + xy + y^2| \geq |x^2 + xy - y^2|.$$

19. С помощью циркуля и линейки разделить угол в 54° на три равные части.

20. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе. Найти ее радиус, если меньший катет этого треугольника равен a , а гипотенуза равна s .

21. Две окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 , радиусами R_1 и R_2 соответственно, касаются друг друга внешним образом. На отрезке O_1O_2 как на диаметре построена окружность S_3 . Найти радиус окружности, касающейся внешним образом окружностей S_1 и S_2 и внутренним образом окружности S_3 .

22. Дан равнобедренный треугольник ABC с острым углом при вершине B . К боковой стороне BC проведены высота и медиана, длины которых равны 6 и $3\sqrt{5}$ соответственно. Найти длину стороны AB .

23. Существует ли треугольник, в котором длины сторон относятся друг к другу как $2 : 3 : 4$, а периметр более чем в 14 раз больше радиуса вписанной окружности?

24. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AD = a$ и $AB = b$. На ребре DD_1 выбрана точка M так, что получившийся в сечении прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , C_1 и M , четырехугольник имеет наименьший возможный периметр. Найти отношение $DM : MD_1$.

25. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость через середины ребер DD_1 и $D_1 C_1$ и вершину A . Найти угол между этой плоскостью и гранью $ABCD$.

26. Пусть R и r — соответственно радиусы описанного и вписанного шаров правильной четырехугольной пирамиды. Найти наименьшее значение величины R/r .

27. Плоскость π пересекается некоторой прямой в точке S . На этой прямой по одну сторону от плоскости π расположены точки A и B так, что $SA = a$ и $SB = b$. Найти геометрическое место точек касания сфер, проходящих через точки A и B , с плоскостью π .

Геологический факультет, 1997-98 г.

1. Решить уравнение $\operatorname{tg}(x^2) = -\operatorname{ctg} 30^\circ$.
2. Решить уравнение $\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg} x$.
3. Решить уравнение $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} 4$.
4. Решить уравнение $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$.
5. Решить неравенство $\log_{1-3x^2}(2x^2) > 1$.
6. Решить неравенство $7^{4x} < 7^{x^3}$.
7. Решить неравенство $(x^2 + 2x + 2)^x \geq 1$.
8. Вычислить $\operatorname{tg}(\arcsin(-\frac{1}{3}))$.
9. Вычислить $\sin(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3})$.
10. Вычислить $\cos(2 \operatorname{arctg}(-4))$.
11. Построить график функции $y = \sin|x + \pi|$.
12. Построить график функции $y = |\cos(2x + \pi)|$.

13. Построить график функции $y = (x^2)^{\log \sqrt{x}^2}$.
14. Построить график функции $y = x^2 + |x| - 6$.
15. Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $y = |y| \cos x$.
16. Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $y = |y - \sin x|$.
17. Найти площадь прямоугольного треугольника, в котором длина высоты, проведенной к гипотенузе, равна h , а угол между этой высотой и одним из катетов равен φ .
18. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = BC = a$, $AC = b$. Найти радиус вписанной окружности.
19. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Найти стороны треугольника, если известно, что $AB \cdot AC = 24$, $CD : DB = 2 : 1$, а площадь треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$.
20. Длины оснований трапеции равны 7 и 10, а длины боковых сторон равны 5 и 4. Найти площадь этой трапеции.
21. Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены. Площадь полученного четырехугольника равна S . Найти площадь исходного четырехугольника.

Геологический факультет, 1999 г.

1. Решить уравнение $\cos x = \log_{\lg x} \sqrt{-\frac{\cos x}{|\sin x|}}$.
2. Решить уравнение $\sin(x - 1) = \sin x - \sin 1$.
3. Решить уравнение $\operatorname{ctg}(2\sqrt{x}) = \operatorname{ctg} x$.
4. Для всех значений a решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x} + \sqrt{1 - x} = a.$$

5. Решить неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{x}}$.
6. Решить неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^x \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{\sqrt{x}}$.
7. Решить неравенство $x^3 \geq 3^{5+\log \sqrt{x}^3}$.
8. Решить неравенство $x^4 \leq 5^{3-\log \frac{1}{x} 5}$.
9. Построить график функции $y = |\sin x| \operatorname{ctg} x$.
10. Построить график функции $y = (\sin |x| + \cos |x|)^2$.
11. Построить график функции $y = x^{|\log_x 2|}$.
12. Найти сумму цифр в десятичной записи числа $10^{1999} - 1999$.
13. Построить сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через вершину A_1 и середины ребер BB_1 и $C_1 D_1$.
14. Построить сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ плоскостью, проходящей через центр грани $ABB_1 A_1$ и середины ребер BC и CC_1 .
15. В треугольнике ABC известно, что $AB = 7$, $AC = 5$ и $\angle ACB = 60^\circ$. Найти BC .
16. Найти площадь прямоугольного треугольника, если известны его катет a и радиус вписанной окружности r .
17. Найти площадь прямоугольного треугольника, если известны радиус описанной окружности R и радиус вписанной окружности r .
18. Определить вид треугольника, если его площадь выражается через длины его сторон по формуле $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

Геологический факультет, 2000 г.

1. Вычислить $\frac{1}{1 - 2 \cos 30^\circ} + \frac{1}{1 + 2 \sin 60^\circ}$.
2. Вычислить $\frac{22}{\pi} \arcsin(\cos \frac{35\pi}{11})$.
3. Вычислить $125^{\frac{0,25}{\log_2 5}}$.
4. Найти $\operatorname{tg} x$, если $\frac{\sin x - 3 \cos x}{2 \sin x - \cos x} = 2$.
5. Сравнить числа $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ и $\sqrt{6}$.
6. Сравнить числа $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 2}$ и 2.
7. Решить уравнение $\log_{0,5}(-\frac{1}{\sqrt{x}}) = \frac{1}{3}$.
8. Решить уравнение $\frac{4}{9} \cdot (\frac{3}{2})^{x-1} \cdot (\frac{2}{3})^{\frac{1}{x}} = 1$.
9. Решить уравнение $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$.
10. Решить неравенство $\log_{0,6}(\log_{27} x) > -1$.
11. Найти наибольшее целое значение a , при котором уравнение $(3 - x)^5 = |x + a|^5$ не имеет решений.
12. Найти a , при котором расстояние между корнями уравнения $x^2 + (a - 34)x - 35a - 36 = 0$ будет наименьшим.
13. Построить график функции $y = \frac{2(x^3 + 5x^2 + 6x)}{|x| - x}$.
14. Построить график функции $y = \log_{1-x} x \cdot \lg(1 - x)$.
15. Найти множество значений функции $y = -\sqrt{55 - 6x - x^2}$ на отрезке $x \in [-4, 4]$.

16. Изобразить на плоскости множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{(y-x)(xy-1)}{(y-x)^2 + (xy-1)^2} = 0.$$

17. Найти период T функции $y = 2 \sin \frac{2x}{15} - 3 \cos \frac{8x}{35}$, удовлетворяющий условию $0 < T < 500$.

18. Сумма S_n первых n членов последовательности a_n , $n = 1, 2, \dots$, определяется по формуле $S_n = 2n^2 + 3n$. Найти эту последовательность.

19. Построить прямоугольный треугольник по катету и высоте, проведенной к гипотенузе.

20. Построить прямоугольный треугольник по заданной разности его острых углов и меньшему катету.

21. Окружность касается в точках B и C сторон угла с вершиной A . Найти BC , если $AB = 1$, а расстояние от A до центра окружности равно 2.

22. Найти расстояние между основаниями высот треугольника, если длины его сторон равны $8/3$, $10/3$ и 2.

Геологический факультет, 2001 г.

1. Представить число $0,2(13)$ в виде обыкновенной дроби.

2. Вычислить $2\sqrt{5} \cdot 5^{\frac{\lg 5}{\lg 25}}$.

3. Какое число больше: $\sin 3$ или $0,5$?

4. Какое число больше: $\cos 5$ или $0,5$?

5. Решить в целых числах уравнение $xy = 2x + y$.

6. Найти все целочисленные пары (x, y) , где $|x| \leq 1$, удовлетворяющие уравнению $xy = x^2 + \frac{y^2}{4}$.

7. Найти минимальное значение функции $y = 2x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$.

8. Решить уравнение $\lg(3 + 2\lg(1 + x)) = 0$.

9. Решить уравнение $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.

10. Решить уравнение $2|\sin x| + \cos x = 1$.

11. Решить неравенство $\log_{x-2}(3x - x^2) \leq 2$.

12. Решить неравенство $\log_{|x-2|}(x + 3)^2 \leq 2$.

13. Имеет ли решение уравнение $\sqrt{x} + x^2 = 8x - 15$?

14. Имеет ли решение уравнение $|x| = x^2 - 8x + 18$?

15. Какие значения может принимать сумма $\sin x + \sqrt{2} \cos x$, если $\sin x = \frac{1}{2}$?

16. Какие значения может принимать сумма $\sin x + \sqrt{2} \cos x$, если $\sin x + \cos x = 1$?

17. Построить график функции $y = \lg \frac{x^2}{|x|}$.

18. Построить график функции $y = \frac{|\log_2 x| + \log_2 x}{\log_2 x}$.

19. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 4y \leq -6, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

20. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$|y - 2x| + |y + 2x| \leq 2.$$

21. В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты $AB = 3$ и $AC = 5$. Найти длину биссектрисы AD .

22. В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты $AB = 3$ и $AC = 5$. Найти длину высоты AD .

23. В треугольнике ABC известно, что $\angle A + \angle B = \angle C$, $AC = 3$ и $BC = 4$. Найти длину стороны AB .

24. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 2\angle B$, $AC = 2$ и $AB = 3$. Найти длину стороны BC .

25. На стороне AD квадрата $ABCD$ выбрана точка E так, что $\operatorname{tg} \angle ABE = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Найти отношение площади треугольника ABE к площади четырехугольника $BCDE$.

Решения и ответы

Мех-мат, 1994 г.

1. ОТВЕТ: $4a$.
2. ОТВЕТ: $\min\{-1, -2a\}$.
3. ОТВЕТ: $y = kx$; $k = 0, -\frac{a}{2}, 4a$.
4. Обозначим вершины треугольника A, B, C , так что

$$AC = 2 < AB = c < BC = 4.$$

В произвольном треугольнике против большей стороны лежит больший угол. Поэтому тупым является угол $\angle BAC = \alpha$. Следовательно, его косинус отрицателен. Согласно теореме косинусов

$$\cos \alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{c^2 - 12}{4c}.$$

Имеем

$$\cos \alpha < 0 \iff c^2 - 12 < 0 \Rightarrow c < 2\sqrt{3},$$

откуда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \alpha < 2\sqrt{3} \sin \alpha < 2\sqrt{3},$$

так как α — тупой угол.

ОТВЕТ: *Не может.*

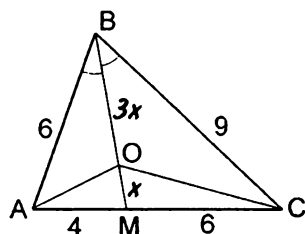
5. При $x > 0$ имеем:

$$2^{x^2} 3^{-x} = 2^{x^2} \left(\frac{1}{3}\right)^x > 2^{x^2} \left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^{x^2-2x} \geq 2^{-1} > \frac{2}{5}.$$

При $x \leq 0$ имеем $2^{x^2} 3^{-x} \geq 1 > \frac{2}{5}$.

□

Мех-мат, 1995 г.



5. Так как BM — биссектриса, то

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad (\text{см. рисунок}),$$

откуда, с учетом $AC = 10$, находим $AM = 4$, $MC = 6$. Далее, обозначим $OM = x$, тогда $BO = 3x$. Пусть $S_{\triangle AOM} = S$. Выразим через S площади треугольников ABO , BCO и ACO . Напомним, что площади треугольников, имеющих равную высоту, относятся как длины оснований, к которым проведена эта высота. Имеем:

$$S_{\triangle OCM} = \frac{6}{4}S = \frac{3}{2}S, \quad S_{\triangle ABO} = 3S, \quad S_{\triangle BCO} = 3S_{\triangle OCM} = \frac{9}{2}S.$$

Итак,

$$S_{\triangle ACO} = S_{\triangle AOM} + S_{\triangle OCM} = \frac{5}{2}S < S_{\triangle ABO} = 3S < S_{\triangle BCO} = \frac{9}{2}S.$$

ОТВЕТ: Треугольника ACO .

6. ОТВЕТ: Треугольника ABO .

7. ОТВЕТ: 2 корня.

8. Решим данное уравнение. Отметим, что сразу можно снять внешний модуль в левой части уравнения, так как $x^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2 \geq 0$. Далее рассмотрим три случая.

1) Пусть $x < 0$. Раскрываем модули:

$$x^2 + 2x + 1 = 3(2 - x) - 1 \iff x^2 + 5x - 4 = 0 \iff x = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

Здесь условию $x < 0$ удовлетворяет один из корней (с минусом).

2) Пусть $0 \leq x < 2$. Тогда

$$x^2 - 2x + 1 = 3(2 - x) - 1 \iff x^2 + x - 4 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Корень с минусом отрицателен, а для второго корня имеем

$$0 < \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < \frac{-1 + 5}{2} < 2,$$

поэтому он является и корнем исходного уравнения.

3) Пусть $x \geq 2$. Имеем:

$$x^2 - 2x + 1 = 3(x - 2) - 1 \iff x^2 - 5x + 8 = 0 \iff x \in \emptyset.$$

Итак, исходное уравнение имеет два корня.

ОТВЕТ: 2 корня.

Мех-мат, 1996 г.

2. а) Предположим, что число $\operatorname{tg} 5^\circ$ рационально. Тогда в силу равенства

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

рациональным является число $\operatorname{tg} 10^\circ$, а следовательно, и $\operatorname{tg} 20^\circ$. Применяя формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

к углам 10° и 20° , получаем, что число $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ рационально.

Рациональное число представимо несократимой дробью: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{m}{n}$, или $m\sqrt{3} = n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$. Возводим в квадрат: $3m^2 = n^2$. Значит, n делится на 3 и поэтому имеет вид $n = 3k$. Получаем $3m^2 = 9k^2$, $m^2 = 3k^2$, откуда следует, что и m делится на 3, что противоречит несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Противоречие показывает, что исходное предположение о рациональности числа $\operatorname{tg} 5^\circ$ было неверным.

ОТВЕТ: а) нет, б) нет, в) нет.

Мех-мат, 1997 г.

1. Согласно известной формуле, имеем:

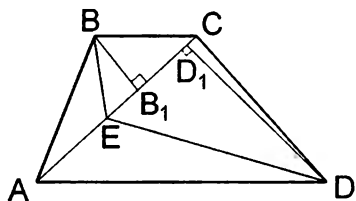
$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \Rightarrow 3 \sin \alpha = \sin 3\alpha + 4 \sin^3 \alpha > \frac{1}{4}.$$

Отсюда $\sin \alpha > \frac{1}{12}$ и выполнено неравенство

$$\sin \alpha > \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + 4 \cdot \left(\frac{1}{12} \right)^3 \right) = \frac{109}{1296},$$

что и требовалось доказать. $\square$

2. ОТВЕТ: 6.



3. Опустим в треугольниках ABC и ACD высоты BB_1 и DD_1 на сторону AC (см. рисунок). Они являются также высотами треугольников ABE и ADE , имеющих общее основание AE .

Так как $S_{\triangle ABE} : S_{\triangle ADE} = 1 : 2$, то $BB_1 : DD_1 = 1 : 2$. Далее, высоты треугольников ABC и ACD , опущенные на стороны BC и AD , равны. Следовательно,

$$\frac{BC}{AD} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{BB_1}{DD_1} = \frac{1}{2},$$

так как эти треугольники имеют общую сторону AC .

ОТВЕТ: 1 : 2.

Мех-мат, 1998 г.

1. При $x = 0$ исходное уравнение принимает вид $0 = 4y^2 + 2025$ и не имеет решений.

Пусть $y = 0$, тогда $x^2 = 2025 \iff x = \pm 45$. Это два решения.

Заметим теперь, что если (x, y) — решение данного уравнения,

причем $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ — еще три решения этого уравнения. Поэтому достаточно найти решения (x, y) с натуральными x, y .

Преобразуем уравнение к виду

$$x^2 = 4y^2 + 2025 \iff x^2 - 4y^2 = 2025 \iff (x - 2y)(x + 2y) = 2025.$$

Представление числа 2025 в виде двух натуральных сомножителей $2025 = a \cdot b$, $a < b$, даст решение (x, y) тогда и только тогда, когда $b - a$ делится на 4. Выпишем все разложения числа 2025 на два сомножителя a, b :

$$1 \cdot 2025, \quad 3 \cdot 675, \quad 5 \cdot 405, \quad 9 \cdot 225,$$

$$15 \cdot 135, \quad 25 \cdot 81, \quad 27 \cdot 75, \quad 45 \cdot 45.$$

Для всех этих разложений разность $b - a$ делится на 4. Однако для разложения $45 \cdot 45$ получим $y = 0$, что уже учтено. Всего получили $7 \cdot 4 + 2 = 30$ решений.

ОТВЕТ: 30.

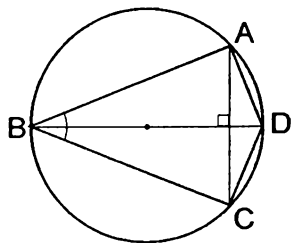
3. ОТВЕТ: $a = -\frac{2}{3}$.

4. ОТВЕТ: 188.

5. Пусть $\angle ABC = \beta$. Так как треугольник ABC вписан в окружность радиуса 3, то по теореме синусов имеем:

$$AC = 2R \sin \angle ABC = 6 \sin \beta \quad (\text{см. рисунок}).$$

Площадь четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABC и ACD . Каждая из этих площадей равна половине произведения основания AC на высоту (из вершин B и D соответственно). Поэтому площадь четырехугольника $ABCD$ будет максимальной, когда максимальна сумма расстояний от



B и D до AC . Это означает, что отрезок BD должен быть диаметром окружности, перпендикулярным хорде AC . Обозначая через h_B и h_D расстояния от точек B и D соответственно до прямой AC , получаем:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}h_B \cdot AC + \frac{1}{2}h_D \cdot AC = \\ &= \frac{1}{2}(h_B + h_D) \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \sin \beta = 18 \sin \beta. \end{aligned}$$

При $13^\circ \leq \beta \leq 43^\circ$ максимальное значение $\sin \beta$ достигается при $\beta = 43^\circ$.

ОТВЕТ: $S_{\max} = 18 \sin 43^\circ$.

6. ОТВЕТ: 2.

Мех-мат, 1999 г.

1. ОТВЕТ: $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Обозначим $f(x) = x^2 - px + q$. Уравнение $x^2 - px + q = 0$ имеет на промежутке $[-1, 1)$ ровно одно решение тогда и только тогда, когда выполнена хотя бы одна из следующих систем:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} & 2) \begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} & 3) \begin{cases} D = 0 \\ \frac{p}{2} \in [-1, 1) \end{cases} \\ 4) \begin{cases} f(-1) = 0 \\ \frac{p}{2} \geq 0 \end{cases} & 5) \begin{cases} f(-1) = 0 \\ \frac{p}{2} \leq -1 \end{cases} & 6) \begin{cases} f(1) = 0 \\ \frac{p}{2} \in [0, 1). \end{cases} \end{array}$$

Рассмотрим каждое из условий.

$$1) \begin{cases} 1 + p + q < 0 \\ 1 - p + q > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} q < -p - 1 \\ q > p - 1. \end{cases}$$

На плоскости (p, q) эти неравенства задают внутренность угла между прямыми (область A на рисунке).

$$2) \begin{cases} 1 + p + q > 0 \\ 1 - p + q < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} q > -p - 1 \\ q < p - 1 \end{cases}$$

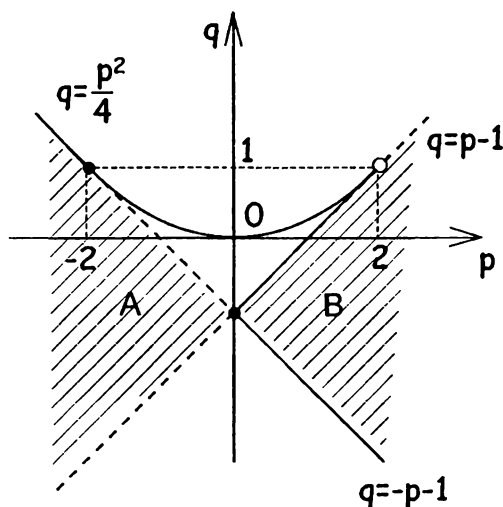
На плоскости (p, q) эти неравенства задают внутренность противоположащего угла (область B на рисунке).

$$3) \begin{cases} D = p^2 - 4q = 0 \\ -2 \leq p < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} q = \frac{p^2}{4} \\ -2 \leq p < 2 \end{cases} \quad \text{— это часть параболы.}$$

$$4) \begin{cases} 1 + p + q = 0 \\ p \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} q = -p - 1 \\ p \geq 0 \end{cases} \quad \text{— это луч.}$$

$$5) \begin{cases} 1 + p + q = 0 \\ p \leq -2 \end{cases} \iff \begin{cases} q = -p - 1 \\ p \leq -2 \end{cases} \quad \text{— это луч.}$$

$$6) \begin{cases} 1 - p + q = 0 \\ 0 \leq p < 2 \end{cases} \iff \begin{cases} q = p - 1 \\ 0 \leq p < 2 \end{cases} \quad \text{— интервал прямой.}$$



ОТВЕТ: область на рисунке.

3. ОТВЕТ: 28/17.

4. ОТВЕТ: $3\pi/2$.

Мех-мат, 2000 г.

1. ОТВЕТ: $x \in [0, \frac{\pi}{9}] \cup \{\pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$.

2. ОТВЕТ: $\{(1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2); (3, 2, 1)\}$.

3. Сначала отметим, что областью определения данного равенства является $m \geq 4$, $n \geq 8$. Далее, так как при указанных m , n выражения под знаком логарифма принимают значения, не меньшие единицы, то оба логарифма неотрицательны. Следовательно, для выполнения данного равенства необходимо выполнение неравенств

$$\log_m(n-7) \leq 1 \quad \text{и} \quad \log_n(5m-17) \leq 1,$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} n-7 \leq m \\ 5m-17 \leq n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m+n-24 \leq m+n \\ 5m+5n-52 \leq 5m+n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq 6 \\ n \leq 13. \end{cases}$$

С учетом области определения получаем, что $4 \leq m \leq 6$ и $8 \leq n \leq 13$. Решение задачи завершается перебором всех возможных пар.

ОТВЕТ: $\{(4, 9); (5, 8)\}$.

4. ОТВЕТ: Если $x \in [0, 3) \cup \{\frac{45}{7}\} \cup (9, 15]$, то $n(x) = 1$; если $x \in [3, \frac{45}{7}) \cup (\frac{45}{7}, 9]$, то $n(x) = 2$.

Мех-мат, 2001 г.

1. ОТВЕТ: 0 или 1.

2. Обозначим вершины четырехугольника A, B, C, D так, что

$$AB = 1 - 7a, \quad BC = 7 - 6a, \quad CD = 5 - 3a, \quad DA = 14a + 5.$$

Имеем:

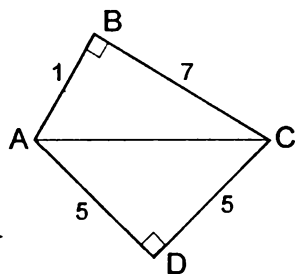
$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} =$$

$$= \frac{AB \cdot BC \sin \angle ABC}{2} + \frac{CD \cdot DA \sin \angle CDA}{2} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}(AB \cdot BC + CD \cdot DA) = \frac{1}{2}((1-7a)(7-6a) + (5-3a)(14a+5)) = 16.$$

Покажем, что это значение площади достигается при некотором a . Для этого в вписанной цепочке неравенство должно превратиться в равенство, а это возможно, если

$$\sin \angle ABC = \sin \angle CDA = 1, \quad \angle ABC = \angle CDA = \frac{\pi}{2}.$$

Значит, AC является общей гипотенузой треугольников ABC и ACD (см. рисунок), откуда по теореме Пифагора получаем:



$$AB^2 + BC^2 = CD^2 + DA^2 \iff$$

$$(1-7a)^2 + (7-6a)^2 = (5-3a)^2 + (14a+5)^2 \iff$$

$$120a^2 + 208a = 0 \iff a = 0 \text{ или } a = -\frac{26}{15}.$$

Значение $a = -\frac{26}{15}$ не подходит, так как

$$DA = 14a + 5 = -\frac{14 \cdot 26}{15} + 5 = \frac{-14 \cdot 26 + 75}{15} = -\frac{289}{15} < 0.$$

Легко видеть, что при $a = 0$ все длины сторон положительны и четырехугольник указанного вида существует.

ОТВЕТ: $S_{\max} = 16$ при $a = 0$.

3. ОТВЕТ: $\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{5} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}-\sqrt{3}} \right]$.

4. ОТВЕТ: 0,15.

ВМК, 1997-98 г.

2. Если бы пара (x, y) была решением данного уравнения, то x^2 давало бы при делении на 5 остаток 3. Легко проверить, что это невозможно. $\square$

3. ОТВЕТ: $\{(2, 10); (10, 10)\}$.

4. ОТВЕТ: $a = 3, a = 7$.

5. Имеем: $18^{20} = 2^{20} \cdot 3^{40}$ и $63^{13} = 3^{26} \cdot 7^{13}$. Далее, сравнивая числа 18^{20} и 63^{13} , получаем:

$$\begin{aligned} 18^{20} \vee 63^{13} &\iff 2^{20} \cdot 3^{40} \vee 3^{26} \cdot 7^{13} \iff \\ &\iff 2^{20} \cdot 3^{14} \vee 7^{13} \iff 8^7 \cdot 9^7 \vee 2 \cdot 7^{13} \iff \left(\frac{8}{2}\right) \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^6 \cdot \left(\frac{9}{7}\right)^7 \vee 1. \end{aligned}$$

Ясно, что первое число больше.

ОТВЕТ: *Первое число больше.*

6. Имеем:

$$\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}; \quad \cos 5 = \cos(2\pi - 5).$$

На интервале $(0, \pi)$ функция $\cos x$ убывает. Поэтому из неравенств

$$0 < \frac{\pi}{3} < 2\pi - 5 < \pi \iff 5 < \frac{5\pi}{3} \text{ и } \pi < 5$$

вытекает, что $1/2 > \cos 5$.

ОТВЕТ: *Первое число меньше.*

7. ОТВЕТ: *Первое число больше.*

8. Домножив обе части неравенства на положительное число $\frac{1}{2}(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1})\sqrt{a}$, получим:

$$\frac{\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}}{2} \leq \sqrt{a}.$$

Это неравенство есть следствие выпуклости вверх функции $y = \sqrt{x}$. Однако его (как и то, что $y = \sqrt{x}$ выпукла) легко доказать и непосредственно, возведя дважды в квадрат. $\square$

9. Имеем:

$$\begin{aligned}\log_4^2(x+y) + \log_4^2(xy) &\leq \log_2(x+y) - 1 \iff \\ \iff \frac{1}{4} \log_2^2(x+y) + \frac{1}{4} \log_2^2(xy) &\leq \log_2(x+y) - 1 \iff \\ \iff (\log_2(x+y) - 2)^2 &\leq -\log_2^2(xy).\end{aligned}$$

Так как левая часть этого неравенства неотрицательна, а правая — неположительна, то неравенство может выполняться только тогда, когда обе его части равны нулю. Получаем систему:

$$\begin{cases} \log_2(x+y) = 2 \\ \log_2(xy) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$\iff x = 2 + \sqrt{3}, y = 2 - \sqrt{3} \quad \text{или} \quad x = 2 - \sqrt{3}, y = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \{(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}); (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})\}.$$

$$10. \text{ ОТВЕТ: } x = 1.$$

$$11. \text{ ОТВЕТ: } x = \frac{3}{7}.$$

12. Так как $x^4 + y^4 = 1$, то $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 1$. Следовательно, из первого уравнения вытекает, что $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Далее, при $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$ имеем $x^4 \leq x^3$ и $y^4 \leq y^3$, причем равенства достигаются при значениях переменных, равных 0 или 1. Согласно условию

$$1 = x^4 + y^4 \leq x^3 + y^3 = 1$$

получаем, что $x^4 = x^3$ и $y^4 = y^3$. Значит, $x \in \{0, 1\}$ и $y \in \{0, 1\}$. Еще раз пользуясь вторым уравнением системы, находим ответ.

$$\text{ОТВЕТ: } \{(1, 0); (0, 1)\}.$$

$$13. \text{ ОТВЕТ: } a = 0.$$

14. УКАЗАНИЕ: воспользуйтесь формулой $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$. Кроме того, для предполагаемых значений a необходимо проверить, что соответствующие x, y существуют.

$$\text{ОТВЕТ: } a = 5.$$

15. Так как $|\sin x| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$, то

$$y(x) = \sin^8 x + \cos^{14} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Кроме того, $y(0) = 1$.

ОТВЕТ: 1.

16. ОТВЕТ: $1 - 4\sqrt{\pi}$.

17.

ОТВЕТ: $y_{\min} = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}$, $y_{\max} = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}$.

18. Допустим, что такая функция существует. Тогда, подставляя в данное равенство $x = 1$, получаем

$$2f(3) + f(3) = 7,$$

откуда $f(3) = \frac{7}{3}$ и $f(x) = k(x-3) + \frac{7}{3}$ при некотором k . Подставив теперь в исходное соотношение $x = 0$, получим

$$2f(2) + f(4) = 5.$$

Выразим левую часть этого равенства при помощи предполагаемого выражения для f :

$$f(2) = -k + \frac{7}{3}, \quad f(4) = k + \frac{7}{3} \Rightarrow$$

$$2f(2) + f(4) = -k + 7 = 5 \Rightarrow k = 2.$$

Следовательно, если такая функция f существует, то она задается формулой $f(x) = 2(x-3) + \frac{7}{3} = 2x - \frac{11}{3}$. Покажем, что эта функция удовлетворяет условию задачи. Действительно, имеем:

$$2f(x+2) + f(4-x) = 2\left(2(x+2) - \frac{11}{3}\right) + \left(2(4-x) - \frac{11}{3}\right) = 2x + 5.$$

ОТВЕТ: Существует; $y = 2x - \frac{11}{3}$.

19. ОТВЕТ: Не существует.

20. ОТВЕТ: $\pi/4$.

21. Допустим сначала, что $0 \leq x \leq 1$. Тогда $\arcsin x$ и $\arccos x$ принадлежат промежутку $[0, \frac{\pi}{2}]$, поэтому верны равенства

$$\cos \arcsin x = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{и} \quad \sin \arccos x = \sqrt{1 - x^2}.$$

Теперь, обозначая для удобства $\sqrt{1 - x^2} = y$, перепишем исходное выражение в виде $\arcsin y + \arccos y$. Легко видеть, что при любом y его значение равно $\frac{\pi}{2}$.

Пусть теперь $-1 \leq x \leq 0$, введем новую переменную $y = -x$ и вычислим значение данного выражения:

$$\begin{aligned} & \arcsin(\cos \arcsin(-y)) + \arccos(\sin \arccos(-y)) = \\ & = \arcsin(\cos(-\arcsin y)) + \arccos(\sin(\pi - \arccos y)) = \\ & = \arcsin(\cos(\arcsin y)) + \arccos(\sin(\arccos y)) = \frac{\pi}{2} \text{ по доказанному.} \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $\pi/2$.

25. Так как треугольники ABN и ABM прямоугольные с гипотенузой AB , то около четырехугольника $ABMN$ можно описать окружность (см. рис. 1 и рис. 2). Вписанные углы ABN и AMN равны как опирающиеся на одну дугу. Рассматривая треугольник ABN , находим:

$$AN = AB \sin \angle ABN = AB \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$BN = AB \cos \angle ABN = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Рассмотрим два случая:

1) Точка N лежит на отрезке AC (см. рис. 1), тогда $CN = AC - AN = \frac{7}{2}$. По теореме Пифагора получаем, что

$$BC = \sqrt{BN^2 + CN^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{13}.$$

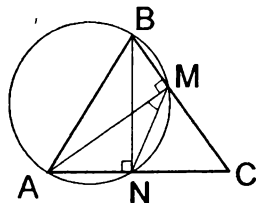


Рис. 1

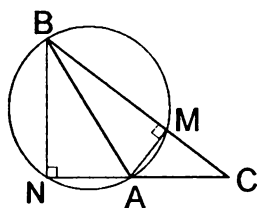


Рис. 2

2) Точка N не принадлежит отрезку AC (см. рис. 2), тогда $CN = AC + AN = \frac{9}{2}$. В этом случае имеем:

$$BC = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{21}.$$

ОТВЕТ: $\sqrt{13}$ или $\sqrt{21}$.

26. ОТВЕТ: а) да, б) нет.

28. ОТВЕТ: $\arcsin \frac{3}{4}$, $\pi - \arcsin \frac{3}{4}$.

29. ОТВЕТ: $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = \pi - 2\alpha$, $\angle C = \pi - \alpha$, $\angle D = \alpha$, где $\alpha = \arccos \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

30. ОТВЕТ: 5.

ВМК, 1999 г.

2. Запишем данное число n в виде $n = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$. Найдем остаток от деления n на 4, для чего рассмотрим все возможные случаи.

1) k делится на 4, тогда $n = 28m$, $m \in \mathbb{Z}$. Значит, n делится на 28, поэтому и на 4, что противоречит условию.

2) $k = 4m + 1$, тогда $n = 7(4m + 1) = 28m + 7$, что дает остаток 3 при делении на 4 и остаток 7 при делении на 28.

3) $k = 4m + 2$, тогда $n = 28m + 14$, дает остаток 2 при делении на 4, что противоречит условию.

4) $k = 4m + 3$, тогда $n = 28m + 21$, дает остаток 1 при делении на 4, что противоречит условию.

Итак, единственный возможный вариант — второй.

ОТВЕТ: 7.

4. ОТВЕТ: $\{(k, \frac{9^k-1}{4})\}$; $k = 0, 1, 2, \dots$.

5. Если $5(a-1) = a^2 + b$, то $b = -a^2 + 5a - 5$. Покажем, что при любом a имеет место неравенство $-a^2 + 5a - 5 < a$. В самом деле,

$$-a^2 + 5a - 5 < a \iff a^2 - 4a + 5 > 0.$$

Дискриминант этого трехчлена отрицателен, а старший коэффициент положителен. Из сказанного вытекает, что $b < a$.

ОТВЕТ: $a > b$.

6. Сравним числа $\log_2 3$ и $\log_5 11$. Так как $3 > 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$, то $\log_2 3 > \frac{3}{2}$. Следовательно, выполнены следующие неравенства:

$$5^{\log_2 3} > 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{125} > \sqrt{121} = 11 \Rightarrow \log_2 3 > \log_5 11.$$

ОТВЕТ: *Имеет.*

9. ОТВЕТ: *Решений нет.*

10. ОТВЕТ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$.

11. ОТВЕТ: $a \in [-1, \frac{1+2\sqrt{2}}{2}]$.

12. При всех допустимых x выполнены неравенства:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi.$$

Следовательно, для любого $x \in [-1, 1]$ имеем:

$$\arcsin x \cdot \arccos x \geq -\frac{\pi}{2} \cdot \pi = -\frac{\pi^2}{2}.$$

При этом минимальное значение достигается при $x = -1$. Значит, $f_{\min} = 1 - \frac{\pi^2}{2}$.

Найдем максимальное значение $f(x)$. Для этого достаточно рассматривать те x , при которых $\arcsin x > 0$. Согласно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем:

$$\arcsin x \cdot \arccos x \leq \left(\frac{\arcsin x + \arccos x}{2} \right)^2 = \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{16}. \quad (*)$$

Здесь мы воспользовались равенством $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что в неравенстве $(*)$ достигается равенство при $\arcsin x = \arccos x$, т.е. при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $f_{\max} = 1 + \frac{\pi^2}{16}$.

ОТВЕТ: $f_{\min} = 1 - \frac{\pi^2}{2}, \quad f_{\max} = 1 + \frac{\pi^2}{16}$.

13. Область определения неравенства: $x \geq 0$. При $x \geq 0$ функция

$$f(x) = \log_2(\sqrt{x} + 1) \cdot \log_3(x + 2)$$

возрастает, поскольку является произведением *неотрицательных* возрастающих функций $g(x) = \log_2(\sqrt{x} + 1)$ и $h(x) = \log_3(x + 2)$.

Кроме того,

$$f(1) = \log_2 2 \cdot \log_3 3 = 1.$$

Следовательно, при $x > 1$ имеем $f(x) > 1$, а при $x < 1$ будет $f(x) < 1$. Учитывая область определения, получаем, что решением неравенства служит промежуток $x \in [0, 1]$.

ОТВЕТ: $x \in [0, 1]$.

14. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, h_a, h_b, h_c — длины высот, опущенных на эти стороны. Тогда верны следующие равенства:

$$2S_{ABC} = r(a + b + c) = ah_a = bh_b = ch_c.$$

Так как все высоты меньше 1, то выполнены неравенства:

$$r(a + b + c) < a, \quad r(a + b + c) < b, \quad r(a + b + c) < c.$$

Сложив эти три неравенства и сократив на $a + b + c$, получим $3r < 1 \iff r < \frac{1}{3}$. □

16. ОТВЕТ: 90° .

ВМК, 2000 г.

1. ОТВЕТ: $\{(0, 0); (-2, -2); (0, -1); (-2, -1)\}$.

2. Обозначим данное натуральное число n^2 . Так как n^2 оканчивается на 5, то оно делится на 5, но не делится на 10. Следовательно, и n делится на 5, но не делится на 10. Поэтому n имеет вид $n = 5(2k + 1)$, где k — натуральное число. Тогда

$$n^2 = 25(4k^2 + 4k + 1) = 100k^2 + 100k + 25 = 100(k^2 + k) + 25.$$

Значит, третья справа цифра числа n^2 равна последней цифре числа $k^2 + k$. Ясно, что $k^2 + k$ всегда является четным, поэтому четна и его последняя цифра. □

3. ОТВЕТ: -1 .

4. Согласно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом, имеем:

$$\sqrt{\lg 7 \cdot \lg 13} \leq \frac{\lg 7 + \lg 13}{2} = \frac{1}{2} \lg 91 = \lg \sqrt{91} < \lg 10 = 1.$$

ОТВЕТ: Второе число больше.

5. Возведем данное равенство в квадрат:

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1,96 \Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1,96,$$

откуда с учетом тождества $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ и формулы синуса двойного угла получаем

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 0,96.$$

ОТВЕТ: $0,96$.

6. ОТВЕТ: $\pi/4$.

7. ОТВЕТ: $[\sin(\cos 1), \sin 1]$.

8. ОТВЕТ: $\sqrt{2}$.

10. ОТВЕТ: $x = \arctg \frac{1}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$.

11. Сделаем замену $t = x^2 \geq 0$, тогда уравнение примет следующий вид:

$$2^{t^3} + 2^t = 2^{t^2+1}. \quad (*)$$

Применим к числам 2^{t^3} и 2^t неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$2^{t^3} + 2^t \geq 2\sqrt{2^{t^3} \cdot 2^t} = 2^{\frac{t^3+t}{2}+1}.$$

Следовательно, если t — решение уравнения (*), то выполнено следующее неравенство:

$$2^{t^2+1} \geq 2^{\frac{t^3+t}{2}+1} \iff t^2+1 \geq \frac{t^3+t}{2}+1 \iff$$

$$\iff t(t-1)^2 \leq 0 \iff \begin{cases} t=0 \\ t=1, \end{cases} \text{ так как } t \geq 0.$$

Проверкой убеждаемся, что и $t=0$, и $t=1$ удовлетворяют уравнению (*). Следовательно, решениями исходного уравнения являются $x=0$, $x=\pm 1$.

ОТВЕТ: $x=0$, $x=\pm 1$.

12. ОТВЕТ: $x=-10$, $x=-1$.

13. ОТВЕТ: $x=\frac{1}{10}$, $x=5$.

14. ОТВЕТ: $x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. ОТВЕТ: $x=\frac{1}{3}$.

16. Заметим, что $x=0$ не является решением уравнения. Сделав замену $y=-\frac{1}{x}$, получим:

$$-\frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{3} \iff y^3 - 3y^2 + 3y - 3 = 0 \iff$$

$$(y-1)^3 = 2 \iff y-1 = \sqrt[3]{2} \iff y = 1 + \sqrt[3]{2} \iff x = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}.$$

ОТВЕТ: $x = -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}$.

17. Имеем:

$$\begin{cases} x+y=4-z, \\ 2xy=16+z^2. \end{cases}$$

Согласно теореме, обратной к теореме Виета, x и y являются корнями t_1, t_2 квадратного уравнения

$$t^2 + (z-4)t + \frac{16+z^2}{2} = 0.$$

Вычислим его дискриминант:

$$D = (z - 4)^2 - 2(16 + z^2) = -z^2 - 8z - 16 = -(z + 4)^2.$$

Уравнение имеет корни, если только дискриминант неотрицателен. В нашем случае это возможно лишь при $z = -4$, тогда

$$t^2 - 8t + 16 = 0 \iff t = 4.$$

Значит, решением исходной системы является тройка $(4, 4, -4)$.

ОТВЕТ: $\{(4, 4, -4)\}$.

19. Числа a, b, c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда

$$b = \frac{a + c}{2} \iff 2b = a + c.$$

Имеем (область определения учтем потом):

$$2 \lg(3^x - 10) = \lg 3 + \lg(3^x - 4) \iff \lg((3^x - 10)^2) = \lg(3 \cdot (3^x - 4))$$

$$\iff (3^x - 10)^2 = 3(3^x - 4) \iff 3^{2x} - 23 \cdot 3^x + 112 = 0.$$

Сделав замену $t = 3^x$, получим уравнение

$$t^2 - 23t + 112 = 0 \iff t = 7 \text{ или } t = 16.$$

При $t = 7$ имеем

$$3^x - 10 = t - 10 = 7 - 10 = -3 < 0,$$

и выражение $\lg(3^x - 10)$ не определено.

При $t = 16$ имеем

$$3^x - 10 = t - 10 = 16 - 10 = 6 > 0, \quad 3^x - 4 > 0.$$

Поэтому значение $t = 16$ подходит и, сделав обратную замену, получаем:

$$t = 16 \iff 3^x = 16 \iff x = \log_3 16 = 4 \log_3 2.$$

ОТВЕТ: $x = 4 \log_3 2$.

20. ОТВЕТ: $\frac{a}{2}$.

21. ОТВЕТ: 3.

22. ОТВЕТ: a^2 .

23. ОТВЕТ: 5.

24. Пусть S — площадь треугольника, тогда верны следующие равенства:

$$a + h_a = a + \frac{2S}{a}, \quad b + h_b = b + \frac{2S}{b}.$$

Согласно условию задачи имеем:

$$a + h_a \leq b + h_b \iff a + \frac{2S}{a} \leq b + \frac{2S}{b} \iff$$

$$a - b + 2S \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \leq 0 \iff (a - b) \left(1 - \frac{2S}{ab} \right) \leq 0.$$

Так как $a > b$, то полученное неравенство равносильно неравенству

$$1 - \frac{2S}{ab} \leq 0 \iff \frac{ab}{2} \leq S = \frac{ab}{2} \sin \gamma,$$

где γ — величина угла между сторонами a и b . Значит, $\sin \gamma = 1$ и $\gamma = \frac{\pi}{2}$, то есть треугольник прямоугольный. Третья сторона (гипотенуза) равна $\sqrt{a^2 + b^2}$.

ОТВЕТ: $\sqrt{a^2 + b^2}$.

25. ОТВЕТ: 45° и 45° .

26. ОТВЕТ: 28.

27. ОТВЕТ: $1 : 1 : 1$.

28. ОТВЕТ: $r_1 = \frac{ab}{2c}$, $r_2 = \frac{ac}{2b}$, $r_3 = \frac{bc}{2a}$.

ВМК, 2001 г.

1. ОТВЕТ: Числа равны.
2. ОТВЕТ: 53010, 53910 и 53415.
3. ОТВЕТ: 10, 11, 12, 13, 14.
4. Из первого уравнения системы имеем:

$$k^2 + l = m^2 \Rightarrow k^2 < m^2 \Rightarrow k < m.$$

Аналогично, из второго уравнения системы получаем, что $l < n$.
Пусть

$$m = k + a, \quad n = l + b,$$

где a, b — натуральные числа. Тогда выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} l &= m^2 - k^2 = (k + a)^2 - k^2 = 2ka + a^2, \\ k &= n^2 - l^2 = (l + b)^2 - l^2 = 2lb + b^2 = \\ &= 2(2ka + a^2)b + b^2 = 4kab + 2a^2b + b^2 \geq 4k + 3 > k. \end{aligned}$$

Полученное неравенство $k > k$ не имеет решений, поэтому и исходная система решений не имеет.

ОТВЕТ: Нет решений.

5. Заметим, что если тройка (p, q, r) удовлетворяет условию задачи, то и для тройки (q, p, r) данное равенство также выполняется.

Предположим, что оба числа p и q нечетны. Тогда $p^q + q^p = r$ четно. Однако r простое, значит, $r = 2$. Легко видеть, что равенство $p^q + q^p = 2$ при натуральных p, q выполняется лишь при $p = q = 1$, однако число 1 не является простым.

Итак, хотя бы одно из чисел p и q четно (и, значит, равно 2). Если $p = q = 2$, то $p^q + q^p = 2^2 + 2^2 = 8$ не является простым числом. Пусть $p = 2 \neq q$. Заметим, что при $q = 3$

$$2^3 + 3^2 = 17 \text{ — простое число,}$$

то есть тройка $(2, 3, 17)$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $q > 3$. Так как q простое нечетное, то при делении на 6 оно может давать остаток 1 или 5, тогда q^2 при делении на 6 дает остаток 1. Рассмотрим остатки от деления на 6 степеней двойки. Они периодически повторяются: 2, 4, 2, 4, Если q дает при делении на 6 остаток 1 или 5, то 2^q дает остаток 2. Следовательно, $2^q + q^2 = r$ дает остаток 3 при делении на 6 и поэтому делится на 3. Это может быть только при $r = 3$. Однако ясно, что никакое $q > 3$ не удовлетворяет равенству $2^q + q^2 = 3$.

ОТВЕТ: $\{(2, 3, 17); (3, 2, 17)\}$.

6. Подставим в данное уравнение значение $x = 1 + \sqrt{3}$:

$$3(1 + \sqrt{3})^3 + m(1 + \sqrt{3})^2 + n(1 + \sqrt{3}) + 12 = 0 \iff$$

$$3(1 + 3\sqrt{3} + 9 + 3\sqrt{3}) + m(1 + 2\sqrt{3} + 3) + n(1 + \sqrt{3}) + 12 = 0 \iff$$

$$(42 + 4m + n) + (18 + 2m + n)\sqrt{3} = 0. \quad (*)$$

Если $18 + 2m + n \neq 0$, то получаем равенство

$$\sqrt{3} = \frac{42 + 4m + n}{18 + 2m + n},$$

что невозможно, так как $\sqrt{3}$ — иррациональное число, а число в правой части равенства — рациональное. Следовательно, $18 + 2m + n = 0$, и в силу равенства $(*)$ получаем, что $42 + 4m + n = 0$. Имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 18 + 2m + n = 0 \\ 42 + 4m + n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m = -12 \\ n = 6. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $m = -12, n = 6$.

7. ОТВЕТ: $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$.

8. ОТВЕТ: $\{(-4, 2, 0); (-2, 1, 2)\}$.

9. УКАЗАНИЕ: для произвольной функции $g(x)$ справедливо представление

$$g(x) = \left(\frac{g(x) + g(-x)}{2} \right) + \left(\frac{g(x) - g(-x)}{2} \right).$$

При этом первое слагаемое является четной функцией, а второе — нечетной.

ОТВЕТ:
$$f(x) = \left(\frac{3^x - 3^{-x}}{2 \sin x} \right) + \left(\frac{3^x + 3^{-x}}{2 \sin x} + \frac{x^2}{\sin x} \right).$$

10. ОТВЕТ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$

11. ОТВЕТ: $\alpha + \beta + \gamma = \pi n; n \in \mathbb{Z}.$

12. ОТВЕТ: $3/2.$

13. ОТВЕТ: $x = 0.$

14. Преобразуем данное выражение, пользуясь формулой “дополнительного аргумента”:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 6 \sin x \cos y + 2 \sin x \sin y + 3 \cos x = \\ &= 2\sqrt{10} \sin x \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \cos y + \frac{1}{\sqrt{10}} \sin y \right) + 3 \cos x = \\ &= 2\sqrt{10} \sin x \sin(y + \alpha) + 3 \cos x = \\ &= \sqrt{\left(2\sqrt{10} \sin(y + \alpha) \right)^2 + 3^2} \cdot \sin(x + \beta) = \\ &= \sqrt{40 \sin^2(y + \alpha) + 9} \cdot \sin(x + \beta), \end{aligned}$$

где α и β — такие углы, что

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\sin \beta = \frac{3}{\sqrt{40 \sin^2(y + \alpha) + 9}}, \quad \cos \beta = \frac{2\sqrt{10} \sin(y + \alpha)}{\sqrt{40 \sin^2(y + \alpha) + 9}}.$$

Так как x и y могут меняться независимо друг от друга, то

$$f_{\max} = \sqrt{40 + 9} = 7, \quad f_{\min} = -7.$$

ОТВЕТ: $f_{\max} = 7, f_{\min} = -7$.

15. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$3^{x-2}(3^3 + 3 + 1) = 5^{x-2}(5^2 + 5 + 1) \iff 3^{x-2} \cdot 31 = 5^{x-2} \cdot 31 \iff$$

$$3^{x-2} = 5^{x-2} \iff \left(\frac{3}{5}\right)^{x-2} = 1 \iff x = 2.$$

ОТВЕТ: $x = 2$.

16. ОТВЕТ: *Первое число больше.*

17. ОТВЕТ: $\left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right)\right\}$.

18. ОТВЕТ: *Внутренность двух углов, образованных пересекающимися прямыми $x = 0$ и $y = -x$, которая содержит ось OX .*

20. ОТВЕТ: $\frac{ac}{a+c}$.

21. ОТВЕТ: $\frac{R_1 R_2}{2(R_1 + R_2)}$.

22. ОТВЕТ: 10.

23. ОТВЕТ: *Не существует.*

24. ОТВЕТ: $DM : MD_1 = a : b$.

25. ОТВЕТ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$.

26. ОТВЕТ: $\sqrt{2} + 1$.

27. ОТВЕТ: *Окружность на плоскости π с центром в точке S и радиусом $\sqrt{ab}$.*

Геологический факультет, 1997-98 г.

1. ОТВЕТ: $x = \pm \sqrt{-\frac{\pi}{3} + \pi n}; n \in \mathbb{N}.$

2. ОТВЕТ: $x = \frac{\pi n}{4}, n \neq 4k; n, k \in \mathbb{Z}.$

3. ОТВЕТ: $x = \frac{\pi}{4} - 2 + \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}.$

4. ОТВЕТ: $x = 55.$

5. ОТВЕТ: $x \in (-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{5}}).$

6. ОТВЕТ: $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty).$

7. Заметим, что при всех x выполнено неравенство

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geq 1.$$

Значение $x = -1$ является решением исходного неравенства, так как

$$x^2 + 2x + 2 = 1, \quad (x^2 + 2x + 2)^x = 1.$$

При $x \neq -1$ имеем

$$x^2 + 2x + 2 > 1,$$

значит,

$$(x^2 + 2x + 2)^x \geq 1 \iff x > 0.$$

ОТВЕТ: $x \in \{-1\} \cup (0, +\infty).$

8. ОТВЕТ: $-\sqrt{2}/4.$

9. ОТВЕТ: $3/5.$

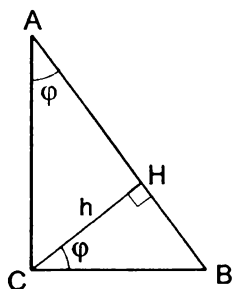
10. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}(-4)$. Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = -4 \text{ и } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Вычисляем искомое значение:

$$\cos(2 \operatorname{arctg}(-4)) = \cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{17} - 1 = -\frac{15}{17}.$$

ОТВЕТ: $-15/17.$



17. Введем обозначения (см. рисунок).
Так как $\angle CAH = \varphi$, имеем:

$$AC = \frac{h}{\sin \varphi}, \quad BC = \frac{h}{\cos \varphi}.$$

Искомая площадь при этом равна

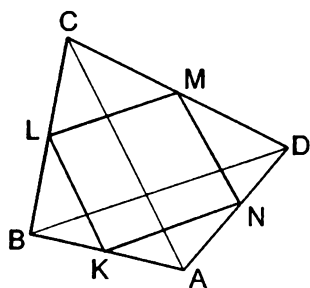
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{h^2}{2 \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{h^2}{\sin 2\varphi}.$$

ОТВЕТ: $S = \frac{h^2}{\sin 2\varphi}.$

18. ОТВЕТ: $\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{2(2a+b)}.$

19. ОТВЕТ: $AB = 2\sqrt{3}, AC = 4\sqrt{3}, BC = 6$ или $AB = 2\sqrt{3}, AC = 4\sqrt{3}, BC = 2\sqrt{21}.$

20. ОТВЕТ: 34.



21. Обозначим вершины исходного четырехугольника A, B, C, D , а вершины четырехугольника, полученного после деления сторон пополам — K, L, M, N (см. рисунок). Далее, пусть $S_{AKN} = S_1, S_{BKL} = S_2, S_{CLM} = S_3, S_{DMN} = S_4$. Так как KN является средней линией треугольника ABD , то $S_{ABD} = 4S_1$. Аналогично, для треугольников ABC, BCD, ACD находим:

$$S_{ABC} = 4S_2, \quad S_{BCD} = 4S_3, \quad S_{ACD} = 4S_4.$$

Складывая четыре полученных равенства, имеем:

$$2S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{ABC} + S_{BCD} + S_{ACD} = 4(S_1 + S_2 + S_3 + S_4).$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S = \frac{1}{2} S_{ABCD} + S,$$

откуда находим $S_{ABCD} = 2S$.

ОТВЕТ: $2S.$

Геологический факультет, 1999 г.

1. ОТВЕТ: $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z}.$

2. Имеем: $\sin(x-1) = \sin x - \sin 1 \iff$

$$\iff 2 \sin \frac{x-1}{2} \cos \frac{x-1}{2} = 2 \sin \frac{x-1}{2} \cos \frac{x+1}{2} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin \frac{x-1}{2} = 0 \\ \cos \frac{x-1}{2} = \cos \frac{x+1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \sin \frac{x}{2} = 0 \\ \sin \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi n. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $x = 2\pi n, x = 1 + 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z}.$

3. ОТВЕТ: $x = (1 + \sqrt{1 + \pi n})^2; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

4. Найдем область определения уравнения:

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-1) \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Пусть $x = 0$, тогда уравнение примет вид $1 = a$.

При $x = 1$ получим $-1 = a$.

ОТВЕТ: Если $a = 1$, то $x = 0$; если $a = -1$, то $x = 1$; при других a решений нет.

5. ОТВЕТ: $x = 0.$

6. ОТВЕТ: $x \in [0, 4].$

7. ОТВЕТ: $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1\right) \cup [9, +\infty).$

8. ОТВЕТ: $x \in (0, \frac{1}{\sqrt[4]{5}}] \cup (1, 5]$.

12. Ясно, что

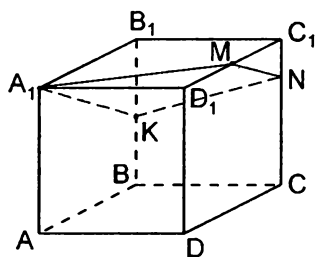
$$10^{1999} = \overbrace{10 \dots 0}^{1999 \text{ раз}} \Rightarrow 10^{1999} - 1 = \overbrace{9 \dots 9}^{1999 \text{ раз}},$$

откуда имеем:

$$10^{1999} - 1 - 1998 = \overbrace{9 \dots 9}^{1995 \text{ раз}} 8001.$$

Сумма цифр этого числа равна $9 \cdot 1995 + 8 + 1 = 17964$.

ОТВЕТ: 17964.



13. Пусть K , M — середины отрезков BB_1 , C_1D_1 (см. рисунок). Указанное сечение имеет с плоскостью AA_1B_1B общие точки A_1 и K , поэтому весь отрезок A_1K принадлежит сечению. Аналогично, сечению принадлежит отрезок A_1M . Далее, плоскости AA_1B_1B и DD_1C_1C параллельны, поэтому параллельны и

отрезки, по которым их пересекает секущая плоскость. Следовательно, секущая плоскость пересекает ребро CC_1 в такой точке N , что

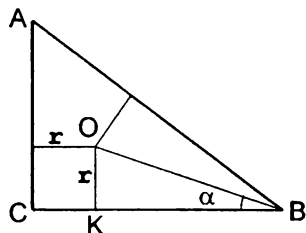
$$\frac{C_1N}{C_1M} = \frac{B_1K}{B_1A_1} = \frac{1}{2}.$$

Так как M — середина C_1D_1 , то точка N делит отрезок CC_1 в отношении 3 : 1.

Искомое сечение — четырехугольник A_1MNK . □

15. ОТВЕТ: 8.

16. Введем обозначения (см. рисунок), здесь O — центр вписанной окружности, K — точка касания окружности со стороной $BC = a$. Пусть $\angle OBC = \alpha$. Тогда из треугольника OBK находим:



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OK}{BK} = \frac{r}{a-r} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \frac{r}{a-r}}{1 - \frac{r^2}{(a-r)^2}} = \frac{2r(a-r)}{a(a-2r)}.$$

Следовательно, $b = AC = BC \operatorname{tg} \angle ABC = a \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r(a-r)}{a-2r}$.

Искомая площадь равна $S = \frac{1}{2}ab = \frac{ar(a-r)}{a-2r}$.

ОТВЕТ: $\frac{ar(a-r)}{a-2r}$.

17. ОТВЕТ: $S = r(2R + r)$.

18. Пусть γ — угол между сторонами a , b . Тогда выполнены следующие неравенства:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \leq \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Для справедливости формулы $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ оба неравенства должны обращаться в равенства. Первое неравенство обращается в равенство только при $\sin \gamma = 1$, то есть $\gamma = \pi/2$. Второе неравенство обращается в равенство лишь при $a = b$. Таким образом, треугольник с заданным свойством — прямоугольный равнобедренный.

ОТВЕТ: *Прямоугольный равнобедренный треугольник.*

Геологический факультет, 2000 г.

1. ОТВЕТ: -1 .

2. Из периодичности функции $y = \cos x$ и формул приведения имеем:

$$\cos \frac{35\pi}{11} = \cos \left(3\pi + \frac{2\pi}{11} \right) = -\cos \frac{2\pi}{11} = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{22} \right) = -\sin \frac{7\pi}{22}.$$

Далее получаем:

$$\arcsin \left(\cos \frac{35\pi}{11} \right) = \arcsin \left(-\sin \frac{7\pi}{22} \right) = -\arcsin \left(\sin \frac{7\pi}{22} \right) = -\frac{7\pi}{22}$$

(здесь мы воспользовались равенством $\arcsin(\sin x) = x$, справедливым при $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). Следовательно,

$$\frac{22}{\pi} \arcsin \left(\cos \frac{35\pi}{11} \right) = -7.$$

ОТВЕТ: -7 .

3. ОТВЕТ: $\sqrt[4]{8}$.

4. ОТВЕТ: $-1/3$.

5. ОТВЕТ: *Числа равны.*

6. ОТВЕТ: *Первое число больше.*

7. ОТВЕТ: $x = -2$.

8. ОТВЕТ: $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

9. Сделаем замену $t = \sin x + \cos x$, тогда $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ и данное уравнение примет следующий вид:

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1 \iff t + \frac{t^2 - 1}{2} = 1 \iff$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \iff t = -3 \text{ или } t = 1.$$

При $t = -3$ получаем уравнение $\sin x + \cos x = -3$, которое в силу неравенств $\sin x \geq -1$, $\cos x \geq -1$ решений не имеет.

При $t = 1$ имеем:

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x = 1 &\iff \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \iff \\ \iff \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}\end{aligned}$$

ОТВЕТ: $x = 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$.

10. ОТВЕТ: $x \in (1, 243)$.

11. ОТВЕТ: $a = -4$.

12. Пусть x_1, x_2 — корни данного уравнения. Согласно теореме Виета, имеем:

$$x_1 + x_2 = -(a - 34), \quad x_1 x_2 = -35a - 36.$$

Расстояние между корнями равно $|x_1 - x_2|$. Расстояние минимально тогда и только тогда, когда минимален квадрат расстояния. Выразим его через a :

$$\begin{aligned}|x_1 - x_2|^2 &= x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \\ &= (34 - a)^2 - 4(-35a - 36) = a^2 + 72a + 1300.\end{aligned}$$

Минимум этого выражения достигается в вершине параболы, т.е. при $a = -36$.

Подчеркнем, что необходимо проверить, имеет ли исходное уравнение решения при найденном $a = -36$. Имеем:

$$x^2 - 70x + 1224 = 0, \quad D = 70^2 - 4 \cdot 1224 = 4900 - 4896 = 4.$$

Так как дискриминант положителен, то уравнение имеет корни и, значит, найденное $a = -36$ действительно искомое значение.

ОТВЕТ: $a = -36$.

15. ОТВЕТ: $[-8, -\sqrt{15}]$.

17. ОТВЕТ: $T = 105\pi$.

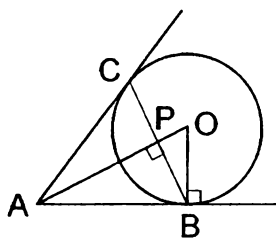
18. Так как

$$S_n = a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n,$$

то верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (2n^2 + 3n) - (2(n-1)^2 + 3(n-1)) = \\ &= (2n^2 + 3n) - (2n^2 - n - 1) = 4n + 1. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $a_n = 4n + 1$.



21. Пусть O — центр окружности, P — точка пересечения отрезков AO и BC (см. рисунок).

Треугольник ABO прямоугольный, BP — его высота. По теореме Пифагора имеем:

$$OB = \sqrt{AO^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Из равенства

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} AB \cdot OB = \frac{1}{2} AO \cdot BP$$

находим $BP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно, $BC = \sqrt{3}$.

ОТВЕТ: $\sqrt{3}$.

22. ОТВЕТ: $8/5$.

Геологический факультет, 2001 г.

1. ОТВЕТ: 211/990.

2. ОТВЕТ: 10.

3. ОТВЕТ: Второе число больше.

4. ОТВЕТ: Второе число больше.

5. ОТВЕТ: $\{(0, 0); (2, 4); (-1, 1); (3, 3)\}$.

6. Так как x должно быть целым и удовлетворять условию $|x| \leq 1$, то возможны три случая: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

1) Пусть $x = -1$, тогда имеем:

$$-y = 1 + \frac{y^2}{4} \iff y^2 + 4y + 4 = 0 \iff (y + 2)^2 = 0 \iff y = -2.$$

2) Пусть $x = 0$, тогда $y = 0$.3) $x = 1$, тогда имеем:

$$y = 1 + \frac{y^2}{4} \iff y^2 - 4y + 4 = 0 \iff y = 2.$$

ОТВЕТ: $\{(0, 0); (1, 2); (-1, -2)\}$.7. ОТВЕТ: $y_{\min} = 0$.8. ОТВЕТ: $x = -0,9$.

9. Область определения данного уравнения $x > 0$. Поэтому возможна замена переменной $x = 10^t$. При этом уравнение примет вид:

$$5^{\lg 10^t} = 50 - (10^t)^{\lg 5} \iff 5^t = 50 - (10^{\lg 5})^t \iff$$

$$\iff 5^t = 50 - 5^t \iff 5^t = 25 \iff t = 2 \iff x = 100.$$

ОТВЕТ: $x = 100$.

10. ОТВЕТ: $x = 2\pi n, x = \pi \pm \arccos \frac{3}{5} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$.

11. ОТВЕТ: $x \in (2, \frac{7+\sqrt{17}}{4}]$.

12. ОТВЕТ: $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -\frac{1}{2}] \cup (1, 2) \cup (2, 3)$.

13. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{x} = -x^2 + 8x - 15.$$

Найдем значения x , при которых правая часть неотрицательна:

$$-x^2 + 8x - 15 \geq 0 \iff x \in [3, 5].$$

Таким образом, при $x < 3$ и при $x > 5$ выполнены следующие неравенства:

$$-x^2 + 8x - 15 < 0 \leq \sqrt{x},$$

поэтому значения x из указанных промежутков не могут быть решениями данного уравнения.

При $x \in [3, 5]$ в силу возрастания функции $\sqrt{x}$ имеем $\sqrt{x} \geq \sqrt{3}$. Максимальное значение правой части достигается при $x = 4$ и равно 1, так как

$$-x^2 + 8x - 15 = -(x - 4)^2 + 1.$$

Следовательно, при $x \in [3, 5]$ выполнены неравенства

$$\sqrt{x} \geq \sqrt{3} > 1 \geq -x^2 + 8x - 15,$$

и значения x из этого промежутка также не могут быть решениями исходного уравнения.

ОТВЕТ: *Не имеет.*

14. ОТВЕТ: *Имеет.*

15. Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Так как функции $\sin x$ и $\cos x$ периодичны с периодом 2π , то достаточно вычислить значение выражения $\sin x + \sqrt{2} \cos x$ при $x = \frac{\pi}{6}$ и при $x = \frac{5\pi}{6}$.

Если $x = \frac{\pi}{6}$, то имеем:

$$\sin x + \sqrt{2} \cos x = \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{6}}{2}.$$

При $x = \frac{5\pi}{6}$ получаем:

$$\sin x + \sqrt{2} \cos x = \sin \frac{5\pi}{6} + \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{6}}{2}.$$

ОТВЕТ: $\frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}.$

16. ОТВЕТ: 1 или $\sqrt{2}.$

19. ОТВЕТ: $\pi.$

20. ОТВЕТ: 2.

21. ОТВЕТ: $\frac{15\sqrt{2}}{8}.$

22. ОТВЕТ: $\frac{15}{\sqrt{34}}.$

23. Так как, согласно условию задачи,

$$\angle A + \angle B = \angle C \quad \text{и} \quad \angle A + \angle B + \angle C = \pi,$$

то $\angle C = \frac{\pi}{2}$, то есть треугольник ABC прямоугольный, при этом AC и BC являются его катетами. По теореме Пифагора находим:

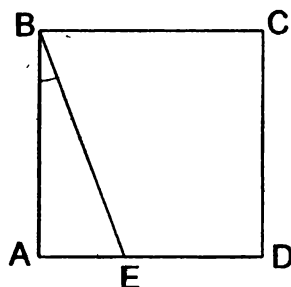
$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

ОТВЕТ: 5.

24. ОТВЕТ: $\sqrt{10}.$

25. Можем считать, что длина стороны квадрата равна единице. Тогда имеем (см. рисунок):

$$AE = AB \operatorname{tg} \angle ABE = \frac{1}{\sqrt{2}},$$



следовательно,

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot AE = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Так как

$$S_{BCDE} = S_{ABCD} - S_{ABE} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

то окончательно получаем:

$$\frac{S_{ABE}}{S_{BCDE}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{(2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1)} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{7}.$$

ОТВЕТ: $\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$.

Учебное пособие

**Юрий Викторович Садовничий
Ольга Дмитриевна Фролкина**

МАТЕМАТИКА

Тесты для старшеклассников и абитуриентов

Серия «В помощь абитуриенту»

Выпускающий редактор *Васильева И.В.*
Компьютерный набор *авторов*
Верстка *Фролкина О.Д.*

ИД № 00545 от 06.12.1999

**Издательство
Учебно-научного центра довузовского образования**

117246, Москва, ул. Обручева, 55А
119992, Москва, Ленинские горы, ГЗ МГУ, Ж-105а
Тел./факс (095) 718-6966, 939-3934
e-mail: izdat@abiturcenter.ru
<http://www.abiturcenter.ru>

**Издательская фирма
«Физико-математическая литература» (ФИЗМАТЛИТ)**
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864, Москва, Профсоюзная ул., 90

Гигиенический сертификат № 77.99.2.925.П.9139.2.00 от 24.02.2000
Налоговые льготы - Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 1 - 953000

Подписано в печать 24.01.2003 г. Формат 60×90/16
Бумага газетная. Усл. печ. л. 13
Тираж 5000 экз. Заказ № 0301360.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат».
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97.

