## Олимпиада «Высшая проба» по математике

## 11 класс, 2012 год

Задачи 1—4 оценивались в 20 баллов, задача 5 — в 16 баллов, задача 6 — в 24 балла. Для получения диплома нужно было набрать от 30 баллов.

- **1.** Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b такие, что  $2a^2+3b^2$  делится на 2a+3b.
- **2.** Найдите максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость графики десяти квадратичных функций  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .
- **3.** При каком значении параметра a график многочлена  $x^4 6x^3 + 12x^2 + ax$  симметричен относительно прямой x = c для какого-нибудь значения константы c?
- 4. В пространстве выбраны четыре точки, все координаты каждой из которых делятся на 3, причём эти точки не лежат в одной плоскости. Какое минимальное число точек, все координаты которых чётны, может содержаться в тетраэдре, вершинами которого являются выбранные четыре точки? (Содержаться значит лежать внутри, на грани, на ребре или в вершине.)
- **5.** Описанный четырёхугольник ABCD делится диагональю AC на два подобных, но не равных треугольника. Чему может быть равна длина диагонали AC, если длины сторон AB и CD равны 5 и 10 соответственно?
- 6. В одной из вершин правильного 2n-угольника  $(n \ge 2)$  поставлено число 1. Для данной расстановки чисел  $2, 3, \ldots, 2n$  в остальные вершины 2n-угольника поставим на каждой его стороне знак +, если число на конце стороны (при движении по часовой стрелке) больше числа на её начале, и знак -, если оно меньше. Докажите, что модуль разности между числом расстановок чисел  $2, 3, \ldots, 2n$  с чётным количеством плюсов на сторонах и числом расстановок с нечётным количеством плюсов равен числу расстановок, в которых плюсы и минусы чередуются, при (а) n = 3; (б) n = 4; (в) произвольном n.

## Ответы

- **1.** (1,1), (6,1), (3,8), (9,4)
- **2.** 101.
- **3.** a = -9.
- **4.** Одна.
- **5.**  $5\sqrt{2}$  или 6.