Олимпиада «Высшая проба» по математике

10 класс, 2015 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 65 баллов.

1. Найдите все тройки действительных чисел x, y, z, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x^3y^3z^3 = 1, \\ xy^5z^3 = 2, \\ xy^3z^5 = 3. \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt[6]{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[6]{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[6]{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[6]{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right)}$$

2. Дан треугольник ABC, $\angle B = 90°$. На сторонах AC, BC выбраны точки E и D соответственно такие, что $AE = EC$, $\angle ADB = \angle EDC$. Найти отношение $CD : BD$.

$\boxed{2 : 1}$

3. В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты ($\mathcal{E}$) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\text{Б} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{6}}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \text{Б} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{11}}{\overset{11}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{15}}{\overset{10}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{7}}{\overset{5}{\rightleftarrows}} \text{Б}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов а один кокос — на $1/15$ доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять $101/43$ енота на $606/43$ банана). Обмены $\$ \rightleftarrows \mathcal{E}$ в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

$\boxed{\text{Может}}$

4. Даны три точки A, B, C, образующие треугольник с углами $30°$, $45°$, $105°$. Выбираются две из этих точек, и проводится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, после чего третья точка отражается относительно этого серединного перпендикуляра. Получаем четвёртую точку D. С получившимся набором из 4 точек осуществляется та же процедура — выбираются две точки, проводится серединный перпендикуляр и все точки отражаются относительно него. Какое наибольшее количество *различных* точек можно получить в результате многократного повторения этой процедуры?

$\boxed{12}$

5. Приведите пример функции $f(x)$, для которой выполняются все три перечисленных ниже условия:

- область определения функции $f(x)$ — множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$;
- при любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = b$ имеет ровно одно решение;
- при любом $a > 0$ и любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = ax + b$ имеет не менее двух решений.

$f(x) = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$; $f(0) = 0$

6. а) Найти хотя бы два различных натуральных числа n, для каждого из которых число $n^2 + 2015n$ является точным квадратом натурального числа.

б) Найти *количество всех* натуральных чисел n, для каждого из которых число $n^2 + 2015n$ является точным квадратом натурального числа.

а) 496 и 1007^2; б) 13