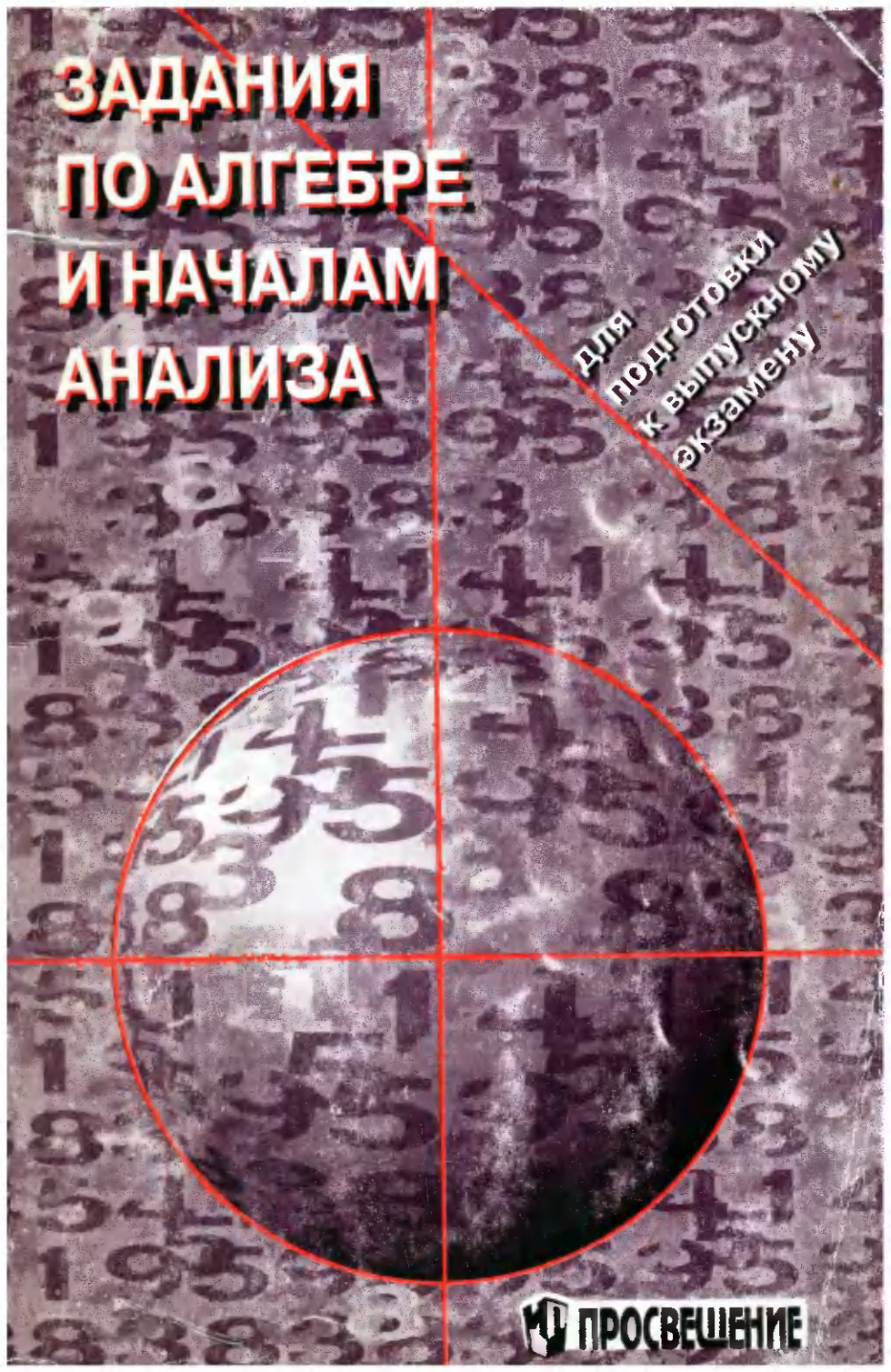
ЗАДАНИЯ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ВЫПУСКНОМУ ЭКЗАМЕНУ



ПРОСВЕЩЕНИЕ

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
З-15

Авторы: *Е. А. Семенко, С. Д. Некрасов, Г. Н. Титов, Т. В. Мостовая, И. В. Васильева, В. Н. Сукманюк, Р. Б. Копелевич, Р. В. Антонюк*

Рецензенты:
учитель математики Лицея «Физико-техническая школа» Санкт-Петербурга *В. И. Рыжик;*
доцент, зав. кафедрой КубГУ, канд. физ.-мат. наук *А. М. Скряго;*
доцент КубГУ, канд. физ.-мат. наук *Г. К. Антонюк*

З-15 **Задания** для подготовки к выпускному экзамену по алгебре и началам анализа: Кн. для учащихся 11 кл. общеобразоват. учреждений/Е. А. Семенко, С. Д. Некрасов, Г. Н. Титов и др. — М.: Просвещение, 1997. —191с.: ил.— ISBN 5-09-007495-X.

Сборник составлен в соответствии с действующими учебными программами и требованиями к математической подготовке выпускников общеобразовательной школы. В него включено около 2500 заданий для подготовки учащихся к итоговой аттестации по алгебре и началам анализа, а также ответы к ним.

Книга, адресованная учащимся старших классов, может быть полезна учителям математики, методистам, руководителям школ и родителям.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72+22.161я72

ISBN 5-09-007495-X

© Издательство «Просвещение», 1997
Все права защищены

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник предназначен для подготовки к письменному экзамену по алгебре и началам анализа учащихся 11-го класса общеобразовательных учреждений, в том числе классов с профилированным обучением и классов с углубленным изучением математики.

В сборник включено около 2500 заданий, позволяющих проверить подготовку учащихся по всем основным разделам курса «Алгебра и начала анализа». Сборник состоит из трех разделов (в соответствии с ныне существующими федеральными учебными программами по математике: общеобразовательный курс, профилированное обучение (курс А, курс В) и углубленное изучение математики). Каждый раздел имеет шесть подразделов:

1. Числа и тождественные преобразования.
2. Уравнения и системы уравнений.
3. Неравенства и системы неравенств.
4. Функции, их свойства и графики.
5. Производная и ее применение.
6. Первообразная и интеграл.

Сборник составлен в соответствии с действующими учебными программами и требованиями к математической подготовке выпускников общеобразовательной школы.

Задания сборника, не помеченные знаком (*), соответствуют минимальным требованиям к уровню обученности учащихся, который предусмотрен государственными учебными программами. Учащиеся, претендующие на оценку «хорошо» или «отлично», должны уметь выполнять задания со знаком (*).

Задания подобраны так, что при их решении могут применяться разнообразные идеи и методы. Используются также и разнообразные формы заданий для традиционных, по сути, упражнений, что способствует творческому осмыслению знаний, умений и навыков выпускников средних школ различного профиля.

Содержание сборника дает возможность скомпоновать проверочную работу из шести заданий, подобную экзаменационной работе. Составляя работу, можно использовать, например, следующую схему: для учащихся, обучающихся по программе *профилированное обучение "Курс А"* (преподавание по предмету ведется 3 ч в неделю), задания выбираются из раздела 1 — по одному из каждого подраздела — так, чтобы в работу (в соответ-

ствии с требованиями к обученности) обязательно были включены задания на использование свойств различных элементарных функций, изучение которых предусмотрено программой. При этом первые три задания выбираются из любых подразделов среди заданий, не помеченных знаком (*), а четвертое, пятое и шестое выбираются из заданий, помеченных знаком (*), из оставшихся подразделов раздела 1 или среди заданий, не помеченных (*), из соответствующих подразделов раздела 2.

При составлении работы для обучающихся по программе *общеобразовательный курс* (преподавание по предмету ведется 4,5 ч и 4 ч в неделю) и *профилированное обучение «Курс В»* (преподавание по предмету ведется 5 ч в неделю) задания выбираются из раздела 2 аналогично процедуре, описанной выше, если раздел 1 заменить на 2, а 2 на 3. При этом, выбирая задания из раздела 3, следует использовать те задания, которые отмечены знаком (°).

При составлении работы для обучающихся по программе *углубленное изучение математики* (преподавание по предмету ведется 8 ч в неделю) задания выбираются из раздела 3, по одному из каждого подраздела, причем 3 задания из 6 должны быть выбраны с пометкой (*).

Решение задач с формулировкой «*вычислите*» должно производиться с использованием соответствующих формул и операций, без применения вычислительных средств (калькуляторов, логарифмической линейки и др.).

Данный сборник снабжен ответами. Ответы для заданий на решение уравнений вида $\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(f(x)\right)^{h(x)}$ приведены в соответствии со следующими замечаниями. Корнями данного уравнения являются решения смешанной системы $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x) \end{cases}$ и корни уравнения $f(x) = 1$ на области определения функций g и h. Функция вида $f(x)^{g(x)}$ определена для всех x, при которых $f(x) > 0$.

Авторы сборника выражают признательность кандидатам физико-математических наук, доцентам КубГУ А.М. Скряго и Г.К. Антонюку, учителям А.С. Рудман и Н.И. Кряжевских за участие в обсуждении материалов сборника и благожелательную критику, способствовавшую улучшению настоящей рукописи, а также благодарят учителей Краснодарского края Р.А. Багиева, Э.В. Ниязову, В.Ф. Скряго, Л.Г. Толокину, Н.А. Юнову, Т.С. Криштафович, Н.М. Захарову, Н.М. Орел, Р.П. Лысенко,

Н.В. Шеляг, В.П. Петрухину, В.В. Гурееву, М.С. Дикого и др. за участие в подготовке сборника.

Адресуя сборник учителям и учащимся, а также руководителям школ, методистам, авторский коллектив обращается к ним с просьбой принять активное участие в обсуждении материалов сборника, что поможет повысить его качество при последующих возможных изданиях. Свои отзывы, пожелания, замечания, оригинальные задания просим направлять по адресу:

350080, г. Краснодар, ул. Сормовская, 167, кафедра физико-математических дисциплин и информатики КЭЦРО (к.23), телефон: 8(8612)-360773.

Авторы

РАЗДЕЛ 1

1.1. Числа и тождественные преобразования

Вычислите (1.1.01—1.1.12).

1.1.01. а) $\left(64^{\frac{2}{3}}+125^{\frac{1}{3}}-625^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$; б) $\left(81^{\frac{1}{4}}+256^{\frac{1}{4}}-64^{\frac{1}{3}}\right)^{2}$.

1.1.02. а) $\left(5+17^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}:\left(5-\sqrt{17}\right)^{\frac{1}{3}}$; б) $\left(\sqrt{13}+7\right)^{\frac{1}{2}}:\left(7-\sqrt{13}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

1.1.03. а) $\left(17-\sqrt{46}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(17+\sqrt{46}\right)^{\frac{1}{5}}$; б) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\left(11+57^{0,5}\right)^{\frac{1}{3}}$.

1.1.04. а) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\right)^{-0,5}-7,5\cdot 4^{-\frac{3}{2}}-(-2)^{-4}+81^{0,25}$;

б) $0,027^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0,75}-3^{-1}+5,5^{0}$.

1.1.05. а) $\left(625^{-\frac{1}{4}}\cdot 75^{0,5}-8,7^{0}\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,5}+1\right)$;

б) $\left(256^{-\frac{1}{4}}\cdot 48^{\frac{1}{2}}+9,3^{0}\right)\cdot\left(3^{\frac{1}{2}}-1\right)$.

1.1.06. а) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-2^{0,2}\cdot\frac{1-2^{0,5}}{2^{-0,3}}$; б) $3^{0,5}:\frac{3^{-0,2}}{1-3^{0,5}}+\frac{2}{1-\sqrt{3}}$.

1.1.07. а) $81^{0,75}\cdot 32^{-0,4}-8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}+256^{0,5}$;

б) $16^{-0,75}\cdot 25^{0,5}+64^{-\frac{1}{2}}\cdot 9^{1,5}-\left(\frac{1}{100}\right)^{-0,5}$.

1.1.08.* а) $0,5\cdot\sqrt[3]{96}\cdot\sqrt[3]{5+\frac{1}{3}}-\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$;

б) $2\cdot\sqrt[3]{100}\cdot\sqrt[3]{62,5}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{25}}-\frac{\sqrt[3]{0,25}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

1.1.09. а) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{3}-\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{-64}}$;

б) $\sqrt[3]{-5}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt{32}+\frac{\sqrt[5]{-729}}{\sqrt[5]{3}}$.

1.1.10. а) $\left(6-4\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}$;

б) $\left(3+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{0}\right)^{-1}+\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}-\frac{2}{5\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{5\pi}{4}$.

1.1.11. а) $\left(6^{2,5}\cdot 36^{-1}\right)^{2}-\left(5^{\frac{1}{4}}\cdot 25^{\frac{3}{8}}\right)^{\sin\frac{\pi}{2}}$;

б) $\left(27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{1,5}\right)^{2}-\left(7^{\frac{1}{4}}\cdot 49^{\frac{3}{8}}\right)^{\cos 2\pi}$.

1.1.12. а) $2^{\sin\frac{\pi}{2}}\cdot 3^{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}}\cdot 9^{\cos\frac{\pi}{3}}$; б) $4^{\sin\frac{\pi}{6}}\cdot 5^{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}\cdot 6^{\cos\frac{3\pi}{2}}$.

Найдите значения числовых выражений (1.1.13—1.1.14).

1.1.13. а) $\frac{\left(\sqrt[3]{16}\right)^{\frac{9}{2}}\cdot 32^{-0,2}}{2^{4}}$; б) $\frac{3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-0,5}\cdot\sqrt[4]{27}}{3^{-\frac{1}{4}}}$.

1.1.14. а) $4\cdot 0{,}0025^{-0,5}\cdot\sqrt[3]{0{,}001}$; б) $5\cdot\sqrt{0{,}0004}\cdot 0{,}216^{-\frac{1}{3}}$.

Упростите выражения (1.1.15—1.1.17).

1.1.15.* а) $\sqrt[4]{\left(3-\sqrt{5}\right)^{4}}-\sqrt{5}$; б) $\sqrt{\left(5-\sqrt{11}\right)^{2}}-2\sqrt{11}$.

1.1.16.* а) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-3\right)^{4}}-3\sqrt{5}+7$; б) $\sqrt[6]{\left(-\sqrt{14}+2\right)^{6}}+2\sqrt{14}-8$.

1.1.17. а) $\sqrt{\sqrt{67}-\sqrt{19}}\cdot\sqrt{\sqrt{67}+\sqrt{19}}$; б) $\sqrt{\sqrt{71}-\sqrt{21}}\cdot\sqrt{\sqrt{71}+\sqrt{21}}$.

Расположите в порядке возрастания числа (1.1.18—1.1.19).

1.1.18. а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}},\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}},\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$; б) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{5}},\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{5}},\left(\frac{9}{25}\right)^{-4}$.

1.1.19. а) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{1}{4}},\left(\frac{343}{125}\right)^{-\frac{1}{12}},\left(\frac{25}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{2}},\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{6}},\left(\frac{16}{9}\right)^{2}$.

1.1.20. Сравните значения выражений:

а) $100^{-\frac{1}{2}}\cdot 0{,}1^{-2}$ и $0{,}16^{\frac{1}{2}}\cdot 0{,}1^{-1}$;

б) $\left(1+\frac{24}{25}\right)^{\frac{1}{2}}:\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$ и $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-1}$.

Докажите тождества (1.1.21—1.1.25).

1.1.21.* а) $\dfrac{a^{-2}b^{-1}+a^{-1}b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}+a^{3}\left(a^{2}-2ab+b^{2}\right)^{-2}=\dfrac{3a^{2}b-3ab^{2}+b^{3}}{(a-b)^{4}}$;

б) $\dfrac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}}\cdot\left(a^{0}+\left(\dfrac{2bc}{b^{2}+c^{2}-a^{2}}\right)^{-1}\right)=\dfrac{(a+b+c)^{2}}{2bc}$.

1.1.22.* а) $\left(\left(b-\sqrt{a}\right)^{-1}+\left(b+\sqrt{a}\right)^{-1}\right)\cdot\left(\dfrac{a^{-2}\cdot b^{-1}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-2}}\right)^{-1}=2$;

б) $\left(\dfrac{1}{m-\sqrt{mn}}+\dfrac{1}{m+\sqrt{mn}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{m^{-2}\cdot n^{-2}}{n^{-2}m^{-1}-n^{-1}m^{-2}}\right)=\dfrac{1}{2}$.

1.1.23.* а) $\dfrac{1-x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2}{x^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{x^{-2}-x}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}=-\sqrt{x}\cdot\left(1+\dfrac{2}{x^{2}}\right)$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)=\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$.

1.1.24.* а) $\dfrac{a-1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{a^{0,5}+1}{a^{1,5}-1}+\dfrac{2}{a^{-0,5}}=a+1$;

б) $\dfrac{b-1}{b^{0,5}-1}\cdot\dfrac{b^{1,5}+1}{b-b^{0,5}+1}-\dfrac{2}{b^{-0,5}}=b+1$.

1.1.25.* а) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{a-b}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=a+b$;

б) $m+n-\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}{m+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}+n}=2m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}$.

Упростите выражения и найдите их значения при заданном значении переменной (1.1.26—1.1.29).

1.1.26.* а) $\dfrac{x^{\frac{8}{5}}-2x^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{3}{5}}-2x^{-\frac{2}{5}}}-0{,}04^{-0,5}+2(x+1)^{0}$ при $x=5$;

б) $\dfrac{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}}+0{,}25^{-1,5}-9(x-2)^{0}$ при $x=2$.

1.1.27.* а) $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}{m-n}$ при $m=16$, $n=25$;

б) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$ при $a=8$, $b=0{,}001$.

1.1.28.* а) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$ при $a=\dfrac{1}{16}$, $b=\dfrac{1}{81}$;

б) $\left(1+\dfrac{x^{-n}+y^{-n}}{x^{-n}-y^{-n}}\right)^{-2}$ при $x=3$, $y=0{,}75$, $n=0{,}5$.

1.1.29.* а) $\dfrac{m^{-\frac{3}{2}}-m^{-\frac{5}{2}}}{m^{-\frac{5}{2}}-m^{-3}}-\dfrac{m^{\frac{1}{2}}+m^{-1}}{m^{-\frac{1}{2}}+m^{-1}}$ при $m=0{,}81$;

б) $\dfrac{a^{-\frac{5}{4}}+a^{-2}}{a^{-\frac{7}{4}}+a^{-2}}-\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a^{-1}+a^{-\frac{3}{2}}}$ при $a=0{,}0625$.

Вычислите (1.1.30—1.1.34).

1.1.30. а) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos^2\pi$;

б) $\sin(-1{,}5\pi)+\cos 0-\operatorname{tg}^2\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

1.1.31. а) $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}-\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)}$; б) $\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

1.1.32.* а) $\operatorname{ctg}585^\circ-2\cos 1440^\circ+\sqrt{2}\sin 1125^\circ$;

б) $3\operatorname{tg}570^\circ-2\cos 1350^\circ+2\sin 1200^\circ$.

1.1.33.* а) $2\sin 750^\circ-\sin 1230^\circ+\operatorname{ctg}1395^\circ$;

б) $\operatorname{tg}585^\circ+\cos 1500^\circ-\cos 1080^\circ$.

1.1.34.* а) $\operatorname{tg}420^\circ+2\sin 870^\circ-2\cos 1410^\circ$;

б) $\operatorname{tg}930^\circ+\sin 1200^\circ-\cos 1770^\circ$.

Найдите (1.1.35—1.1.37).

1.1.35.* а) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ и α не лежит во второй четверти;

б) $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$ и α не лежит в третьей четверти.

1.1.36.* а) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$ и $\cos\alpha>0$;

б) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$ и $\sin\alpha<0$.

1.1.37.* а) $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Определите знак выражений (1.1.38—1.1.43).

1.1.38. а) $\sin 100^\circ \cdot \cos 200^\circ \cdot \operatorname{tg} 300^\circ$; б) $\cos 100^\circ \cdot \operatorname{tg} 200^\circ \cdot \sin 300^\circ$.

1.1.39. а) $\frac{\cos 200^\circ \cdot \operatorname{tg} 300^\circ}{\sin 400^\circ}$; б) $\frac{\sin 110^\circ \cdot \cos 220^\circ}{\operatorname{ctg} 330^\circ}$.

1.1.40. а) $\frac{\sin 100^\circ \cdot \cos 100^\circ}{\operatorname{tg} 200^\circ \cdot \operatorname{ctg} 300^\circ}$; б) $\frac{\sin 200^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\operatorname{tg} 300^\circ \cdot \operatorname{ctg} 100^\circ}$.

1.1.41. а) $\frac{\cos 1700^\circ \cdot \operatorname{tg} 3400^\circ}{\sin 5000^\circ}$; б) $\frac{\cos 1100^\circ \cdot \sin 2200^\circ}{\operatorname{tg} 2980^\circ}$.

1.1.42.* а) $\cos 20^\circ - \cos 120^\circ$; б) $\sin 120^\circ - \sin 240^\circ$.

1.1.43.* а) $\operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ$; б) $\operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 130^\circ$.

1.1.44.* Сравните значения выражений:

а) $2\sin^2(\pi + \alpha)$ и $(2 - \sin 2\alpha)$ при $\alpha = \frac{13\pi}{4}$;

б) $\cos 2\alpha$ и $\left(1 + 2\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)$ при $\alpha = -\frac{13\pi}{3}$.

Вычислите (1.1.45—1.1.69).

1.1.45. а) $7^{1-\log_7 2}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1+\log_{\frac{1}{3}} 4}$.

1.1.46. а) $5^{2-\log_5 7}$; б) $7^{2+\log_7 9}$.

1.1.47. а) $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} 9 - 2\log_{\frac{1}{2}} 12}$; б) $\sqrt{-2\log_{\frac{1}{3}} 15 + \log_{\frac{1}{3}} 25}$.

1.1.48. а) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$; б) $\frac{\log_3 3 + \log_3 12}{\log_3 12 - \log_3 2}$.

1.1.49. а) $3\log_6 3 + 0{,}5\log_6 4 - 2\log_6 3$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} 2 + 2\log_{\frac{1}{3}} 6 - 3\log_{\frac{1}{3}} 2$.

1.1.50. а) $\frac{3\log_3 2 - \log_3 24}{\log_3 3 + \log_3 9}$; б) $\frac{\log_2 2 + 3\log_2 0{,}25}{\log_2 14 - \log_2 7}$.

1.1.51. а) $\frac{5^{\log_5 2} + 10^{1-\lg 2}}{2^{\log_2 5}}$; б) $\frac{4^{\lg 1} - 8^{2-\log_8 32}}{\lg 2 + \lg 0{,}05}$.

1.1.52.* а) $\frac{\lg 36 - \lg 4}{1 + \lg 12 - \lg 40}$; б) $\frac{\lg 15 - \lg 45}{\lg 18 - \lg 2}$.

1.1.53. а) $\log_4 \log_{14} 196 + \log_5 \sqrt{5}$; б) $\log_4 \log_9 81 + \log_3 \sqrt{3}$.

1.1.54. а) $36^{\log_6 5} + 10^{1+\lg 2} - 3^{\log_9 36}$; б) $\left(81^{\frac{1}{4}-0{,}5\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

1.1.55. а) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-0{,}5} \cdot 3^{0{,}5\log_3 6} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\frac{7\pi}{3}$;

б) $\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5^{0{,}5\log_5 15} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos\frac{11\pi}{6}$.

1.1.56.* а) $\log_{\frac{1}{2}}\left(5 + 2\sqrt{6}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(5 - 2\sqrt{6}\right)$;

б) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right) + \log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)$.

1.1.57. а) $0{,}5\log_3 144 + \log_3 0{,}75$; б) $2\log_{\frac{1}{9}} 6 - \log_{\frac{1}{9}} 12$.

1.1.58. а) $\log_{0,2} 35 - 2\log_{0,2} 25\sqrt{7}$; б) $3\log_{0,1} 4 + 2\log_{0,1} \frac{5}{4}$.

1.1.59. а) $\log_5 \frac{25}{\sqrt[3]{5}} + \log_7 \sqrt[3]{49}$; б) $\log_6 \frac{36}{\sqrt[4]{6}} - \log_5 \sqrt[3]{25}$.

1.1.60. а) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 2)$; б) $\log_{\frac{1}{5}}(\log_3 6 \cdot \log_6 3)$.

1.1.61. а) $e^0 \cdot \log_2 \lg 100$; б) $\pi^0 \cdot \log_3 \lg 1000$.

1.1.62. а) $\left(1 + 4^{\log_2 \sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos\frac{13\pi}{6}$; б) $\left(9^{\log_3 \sqrt{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\frac{11\pi}{4}$.

1.1.63. а) $4\log_{\frac{1}{2}} 3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27 - 2\log_{\frac{1}{2}} 6$;

б) $\frac{5}{2}\log_{\frac{1}{3}} 2 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{3}} 8 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 6$.

1.1.64. а) $\frac{2}{3}\lg 0{,}001 + \lg\sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\lg\sqrt{100000}$;

б) $\frac{2}{3}\lg\sqrt{10000} - \lg\sqrt[3]{0{,}001} + \frac{5}{6}\lg 0{,}01$.

1.1.65.* а) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \cos\frac{\pi}{6} - \log_3 \sin\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\log_2\left(\log_3 \sin\frac{\pi}{3} - \log_3 \cos\frac{\pi}{3}\right)$.

1.1.66.* а) $\log_2 \sqrt{2\,\mathrm{tg}\frac{7\pi}{4} + 8\cos\frac{5\pi}{3}}$; б) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3\,\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4} + 2\sin\frac{7\pi}{6}}$.

1.1.67.* а) $\log_2\left(2\sin\frac{\pi}{8}\right)+\log_2\cos\frac{\pi}{8}$;

б) $\log_{\sqrt{2}}\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)+\log_{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8}$.

1.1.68.* а) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(\log_3\frac{1}{9}+4\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}\right)\right)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\left(\log_4\frac{1}{16}+\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}\right)\right)$.

1.1.69.* а) $\log_2\sin\frac{\pi}{6}+\log_2\cos\frac{7\pi}{4}+\log_2\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$;

б) $\log_{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{4}-\log_{\sqrt{2}}\cos\frac{5\pi}{3}-\log_{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

1.1.70. Выясните, что больше:

а) $\log_2\frac{1}{5}$ или $\log_3\frac{1}{5}$; б) $\log_{\frac{1}{3}}2$ или $\log_{\frac{1}{5}}2$.

Сравните числа (1.1.71—1.1.78).

1.1.71. а) $\left(2\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ и $\left(3\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(\sqrt{21}\right)^{-\frac{2}{7}}$ и $\left(2\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{7}}$.

1.1.72. а) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{5}{11}}$ и $\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{5}{11}}$; б) $0{,}432^{-\frac{1}{3}}$ и $0{,}433^{-\frac{1}{3}}$.

1.1.73. а) $\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[10]{3^3}}$ и $\frac{\sqrt[14]{3^9}}{\sqrt[9]{3^2}}$; б) $\frac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[6]{2}}$ и $\frac{\sqrt[4]{2^7}}{\sqrt[3]{2^4}}$.

1.1.74. а) $\log_5 175-\log_5 7$ и $\log_3 8+3\log_3\frac{3}{2}$;

б) $\log_3 2-\log_3 54$ и $\log_5 9+2\log_5\frac{1}{15}$.

1.1.75. а) $\log_3 4+\log_3 7$ и $\log_3(4+7)$;

б) $\log_{0,7}3+\log_{0,7}5$ и $\log_{0,7}(3+5)$.

1.1.76.* а) $\sqrt{15}$ и $9^{3\log_3 2+\log_{\frac{1}{3}}4}$; б) $\sqrt{65}$ и $4^{2\log_2 3+\log_{\frac{1}{2}}3}$.

1.1.77. а) $4^{\log_2 3-0,5}$ и $9^{\log_3 4}:2^{0,5\log_2 16}$;

б) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}4+0,5}$ и $2^{\log_2 7}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}$.

1.1.78.* а) $15^{\log_3 10}$ и $10^{\log_3 15}$; б) $6^{\log_2 18}$ и $18^{\log_2 6}$.

1.1.79. Определите знак разности:

а) $(0{,}04)^{1+\log_5 0{,}2} - \left(\sqrt{2}\right)^{\log_5 25}$; б) $5^{1-\log_{25} 4} - 81^{\log_9 3}$.

1.1.80. а) Найдите $\log_2 A$, если $A = \dfrac{\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}$.

б) Найдите $\log_3 A$, если $A = \dfrac{\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$.

1.2. Уравнения и системы уравнений

1.2.01. а) Найдите те решения уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$, для которых $\cos x > 0$.

б) Найдите те решения уравнения $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, для которых $\cos x < 0$.

1.2.02. а) Найдите те решения уравнения $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, для которых $\sin x < 0$.

б) Найдите те решения уравнения $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, для которых $\sin x > 0$.

1.2.03. а) Найдите те решения уравнения $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, для которых $\cos x < 0$.

б) Найдите те решения уравнения $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, для которых $\cos x > 0$.

1.2.04. а) Найдите те решения уравнения $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, для которых $\sin x < 0$.

б) Найдите те решения уравнения $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, для которых $\sin x > 0$.

Решите уравнения (1.2.05—1.2.21).

1.2.05. а) $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$; б) $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

1.2.06. а) $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

1.2.07. а) $\operatorname{tg} 3x - 1 = 0$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$.

1.2.08. а) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = 1$; б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{2}$.

1.2.09. а) $2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$; б) $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - 1 = 0$.

1.2.10. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin x=\cos 2\pi$;

б) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\cos x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

1.2.11. а) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-y\right)=\sqrt{3}$.

1.2.12. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$; б) $\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$.

1.2.13. а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\frac{1}{2}=0$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)=0$.

1.2.14. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sqrt{3}$; б) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$.

1.2.15. а) $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{4}$; б) $\sin x\cdot\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

1.2.16. а) $\sin x\cdot\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $\cos x\cdot\sin x=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

1.2.17. а) $\sin x\cdot\cos x=\cos\frac{\pi}{2}$; б) $\sin x\cdot\cos x=\operatorname{tg}3\pi$.

1.2.18. а) $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin\pi$; б) $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos\pi$.

1.2.19. а) $\cos 2x+\cos x=-1$; б) $\cos 2x-\sqrt{3}\cos x=-1$.

1.2.20.* а) $\cos 2x+\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=0$; б) $\cos x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=0$.

1.2.21. а) $\sin 2x\cdot\cos 3x=0$; б) $\cos 2x\cdot\sin 3x=0$.

1.2.22.* Найдите все решения данного уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$:

а) $\sin 2x\cdot\cos 3x=0$; б) $\cos 2x\cdot\sin 3x=0$.

1.2.23.* а) Найдите углы x, принадлежащие интервалам $\left(2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, для которых $\operatorname{tg}2x=1$.

б) Найдите углы x, принадлежащие интервалам $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;2\pi k\right)$, для которых $\operatorname{tg}2x=-1$.

Решите уравнения (1.2.24—1.2.37).

1.2.24. а) $\sin^2 x-2\sin x-3=0$; б) $\cos^2 x-2\cos x-3=0$.

1.2.25. а) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$; б) $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$.

1.2.26. а) $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$; б) $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$.

1.2.27.* а) $2\sin^2 x - \sin x = -\cos\pi$; б) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x - 3 = 0$.

1.2.28. а) $\cos^2 x = 3\cos x$; б) $\cos x = \sin 2x \cdot \cos x$.

1.2.29. а) $3\cos^2 x - 5\cos x = 0$; б) $2\sin^2 x + 5\sin x = 0$.

1.2.30. а) $\sin(\pi - x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos(\pi - x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

1.2.31. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{2}$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cdot\cos(\pi - x) = -\frac{1}{2}$.

1.2.32. а) $4\sin^2 x = 1$; б) $4\cos^2 x = 3$.

1.2.33. а) $2\sin^2 x = 1$; б) $2\cos^2 x = 1$.

1.2.34. а) $\left(2\sin x + \sqrt{3}\right)(\cos x - 1) = 0$;

б) $(\sin x + 1)\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$.

1.2.35. а) $\left(2\cos x - \sqrt{2}\right)\left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$;

б) $\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0$.

1.2.36. а) $\cos^2 x - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{5\pi}{6}$;

б) $\cos^2 x - \sqrt{2}\cos(\pi + x) = \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{4}$.

1.2.37.* а) $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{3}$; б) $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{4}{3}$.

1.2.38.* Решите уравнение. Найдите наименьшее расстояние между его положительными решениями:

а) $\sin 2x - \sin x = 0$; б) $\sin 2x = \sqrt{3}\cos x$.

1.2.39.* а) Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{3}\sin(\pi + x) - \sin 2x = 0,$$

лежащие в интервале $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все решения уравнения

$$\sin 2x + \cos(\pi - x) = 0,$$

лежащие в интервале $\left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

1.2.40.* а) Решите уравнение $\sin x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0$ и найдите сумму его решений на отрезке $[0; 4]$.

б) Решите уравнение $\cos x\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$ и найдите сумму его решений на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

1.2.41.* а) Найдите все те решения уравнения $\cos 3x = 0$, которые являются также решениями уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Найдите все те решения уравнения $\sin 3x = 1$, которые являются также решениями уравнения $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

1.2.42.* а) Найдите (в градусах) решения x уравнения $\sin 3x \cdot \cos 4x = 0$, удовлетворяющие условию $-70° < x < 80°$.

б) Найдите (в градусах) решения x уравнения $\sin 5x \cdot \cos 2x = 0$, удовлетворяющие условию $-10° < x < 100°$.

Решите уравнения (1.2.43—1.2.49).

1.2.43. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x = \cos 2\pi$;

б) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

1.2.44.* а) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

1.2.45.* а) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$; б) $\frac{1}{2} + \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

1.2.46.* а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2} = 0$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\left(\frac{3\pi}{4} + 5x\right) = 0$.

1.2.47.* а) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = \sqrt{3}$; б) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$.

1.2.48.* а) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=1$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)=\frac{1}{2}$.

1.2.49.* а) $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.2.50.* Найдите множество значений a, при которых данное уравнение имеет решение:

а) $\cos 3x=2a+7$; б) $\sin 3x=2a+7$.

1.2.51.* Найдите множество значений c, при которых данное уравнение имеет решение:

а) $2\cos 7x=5c+8$; б) $2\sin 7x=6c+9$.

Решите уравнения (1.2.52—1.2.63).

1.2.52. а) $\sqrt{x-3}=2$; б) $\sqrt{x-2}=5$.

1.2.53. а) $\sqrt[4]{x-3}=2$; б) $\sqrt[4]{x-2}=3$.

1.2.54. а) $\sqrt[3]{x+2}=3$; б) $\sqrt[3]{x-1}=5$.

1.2.55. а) $\sqrt{x}=2-x$; б) $\sqrt{2x-1}=x-2$.

1.2.56. а) $\sqrt{2x-3}=x-3$; б) $\sqrt{x+1}=x-1$.

1.2.57. а) $\sqrt{4-3x}=x$; б) $\sqrt{2-x}=x$.

1.2.58. а) $\sqrt{x^2-x+1}=x$; б) $\sqrt{x^2-3x+1}=x$.

1.2.59.* а) $\sqrt{x^2-3x+1}=-x$; б) $\sqrt{x^2-x+1}=-x$.

1.2.60. а) $\sqrt{5-2x}=x-1$; б) $\sqrt{x+10}=2-x$.

1.2.61. а) $\sqrt{3x+1}=x-1$; б) $\sqrt{x+4}=x+2$.

1.2.62. а) $\sqrt{2x+9}=x-3$; б) $\sqrt{2x+5}=x+1$.

1.2.63. а) $2-x+3\sqrt{2-x}=4$; б) $x+3+2\sqrt{2-x}=6$.

Решите уравнения (1.2.64—1.2.86).

1.2.64. а) $2^{5x+1}=4^{2x}$; б) $3^{7x+2}=9^{3x}$.

1.2.65. а) $2\cdot 4^x-3\cdot 2^x-2=0$; б) $3\cdot 25^x-14\cdot 5^x-5=0$.

1.2.66. а) $2^{x^2+3}=8^{x+1}$; б) $27^{5-x^2}=3^{x^2-1}$.

1.2.67. а) $-3\cdot 9^x-2\cdot 3^x+1=0$; б) $2\cdot 4^x+3\cdot 2^x-2=0$.

1.2.68. а) $0{,}4^{\frac{3x-1}{5}}=2{,}5^{x+1}$; б) $0{,}7^{\frac{2x-3}{4}}=\left(1+\frac{3}{7}\right)^{2-x}$.

1.2.69. а) $3^{2x+1}+3^x-4=0$; б) $1-8\cdot 3^{x-1}-9^x=0$.

1.2.70. а) $7^{x^2+1}\cdot 7^{2x}=1$; б) $2^{x^2-1}\cdot 2^x=0{,}5$.

1.2.71. а) $8 \cdot 2^x = \frac{1}{2}$; б) $\frac{7^{3x-1}}{7^{x+1}} = 1$.

1.2.72. а) $4^{-x} = 0{,}125$; б) $100^x = 0{,}1 \cdot \sqrt{1000}$.

1.2.73. а) $\sqrt{3^x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{5^{3x}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{8}}$.

1.2.74. а) $2^{x^2-7x+12} = 1$; б) $5^{x^2-8x+12} = 1$.

1.2.75. а) $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^{2x} = 128$; б) $\left(\frac{1}{243}\right)^{-2x} = 81$.

1.2.76. а) $\frac{2^{x^2}}{4^x} = 8$; б) $\frac{3^{x^2}}{9^x} = 27$.

1.2.77. а) $9^{2x} = 3^{2x^2-6}$; б) $4^{3x} = 2^{x^2+5}$.

1.2.78. а) $2^{x-2} = 5^{2-x}$; б) $3^{x-3} = 10^{3-x}$.

1.2.79. а) $2^{x+3} - 2^x = 112$; б) $3^x - 3^{x-2} = 8$.

1.2.80. а) $2^x - 2^{x-2} = 3$; б) $3^{x+2} - 3^x = 216$.

1.2.81. а) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$; б) $3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 5 = 0$.

1.2.82. а) $2^{\sqrt{x-3}} = 4$; б) $2^{\sqrt{x-2}} = 32$.

1.2.83.* а) $3^{(x-3)^{\frac{1}{4}}} = 9$; б) $2^{(x-2)^{\frac{1}{3}}} = 8$.

1.2.84.* а) $7^{\sqrt{x}} = \frac{49}{7^x}$; б) $5^{\sqrt{x-2}} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^x$.

1.2.85.* а) $5^x - 24 = \frac{25}{5^x}$; б) $2^2 \cdot 2^x - \frac{2^2}{2^x} = 15$.

1.2.86.* а) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} = 10^{-3}\left(10^{3-x}\right)^2$; б) $4^{0{,}5x^2} \cdot 3^{x^2} = 6^{-5}\left(6^{4-x}\right)^2$.

Решите уравнения (1.2.87—1.2.100).

1.2.87. а) $2\log_{0,5} x = \log_{0,5}\left(2x^2 - x\right)$; б) $2\log_{0,2} x = \log_{0,2}\left(5x^2 - x\right)$.

1.2.88. а) $\log_5(x-10) = 2 + \log_5 2$; б) $\lg(3x-2) = 3 - \lg 25$.

1.2.89. а) $\lg(3-x) - \lg(x+2) = 2\lg 2$;

б) $\lg(2-x) - \lg(8+x) = 2\lg 3$.

1.2.90. а) $\log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = 2\log_2 3$;

б) $\log_3(7-2x) + \log_3(2x+5) = 1 + \log_3 9$.

1.2.91. а) $\lg 2 + \lg x = 2$; б) $\lg(x+4) = 1 - \lg 5$.

1.2.92. а) $\log_3 x + \log_3(x+1) = 1 + \log_3 2$;

б) $\log_2(x^2+3)=1+\log_2(x+3)$.

1.2.93. а) $\log_3(x^2+4x+12)=2$; б) $\log_2(x^2+6x+9)=4$.

1.2.94. а) $(x^2+x-2)\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)=0$;

б) $(x^2-x-2)\log_{\frac{1}{5}}(2x-1)=0$.

1.2.95. а) $\lg(3+4x)-\lg(2-3x)=0$;

б) $\lg(7-2x)-\lg(5+3x)=0$.

1.2.96.* а) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=\log_3\left(\frac{1}{x+3}\right)$;

б) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-2)=\log_5\left(\frac{1}{2x-1}\right)$.

1.2.97. а) $\log_2(\sin x)=0$; б) $\log_2(\cos x)=0$.

1.2.98. а) $\log_{\frac{1}{2}}(\cos x)=1$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(\sin x)=1$.

1.2.99.* а) $\log_x 16-\log_x 2=\frac{1}{2}$; б) $\log_x 2+\log_x 3=\frac{1}{3}$.

1.2.100. а) $\lg(x-4)+\lg(x+3)=\lg(5x+4)$;

б) $\lg(x-2)+\lg(x+4)=\lg(6x-3)$.

1.2.101.* Укажите множество значений a, для которых уравнение имеет решение:

а) $\log_2(\sin x)=a$; б) $\log_2(\cos x)=a$.

Выберите наибольшее решение уравнения (1.2.102—1.2.104).

1.2.102. а) $\lg(x^2-x)=1-\lg 5$; б) $\log_6(2x^2-x)=1-\log_6 2$.

1.2.103.* а) $2\log_3^2 x-7\log_3 x=-3$; б) $2\log_5^2 x-3\log_5 x=2$.

1.2.104.* а) $\log_3^2 x-3\log_3 x=-2$; б) $\log_2^2 x-5\log_2 x=-6$.

Решите уравнения (1.2.105—1.2.112).

1.2.105. а) $\log_2(\log_3(x-3))=1$; б) $\log_4(\log_2(\log_3 x))=\frac{1}{2}$.

1.2.106. а) $\log_4\left(\log_3\left(\log_2(x^2+7x)\right)\right)=0$;

б) $\log_2\left(\log_3\left(\log_5(x^2+20x)\right)\right)=0$.

1.2.107. а) $\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5$;

б) $\log_3(x+10)+\log_3(x+4)=3$.

1.2.108. а) $\lg(x+1{,}5)=-\lg x$; б) $\lg(2x+1)=\lg\frac{1}{x}$.

1.2.109.* а) $\lg^2 x + \lg x^2 = -1$; б) $\lg^2 x - \lg\sqrt{x} = \frac{1}{2}$.

1.2.110.* а) $\frac{1}{2}\lg(x^2 - 3x) - \lg\sqrt{x-3} = 0$;

б) $\ln\sqrt{5x - x^2} - \frac{1}{2}\ln(5 - x) = 0$.

1.2.111.* а) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$; б) $\log_3(7 + 2\cdot 3^x) = 2 - x$.

1.2.112.* а) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$;

б) $\frac{1}{3}\log_3 x + 3\log_{27} x + 2\log_9 x = 7$.

Решите системы уравнений (1.2.113—1.2.124).

1.2.113. а) $\begin{cases} 2x + 5y = 15, \\ 3x + 8y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 3y = -5, \\ 2x + 5y = 15. \end{cases}$

1.2.114. а) $\begin{cases} 5x + y = 7, \\ 2x - 3y = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = -3, \\ 2x + y = 4. \end{cases}$

1.2.115.* а) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 4x - 2y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 2, \\ 6x + 9y = 4. \end{cases}$

1.2.116.* а) $\begin{cases} y + x - 1 = 0, \\ |y| - x - 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3|y| - 1 = 0, \\ x + y + 3 = 0. \end{cases}$

1.2.117.* а) $\begin{cases} |x - 1| + y = 0, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0, \\ |x - 3| - y = 0. \end{cases}$

1.2.118. а) $\begin{cases} xy + 4 = 0, \\ x + y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$

1.2.119. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ y - x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ x + y = 9. \end{cases}$

1.2.120. а) $\begin{cases} \sqrt{x + y} = 7, \\ \sqrt{x - y} = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x - y} = 3, \\ 2x + 3y = 213. \end{cases}$

1.2.121. а) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 11, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7. \end{cases}$

1.2.122. а) $\begin{cases} 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \\ 5\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 23, \\ 10\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = 22. \end{cases}$

1.2.123. а) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ \lg x + \lg(x + y) = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y = 6, \\ \lg(x + 4) + \lg(y - 1) = 1. \end{cases}$

1.2.124. а) $\begin{cases} 3^{x+y} = 27, \\ 3^{y-x+3} = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{x-y} = \frac{1}{2}, \\ 2^{x+y-2} = 8. \end{cases}$

1.3. Неравенства и системы неравенств

Решите неравенства, опираясь на графические иллюстрации (1.3.01—1.3.09).

1.3.01. а) $2\sin x \le 1$; б) $\sqrt{3} - 2\cos x \ge 0$.

1.3.02. а) $1 - \operatorname{tg} x \le 0$; б) $1 + \operatorname{tg} x \ge 0$.

1.3.03. а) $\sin x < 0$; б) $\cos x \ge 0$.

1.3.04. а) $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x \ge \frac{1}{2}$.

1.3.05. а) $\cos x < -\frac{1}{2}$; б) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.3.06. а) $\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.3.07. а) $\operatorname{tg} x \ge \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x \le -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1.3.08. а) $\operatorname{tg} x < -1$; б) $\operatorname{tg} x < 1$.

1.3.09. а) $\sqrt{3}\sin x > -\sqrt{3}$; б) $2\cos x > -2$.

Найдите наибольшие целые решения неравенств (1.3.10—1.3.13).

1.3.10. а) $(x - 2)(3 + x) \le 0$; б) $x(6 - x) \ge 0$.

1.3.11. а) $\frac{x - 4}{x - 3} \le 0$; б) $\frac{x - 2}{x + 1} \le 0$.

1.3.12. а) $\frac{x}{x - 5} \le 0$; б) $\frac{x - 3}{x} \le 0$.

1.3.13. а) $x^2(x - 1)(2 + x) \le 0$; б) $x^2(3 - x)(x + 1) > 0$.

Решите неравенства (1.3.14—1.3.22).

1.3.14. а) $\frac{x+6}{x-3} > 0$; б) $\frac{x + 1}{x + 5} > 0$.

1.3.15. а) $\frac{x + 1}{x + 6} \ge 0$; б) $\frac{x + 2}{x + 5} \ge 0$.

1.3.16. а) $x^2 + 2x - 3 > 0$; б) $x^2 + 3x + 2 > 0$.

1.3.17. а) $\frac{x^2 + x}{x - 3} < 0$; б) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} > 0$.

1.3.18. а) $\frac{x^2 + x - 2}{x} \geq 0$; б) $\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \geq 0$.

1.3.19. а) $\frac{5x - 6}{x + 6} \leq 2$; б) $\frac{4x + 3}{x - 2} \geq 3$.

1.3.20. а) $\frac{x^2 + 16x + 48}{x^2 + 3} > 0$; б) $\frac{x^2 - 20x + 99}{x^2 + 1} < 0$.

1.3.21. а) $\frac{x - 1}{(x + 1)(x + 2)^2} > 0$; б) $\frac{x + 3}{(x - 2)(x - 1)^2} < 0$.

1.3.22. а) $\frac{x^2 + 2x - 8}{x} < 0$; б) $\frac{x}{x^2 - 3x - 4} > 0$.

1.3.23. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

а) $\frac{x - 1}{x + 3} > 2$; б) $\frac{2x + 1}{x - 3} > 3$.

1.3.24. а) Найдите целое решение неравенства $\frac{x^2 - x - 6}{-x^2 - 3} < 0$, удовлетворяющее условию $1 < x < 5$.

б) Найдите целое решение неравенства $\frac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 5} < 0$, удовлетворяющее условию $0 < x < 3$.

1.3.25. Найдите целые решения неравенства:

а) $\frac{(x - 4)(x - 5)^2}{x - 7} < 0$; б) $\frac{(1 - x)(x - 7)}{(x - 3)^2} > 0$.

1.3.26. а) Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $\frac{x + 7}{x^2 - 2x - 3} < 0$.

б) Найдите наибольшее целое положительное решение неравенства $\frac{x - 5}{x^2 + x - 6} < 0$.

1.3.27. а) Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

б) Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства $x^2 - 8x + 12 \leq 0$.

1.3.28. а) Найдите наименьшее целое решение неравенства $4x^2 - 7x - 15 < 0$.

б) Найдите наибольшее целое решение неравенства $3x^2 - 7x - 6 < 0$.

1.3.29. Найдите целое решение неравенства:

а) $\frac{6x-5}{4x+1} < 0$; б) $\frac{8x-7}{3x+1} < 0$.

1.3.30. а) Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $\frac{x+2}{3-2x} \le 0$.

б) Найдите наименьшее целое отрицательное решение неравенства $\frac{2x+5}{x-1} \le 0$.

1.3.31.* а) Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{x+7}{x-5} \le -\frac{1}{2}(3x+1)$.

б) Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$.

1.3.32. а) Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $14 + \frac{2(1+x)}{3} \ge \frac{5x-1}{3} - \frac{1+3x}{2}$.

б) Найдите наименьшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $\frac{4+x}{3} - 0{,}5(x+1) \ge x - 2(x-3)$.

Решите неравенства (1.3.33—1.3.35).

1.3.33.* а) $\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 < 0$;

б) $\frac{20}{(x-3)(x-4)} + \frac{10}{x-4} + 1 < 0$.

1.3.34.* а) $1 < \frac{3x^2-7x+8}{x^2+1} < 2$; б) $2 < \frac{5x^2-9x+14}{2x^2+3} < 6$.

1.3.35.* а) $0 < \frac{3x-5}{x+1} \le 3$; б) $-2 < \frac{-2x+5}{x-3} \le 0$.

Решите неравенства (1.3.36—1.3.44).

1.3.36. а) $5^{x-1} < 25$; б) $6^{2x} < \frac{1}{36}$.

1.3.37. а) $3^{3-x} \geq 9$; б) $2^{4-2x} < 1$.

1.3.38. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} > 9$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \geq 4$.

1.3.39. а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x} < 25$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} \leq 81$.

1.3.40. а) $4^{1-x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 9^{2x-1}$.

1.3.41. а) $3^{x+2} - 3^{x} < 72$; б) $2^{x} + 2^{x+1} > 6$.

1.3.42.* а) $4^{x} - 3 \cdot 2^{x} - 4 < 0$; б) $3 + 2 \cdot 3^{x} - 9^{x} > 0$.

1.3.43. а) $0{,}6^{x^2-5x} \geq 1$; б) $8^{3x^2-5x} \geq 1$.

1.3.44. а) $0{,}25^{2{,}5-0{,}5x} > \frac{1}{16}$; б) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3-0{,}5x} \leq 27$.

1.3.45. а) Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $0{,}3^{2x^2-3x+6} < 0{,}00243$.

б) Найдите наибольшее целое решение неравенства $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$.

Решите неравенства (1.3.46—1.3.88).

1.3.46. а) $2^{3-6x} > 1$; б) $16^{x} > 0{,}125$.

1.3.47. а) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} > 4$; б) $7^{2x-1} + 7^{2x+1} < 50$.

1.3.48. а) $3^{x+3} - 3^{x} > 234$; б) $2^{x+4} - 2^{x} < 120$.

1.3.49. а) $4^{x+1} + 4^{x+2} < 80$; б) $2^{x+4} - 2^{x+1} > 56$.

1.3.50. а) $5^{x} + 5^{x+2} > 52$; б) $6^{x} - 6^{x+2} < -245$.

1.3.51. а) $2^{3-x} + 2^{1-x} < 160$; б) $3^{5-x} + 3^{4-x} > 36$.

1.3.52. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 8 > 5 \cdot 2^{x}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 63 < 8 \cdot 3^{-x}$.

1.3.53. а) $0{,}2^{x} < 3 \cdot 5^{-x} - 50$; б) $0{,}25^{x} - \frac{3}{16} > -2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$.

1.3.54. а) $\left(\sqrt{7}\right)^{x} \geq \frac{1}{49}$; б) $2{,}25^{x} \leq 1{,}5$.

1.3.55. а) $0{,}4^{2x-1} \leq 0{,}16$; б) $0{,}3^{7+4x} \geq 0{,}0081$.

1.3.56. а) $3^{4x+1} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{2}}$; б) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} \leq \left(\sqrt{5}\right)^{-2x+3}$.

1.3.57. а) $4^{2-3x} < 0{,}25$; б) $1{,}5^{x-1} > \frac{27}{9}$.

1.3.58. а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\frac{9}{49}\right)^{x+1{,}5}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geq \left(\frac{8}{27}\right)^{x+2}$.

1.3.59. а) $2^{3-x} \leq 2^{\frac{2x}{x+1}}$; б) $25^{y+2} \geq 0{,}2^{\frac{y-7}{y}}$.

1.3.60.* а) $0{,}2^{\frac{2x-3}{x-2}} > 0{,}2^{-1}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

1.3.61. а) $2^{x^2-2} > 4$; б) $3^{x^2-13} > 27$.

1.3.62. а) $2^{x^2-9} < \sin\frac{\pi}{2}$; б) $3^{x^2-16} > \sin 2\pi$.

1.3.63. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4} < \frac{1}{32}$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{10-x^2} > \frac{1}{5}$.

1.3.64. а) $7^{8-x^2} > \frac{1}{7}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-29} < 81$.

1.3.65. а) $3^{16-x^2} < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; б) $7^{x^2-25} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

1.3.66. а) $4^{2-x^2} < \frac{1}{16}$; б) $9^{3-x^2} > \frac{1}{9}$.

1.3.67. а) $5 \cdot 8^x < 43 - 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; б) $7 \cdot 27^x > 61 + 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

1.3.68. а) $3^x > \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; б) $3^{-x} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

1.3.69. а) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) > 0$; б) $\log_5(3x-1) < 1$.

1.3.70. а) $\log_3(2x+1) < \log_3 5$; б) $\log_3(2x-5) < 2$.

1.3.71. а) $\log_5(3-8x) > 0$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(7-3x) \geq 0$.

1.3.72. а) $\log_{\frac{1}{3}}(7-x) > -2$; б) $\log_{\frac{1}{5}}(3-2x) > -1$.

1.3.73. а) $\log_2(x-3) \leq 3$; б) $\lg(4x-1) \leq 1$.

1.3.74. а) $\log_3(3x-1) < \log_3(2x+3)$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(4x-3) > \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$.

1.3.75. а) $\log_2(x-1) \leq \log_2(2x+3)$; б) $\log_5(2x+1) \geq \log_5(x-3)$.

1.3.76.* а) $\log_3\left(12-2x-x^2\right)>2$;

б) $\log_4(x+1)+\log_4 x<\log_4 2$.

1.3.77. а) $\log_5(x-3)<2$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)>-1$.

1.3.78. а) $\lg(2x-3)<\lg(x+1)$; б) $\ln(2x-5)>\ln(13-4x)$.

1.3.79. а) $\log_{\frac{1}{5}}(x+1)\geq\log_{0,2}(5-x)$;

б) $\log_{0,4}(2x+3)\leq\log_{0,4}(x-1)$.

1.3.80. а) $\log_3(2x-3)<3$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(x+5)>-1$.

1.3.81. а) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)>-2$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(x-5)<-1$.

1.3.82.* а) $\dfrac{1}{\log_3(x-2)}\leq\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x-4)}\geq-\dfrac{1}{2}$.

1.3.83. а) $\log_{0,4}(3,5-5x)>2\log_{0,4}0,2-1$;

б) $\log_{0,3}(2x-1,3)+1>2\log_{0,3}0,1$.

1.3.84.* а) $\log_2(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2x-3}$; б) $\log_3(2x-1)>\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{3x-4}$.

1.3.85.* а) $\lg(x-1)^2>0$; б) $\log_7(2x+1)^2<0$.

1.3.86. а) $\log_{0,2}(1+x)<-1$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(8-x)>-2$.

1.3.87. а) $\log_6 3x>\log_6(x+4)$; б) $\lg(x-4,8)<\lg 0,2x$.

1.3.88.* а) $\log_{\frac{1}{5}}(2x-6)>\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2+3\right)$;

б) $\log_3\left(x^2+5\right)>\log_3(x+7)$.

1.3.89. а) Найдите $15x$, где x — наибольшее решение неравенства $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)\geq 0$.

б) Найдите наименьшее целое решение неравенства $\log_{\frac{1}{5}}(7x-1)\leq 0$.

1.3.90.* а) Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_7\left(x^2-9x-63\right)>\log_7\left(x^2-x+1\right)$.

б) Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства $\log_7\left(x^2-3\right)>\log_7(x+3)$.

1.3.91. Решите неравенство:

а) $\log_3(3x-1)<\log_3(2x+3)$;

б) $\log_4(4x-3)\geq\log_4(x+3)$.

1.3.92. Найдите наименьшее целое значение x, удовлетворяющее данному неравенству:

а) $\log_2(2x-1)>\log_2(x+1)$; б) $\log_5(3x+1)>\log_5(x-2)$.

1.3.93. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее данному неравенству:

а) $\log_2(3-2x)-\log_2 13<0$; б) $\log_3(2x+1)-\log_3 5<0$.

1.3.94. Решите неравенство:

а) $(2x+3)\cdot\log_2 5<0$; б) $\dfrac{\log_{0,3}3}{x+4}>0$.

Решите системы неравенств (1.3.95—1.3.98).

1.3.95. а) $\begin{cases}2x-5>x-8,\\2-x<5-3x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-4>5-x,\\3-2x<7+x.\end{cases}$

1.3.96. а) $\begin{cases}2x+1>3x+4,\\5x+3\geq 8x+21;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5x-2\geq 2x+1,\\2x+3<18-3x.\end{cases}$

1.3.97. а) $\begin{cases}2x-\dfrac{3x-1}{2}>\dfrac{2}{3},\\10x-2>1+4x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}17(3x-1)-50x+1<2(x+4),\\12-11x<11x+10.\end{cases}$

1.3.98. а) $\begin{cases}3x-4<8x+6,\\2x-1>5x-4,\\11x-9\leq 15x+3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x\leq 5-6x,\\4x-1\geq 1-3x,\\7-2x>2x-9.\end{cases}$

1.3.99.* Решите графически систему неравенств:

а) $\begin{cases}2y-x\leq 6,\\9x+4y\leq 36,\\x+4y\geq 2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-6y+3\leq 0,\\y+5\leq 5x,\\4y+28\geq 7x.\end{cases}$

1.4. Функции, их свойства и графики

Найдите область определения функций (1.4.01—1.4.20).

1.4.01. а) $y = \log_2\left(5x^2 - x\right)$; б) $y = \log_2 \frac{5+x}{4-2x}$.

1.4.02. а) $y = \sqrt{\left(9-x^2\right)(x+2)}$; б) $y = \sqrt{\left(4-x^2\right)(2x+8)}$.

1.4.03. а) $y = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$.

1.4.04. а) $y = \lg\left(x-x^2\right)$; б) $y = \lg\left(x^2+3x\right)$.

1.4.05. а) $y = \log_2\left(x^2+6x+5\right)$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-6x+5\right)$.

1.4.06. а) $y = \ln\left(x^2-8x+16\right)$; б) $y = \ln\left(x^2-12x+36\right)$.

1.4.07.* а) $y = \sqrt{9-\sqrt{x}}$; б) $y = \sqrt{\sqrt{x}-4}$.

1.4.08.* а) $y = \sqrt{\frac{x-2}{5-2x}}$; б) $y = \sqrt{\frac{3x-7}{x+2}}$.

1.4.09.* а) $y = \frac{1}{\lg(x-3)-1}$; б) $y = \frac{2}{3+\log_2(x+2)}$.

1.4.10.* а) $y = \lg\left(2-\sqrt{x}\right)$; б) $y = \lg\left(5-\sqrt{x}\right)$.

1.4.11. а) $y = \ln\frac{2x+3}{x-1}$; б) $y = \ln\frac{3x+2}{2x+1}$.

1.4.12. а) $y = \sqrt{4-x^2}$; б) $y = \sqrt{x^2-9}$.

1.4.13. а) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$.

1.4.14.* а) $y = \sqrt[4]{\frac{5x-4}{x^2-7x+6}}$; б) $y = \sqrt[4]{\frac{1-8x}{x^2-5x+6}}$.

1.4.15.* а) $y = \frac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}$; б) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2+5x+4}$.

1.4.16.* а) $y = \sqrt{\frac{1}{2}-\cos x}$; б) $y = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}$.

1.4.17. а) $y = \sqrt{\frac{2x-4}{x+1}}$; б) $y = \sqrt{-\frac{x-4}{2-x}}$.

1.4.18. а) $y = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$; б) $y = \sqrt{2 + \frac{x}{1 - x}}$.

1.4.19. а) $y = \lg \frac{x(x-3)}{2x-5}$; б) $y = \lg \frac{x-5}{x(x-2)}$.

1.4.20.* а) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{3 - 2\sin x}}$; б) $y = \frac{\sin x}{\sqrt{3 + 2\cos x}}$.

Найдите область значений функций (1.4.21—1.4.24).

1.4.21. а) $y = 1 - \cos x$; б) $y = 1 - \sin x$.

1.4.22. а) $y = 2 + 3\sin x$; б) $y = 4 + 3\cos x$.

1.4.23.* а) $y = 5 - \sin^2 x$; б) $y = 6 - \cos^2 x$.

1.4.24.* а) $y = 4 + \cos^2 x$; б) $y = 3 - \sin^2 x$.

1.4.25. а) Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения $2\cos\alpha + 1$. Найдите значения α, при которых значение данного выражения равно 1.

б) Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения $2\sin\alpha + 1$. Найдите значения α, при которых значение данного выражения равно 1.

1.4.26. Найдите α, при которых функция $y = \sin\alpha - \cos\frac{\pi}{3}$ принимает:
а) наибольшее значение; б) наименьшее значение.

1.4.27. Установите, при каких значениях аргумента функция y принимает положительные значения:
а) $y = \frac{2x-5}{9-3x}$; б) $y = \frac{7x+21}{2x-4}$.

Постройте графики функций на отрезке $[-\pi; 2\pi]$ и укажите промежутки, на которых функция а) возрастает, а функция б) убывает (1.4.28—1.4.31).

1.4.28. а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$.

1.4.29. а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

1.4.30. а) $y = -\cos x$; б) $y = -\sin x$.

1.4.31. а) $y = -\operatorname{ctg} x$; б) $y = -\operatorname{tg} x$.

1.4.32. а) Докажите, что график функции $y = -2x^2 + 3x - 2$ лежит в нижней координатной полуплоскости.

б) Докажите, что график функции $y = 3x^2 - 2x + 1$ лежит в верхней координатной полуплоскости.

1.4.33.* а) При каких значениях параметра a график функции $y = -2x^2 + 3x + a$ лежит в нижней координатной полуплоскости ?

б) При каких значениях параметра a график функции $y = 3x^2 - 2x + a$ лежит в верхней координатной полуплоскости ?

1.4.34.* а) При каких значениях a уравнение $-2x^2 + 3x = a$ не имеет действительных корней ?

б) При каких значениях a уравнение $3x^2 - 2x = a$ не имеет действительных корней ?

1.4.35.* Изобразите фигуру, ограниченную графиками функций y_1 и y_2 (точки границы фигуры считайте принадлежащими фигуре):

а) $y_1 = x^2 - 4$, $y_2 = 2x - x^2$;

б) $y_1 = 9 - x^2$, $y_2 = x^2 + 3x$.

1.4.36. Какая из данных функций является возрастающей и какая убывающей на $\boldsymbol{R}$, если:

а) $y_1 = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ и $y_2 = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$;

б) $y_1 = \left(\sqrt{5} - 2\right)^x$ и $y_2 = \frac{1}{\left(\sqrt{5} - 2\right)^x}$?

Ответ обоснуйте.

1.4.37. Какая из данных функций является возрастающей и какая убывающей на $\boldsymbol{R}$, если:

а) $y_1 = \left(3 - \sqrt{7}\right)^x$ и $y_2 = \frac{1}{\left(3 - \sqrt{7}\right)^x}$;

б) $y_1 = \left(\frac{\pi}{5}\right)^x$ и $y_2 = \left(\frac{5}{\pi}\right)^x$?

Ответ обоснуйте.

1.4.38.* а) Дана функция $y = 8^x$ и значения x, равные $2;\ 4;\ -6;\ -\frac{1}{8};\ 0{,}04;\ 7;\ -\frac{1}{9}$. Выберите те значения x, при которых верно неравенство $8^x > 1$.

б) Дана функция $y = 5^x$ и значения x, равные $-3;\ 4;\ \frac{1}{5};\ -0{,}08;\ 6;\ -\frac{1}{3}$. Выберите те значения x, при которых верно неравенство $5^x < 1$.

1.4.39.* а) Дана функция $y = 6^x$ и значения y, равные

$$1{,}5;\ 12;\ \frac{1}{36};\ \frac{1}{6};\ 6;\ 36^{\cos 180^\circ}.$$

Выберите те значения y, при которых $x < 0$.

б) Дана функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и значения y, равные

$$16;\ 4;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{32};\ \frac{1}{16};\ 2^{\ln\frac{1}{e}}.$$

Выберите те значения y, при которых $x \geq 0$.

1.4.40. а) Какие из точек $A(8;\ 3)$, $B\left(-\frac{1}{4};\ 1\right)$, $C(16;\ 2)$, $D\left(\frac{1}{64};\ -3\right)$ принадлежат графику функции $y = \log_4 x$?

б) Какие из точек $A\left(\frac{1}{25};\ -2\right)$, $B\left(\frac{1}{5};\ 1\right)$, $C(5;\ -1)$, $D\left(\frac{1}{125};\ 2\right)$ принадлежат графику функции $y = \log_{0,2} x$?

1.4.41.* а) Дана функция $y = \log_2(x-2)$. Какие значения принимает y, если $2{,}5 \leq x \leq 10$?

б) Дана функция $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$. Какие значения принимает y, если $-2{,}5 \leq x \leq 5$?

1.4.42.* Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = \frac{1}{1+\sin x}$; б) $y = \frac{1}{1-\cos x}$.

1.4.43.* Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на $\boldsymbol{R}$, если:

а) $y = 5^{-|\sin x|} - 8$; б) $y = 8 + 5^{|\cos x|}$.

Вычислите абсциссу точки пересечения графиков функций (1.4.44—1.4.45).

1.4.44. а) $y = \log_{0,3}\left(x^2 - x - 5\right)$ и $y = \log_{0,3}\frac{x}{3}$;

б) $y = \log_5\left(x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{8}{5}\right)$ и $y = \log_5 2x$.

1.4.45. а) $y = x$ и $y = 1 + \sqrt{x+5}$;

б) $y = -x$ и $y = 2 - 2\sqrt{x+5}$.

Вычислите ординату точки пересечения графиков функций (1.4.46—1.4.47).

1.4.46. а) $y = \log_2(x-3)$ и $y = 2 - \log_2 x$;

б) $y = \log_3(3x+1)$ и $y = 1 - \log_3\left(\frac{3}{2}x\right)$.

1.4.47. а) $y = \log_2(x+2)$ и $y = \log_2(x^2+x-7)$;

б) $y = \log_3(3x-2)$ и $y = \log_3(x^2+3x-6)$.

1.4.48.* При каких значениях аргумента x график функции $f(x)$ лежит выше графика функции $g(x)$:

а) $f(x) = 2x^2 + x - 6$, $g(x) = -x - \frac{11}{2}$;

б) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$, $g(x) = x + 1$?

1.4.49. Укажите, при каких значениях аргумента x график функции $f(x)$ расположен ниже графика $g(x)$, если:

а) $f(x) = 2^{x^2 - x}$, $g(x) = 1$; б) $f(x) = 3^{x^2 - 3}$, $g(x) = 3$.

1.4.50. Найдите координаты общих точек данной прямой и графика функции $f(x)$:

а) $f(x) = \sqrt{x+7}$, $y - x - 1 = 0$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$, $y - x + 2 = 0$.

1.5. Производная и ее применение

Даны функции $f(x)$ и $g(x)$. Найдите значения переменной x, при которых верно равенство $f'(x) = g'(x)$ (1.5.01—1.5.02).

1.5.01. а) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x - 5$;

б) $f(x) = \cos x$, $g(x) = 5 - x$.

1.5.02. а) $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = \sqrt{3}x + 7$;

б) $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = \sqrt{3}x - 5$.

Решите уравнения $f'(x) = f(x)$ (1.5.03—1.5.06).

1.5.03. а) $f(x) = \left(\sin\frac{\pi}{2} - 2x\right)^3$; б) $f(x) = (\cos 0 - 3x)^3$.

1.5.04. а) $f(x) = \left(2x\sin\frac{\pi}{6} + 1\right)^2$; б) $f(x) = \left(2x^2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \sin\pi\right)^3$.

1.5.05.* а) $f(x)=\left(2x\cos 0+x^2\right)^2$; б) $f(x)=\left(x^2\sin\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^5$.

1.5.06.* а) $f(x)=\sin x\cdot\cos x$; б) $f(x)=\frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сравните с нулем (1.5.07—1.5.08).

1.5.07.* а) $f'(1)$, если $f(x)=\ln(1{,}5-x)-e^{x-1}$;

б) $f'(0{,}5)$, если $f(x)=e^{1-2x}-\ln(1+x)$.

1.5.08.* а) $f'\left(\frac{1}{3}\right)$, если $f(x)=\ln(2-3x)+x$;

б) $f'(-1)$, если $f(x)=x^2+\ln(-ex)$.

Решите уравнение $f'(x)=0$ (1.5.09—1.5.10).

1.5.09. а) $f(x)=x\cdot 2^{3x}$; б) $f(x)=x^2\cdot 3^{2x}$.

1.5.10. а) $f(x)=x^3\cdot e^x$; б) $f(x)=x^2\cdot e^{4x}$.

1.5.11.* Решите неравенство $f'(x)<g'(x)$ в области определения функций:

а) $f(x)=x+3\ln(x-2)$, $g(x)=x+5\ln(x-1)$;

б) $f(x)=x-5\ln(x-2)$, $g(x)=x+2\ln(x+3)$.

Найдите промежутки возрастания и убывания функций (1.5.12—1.5.24).

1.5.12. а) $f(x)=\frac{5}{3}x^3+4x^2-4x+1$; б) $f(x)=x^3+6x^2-15x+3$.

1.5.13. а) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+5$; б) $f(x)=x^3-6x^2-15x+7$.

1.5.14. а) $f(x)=\frac{1}{3}x-x^3$; б) $f(x)=48x-x^3$.

1.5.15. а) $f(x)=x^3+2x^2-1$; б) $f(x)=x^3-3x^2+5$.

1.5.16. а) $f(x)=x^4-4x^2$; б) $f(x)=x^4-6x^2$.

1.5.17. а) $f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+15$;

б) $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-17$.

1.5.18. а) $f(x)=2x^3-3x^2+1$; б) $f(x)=2x^3-6x^2+4$.

1.5.19. а) $f(x)=2x^4-4x^2+1$; б) $f(x)=-x^4+2x^2+3$.

1.5.20. а) $f(x)=x^3-27x+7$; б) $f(x)=x^3-3x+2$.

1.5.21. а) $f(x)=2x^3-3x^2$; б) $f(x)=x^3-4x$.

1.5.22.* а) $f(x)=x+\frac{16}{x}$; б) $f(x)=x+\frac{9}{x}$.

1.5.23.* а) $f(x)=\frac{x^2}{4-x^2}$; б) $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2}$.

1.5.24.* а) $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$; б) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

Исследуйте на максимум и минимум функции (1.5.25—1.5.34).

1.5.25. а) $f(x)=x^4-10x^2+9$; б) $f(x)=3x^4-3x^2+2$.

1.5.26. а) $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+3$; б) $f(x)=2x^4-8x^3+8x^2-3$.

1.5.27. а) $f(x)=2x^4-4x^2+2$; б) $f(x)=4x^4-2x^2+3$.

1.5.28. а) $f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-4)^2$; б) $f(x)=-x^2(x-2)^2$.

1.5.29. а) $f(x)=x^4-8x^2+7$; б) $f(x)=x^4-2x^2+3$.

1.5.30. а) $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{9}{x}$; б) $f(x)=x+\frac{4}{x}$.

1.5.31.* а) $y=x^3+3x^2-3x+1$; б) $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x+1$.

1.5.32.* а) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-x+2$; б) $y=x^3-3x^2-6x+1$.

1.5.33.* а) $f(x)=2x^3-12x+6$; б) $f(x)=2x^3-18x+3$.

1.5.34.* а) $f(x)=x^3+3x^2-3x+2$; б) $f(x)=x^3-3x^2-6x+3$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке (1.5.35—1.5.41).

1.5.35.* а) $y=(x+2)^3(x-1)$, $[-3;\ 0]$;

б) $y=(x-2)^3(x+1)$, $[0\ ;\ 3]$.

1.5.36.* а) $f(x)=(x+3)^2(x-1)^2$, $\left[-\frac{7}{2};\ 2\right]$;

б) $f(x)=(x-3)^2(x+2)^2$, $\left[-3\ ;\ \frac{7}{2}\right]$.

1.5.37. а) $y=2x^3+3x^2-12x+30$, $[-3\ ;\ 3]$;

б) $y=2x^3+3x^2-12x+1$, $[-1\ ;\ 5]$.

1.5.38. а) $f(x)=x^4-8x^2-9$, $[\ 0\ ;\ 3]$;

б) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$, $[-3\ ;\ 0]$.

1.5.39. а) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-8x^2$, $[-1\ ;\ 5]$;

б) $f(x)=2x^4-8x$, $[-2\ ;\ 1]$.

1.5.40. а) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$, $[-1\ ;\ 3\ ]$;

б) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, $[-2\ ;\ 2\ ]$.

1.5.41. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 8$, $[-4\ ;\ 3\ ]$;

б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[-2\ ;\ 0{,}5\ ]$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на данном промежутке. Определите, какие целые значения принимает функция $f(x)$ на этом промежутке (1.5.42—1.5.44).

1.5.42.* а) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $\left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$;

б) $f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 2$, $\left[\ 1\ ;\ \frac{3}{2}\ \right]$.

1.5.43.* а) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$, $\left[\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\ \right]$;

б) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$, $\left[\ \frac{3}{2}\ ;\ 2\ \right]$.

1.5.44.* а) $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $[\ 3\ ;\ 6\ ]$; б) $f(x) = x + \frac{9}{x}$, $[\ 4\ ;\ 7\ ]$.

1.5.45.* При каких значениях a график функции:

а) $y = 3x - 4x^3$; б) $y = 6x - 2x^3$

и прямая $y = a$ имеют единственную общую точку?

1.5.46.* При каких значениях a прямая $y = a$ пересекает более чем в двух точках график функции:

а) $y = x^3 + 3x^2$; б) $y = 2x^2 - x^3$?

1.5.47. а) Число 10 разложите на два неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих слагаемых была наименьшей.

б) Число 12 разложите на два неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих слагаемых была наименьшей.

1.5.48. а) Число 8 разложите на два неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение куба первого слагаемого на второе слагаемое было бы наибольшим.

б) Число 12 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение куба одного из них на удвоенное другое слагаемое было наибольшим.

1.5.49. а) Число 54 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых. Первое слагаемое в два раза больше второго. Найдите эти три слагаемых, зная, что их произведение наибольшее.

б) Число 48 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых, два из которых равны между собой. Найдите эти три слагаемых, зная, что их произведение наибольшее.

Исследуйте функцию и постройте ее график (1.5.50—1.5.52).

1.5.50.* а) $y = \frac{1}{3}x - x^3$; б) $y = 12x - x^3$.

1.5.51.* а) $y = x^3 - 3x^2$; б) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

1.5.52.* а) $y = \frac{5}{3}x^3 + 5x^2$; б) $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$.

В указанных промежутках найдите наибольшее и наименьшее значения функции (1.5.53—1.5.54).

1.5.53.* а) $y = e^{-x}\left(x^2 + x - 5\right)$, $\left[-4\ ;\ 4\ \right]$;

б) $y = e^{x}\left(-x^2 + 4x - 1\right)$, $\left[-2\ ;\ 4\ \right]$.

1.5.54.* а) $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}$, $\left[-1\ ;\ 2\ \right]$;

б) $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{\ln 3}$, $\left[-1\ ;\ 2\ \right]$.

Составьте уравнение касательной к графику функции в заданной точке. Сделайте рисунок (1.5.55—1.5.57).

1.5.55.* а) $y = x^2 - 2x$, в точке с абсциссой $x = 2$;

б) $y = x^2 - 3x$, в точке с абсциссой $x = 3$.

1.5.56.* а) $y = -x^2 - 1$, в точке с абсциссой $x = 2$;

б) $y = -x^2 - 1$, в точке с абсциссой $x = -2$.

1.5.57.* а) $y = 2x^2 + 1$, в точке с абсциссой $x = 1$;

б) $y = 2x^2 - 1$, в точке с абсциссой $x = 2$.

Составьте уравнение касательной к графику функции (1.5.58—1.5.60).

1.5.58.* а) $y = 2\cos 0{,}5x$ в точке с абсциссой $x = 1{,}5\pi$;

б) $y = 2\sin\frac{x}{2}$ в точке с абсциссой $x = 1{,}5\pi$.

1.5.59.* а) $y = 4x - x^2$ в точках пересечения графика с осью Ox;

б) $y = 9x - x^2$ в точках пересечения графика с осью Ox.

1.5.60.* а) $y = -x^2 - 2$, параллельной прямой $y = 4x + 1$;

б) $y = -x^2 + 3$, параллельной прямой $y = -4x + 2$.

1.5.61.* а) На кривой $y = x^2 - x + 1$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y = 3x - 1$.

б) На кривой $y = 4x^2 - 6x + 3$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y = 2x + 3$.

1.5.62. а) Докажите, что функция $y = (x - 1)^2$ возрастает на промежутке $[1; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 1]$. Постройте эскиз графика функции.

б) Докажите, что функция $y = -(x + 1)^2$ убывает на промежутке $[-1; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; -1]$. Постройте эскиз графика функции.

1.5.63. а) Дана функция $y = x^2 - 2x$. Выясните, возрастает или убывает эта функция при $x \in [-3\ ;\ 0\ ]$.

б) Дана функция $y = -x^2 + x - 1$. Выясните, возрастает или убывает эта функция при $x \in [0\ ;\ 4\ ]$.

Исследуйте функцию на возрастание, убывание, экстремумы (1.5.64—1.5.66).

1.5.64. а) $y = 2\ln x + x^{-2}$; б) $y = x^3 - 3\ln(2x)$.

1.5.65. а) $y = x^3 e^{-3x}$; б) $y = e^x x^2$.

1.5.66. а) $y = 0{,}5x^2 - \ln x$; б) $y = 4(1 - x)e^x$.

1.5.67.* Докажите, что функция:

а) $f(x) = 2^{1-2x} - x$ убывает на $D(f)$;

б) $f(x) = x^3 + e^{2+3x}$ возрастает на $D(f)$.

1.6. Первообразная и интеграл

1.6.01. Докажите, что функция $F(x)$—одна из первообразных функции $f(x)$ на промежутке:

а) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x$, $f(x) = x^2 - 5$, $(-\infty; +\infty)$;

б) $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + 8x$, $f(x) = 2x^2 + 8$, $(-\infty; +\infty)$.

При каких числовых значениях a функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ для указанных значений x (1.6.02—1.6.03)?

1.6.02. а) $F(x) = a\cos 2x$, $f(x) = 4\sin 2x$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

б) $F(x) = a\sqrt[3]{x^5}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in (0; +\infty)$.

1.6.03. а) $F(x) = 3a - \cos(2x + 1)$, $f(x) = 2\sin(2x + 1)$,

$x \in (-\infty; +\infty)$;

б) $F(x) = 8a + \sin\left(\frac{1}{3}x - 2\right)$, $f(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}x - 2\right)$,

$x \in (-\infty; +\infty)$.

1.6.04. Найдите первообразную $F(x)$ функции:

а) $f(x) = \cos 4x$, если $F\left(\frac{\pi}{24}\right) = 1$;

б) $f(x) = \sin 3x$, если $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = 2$.

Для данной функции $f(x)$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ (1.6.05—1.6.09).

1.6.05. а) $f(x) = 2x^4$, $M_0(-1; 2)$; б) $f(x) = 3x^5$, $M_0(1; 3)$.

1.6.06. а) $f(x) = \sin 2x$, $M_0(0; 1)$; б) $f(x) = \cos 3x$, $M_0\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

1.6.07. а) $f(x) = x^{-4}$, $M_0(2; -3)$; б) $f(x) = x^{-3}$, $M_0\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.

1.6.08. а) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $M_0(1; 1)$; б) $f(x) = x^{\frac{4}{5}}$, $M_0(1; -1)$.

1.6.09. а) $f(x) = 10x \cdot \sqrt{x}$, $M_0(1; 5)$;

б) $f(x) = -\frac{1}{2x \cdot \sqrt{x}}$, $M_0\left(\frac{1}{4}; 3\right)$.

Найдите функцию $F(x)$, график которой проходит через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ (1.6.10—1.6.11).

1.6.10. а) $F'(x) = 4x^2 + 9x^{-2}$, $M_0(3; -2)$;

б) $F'(x) = 3x^2 - 4x^{-2}$, $M_0(2; -12)$.

1.6.11. а) $F'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{1}{3}$, $M_0(2; 1)$;

б) $F'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x - \frac{1}{8}$, $M_0(1; 3)$.

Найдите первообразные функций (1.6.12—1.6.14).

1.6.12. а) $y_1 = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$, $y_2 = \frac{1}{x^2}$;

б) $y_1 = 2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x - 3$, $y_2 = \frac{2}{x^3}$.

1.6.13. а) $y_1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y_2 = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 2$;

б) $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$.

1.6.14. а) $y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$;

б) $y = -\sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3}$.

Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, график которой проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$. Проверьте, принадлежит ли графику найденной функции точка $P(0;-1)$ (1.6.15—1.6.16).

1.6.15. а) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$;

б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

1.6.16. а) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$;

б) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

1.6.17.* При каких значениях x обращается в нуль та из первообразных функции $f(x)$, которая при $x = x_0$ имеет значение $y = y_0$:

а) $f(x) = 2\cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $y_0 = \frac{1}{2}$;

б) $f(x) = -3\sin 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $y_0 = -\frac{3}{2}$?

1.6.18. а) При каких значениях k функция $k\sqrt{x} + 3$ является первообразной функции $\frac{3}{\sqrt{x}}$?

б) При каких значениях k функция $kx^2 + x + 12$ является первообразной функции $8x + 1$?

1.6.19. а) При каком значении k функция $k\sin x + x^2 - 3$ является первообразной функции $2\cos x + 2x$?

б) При каком значении k функция $k\cos x + x - 4$ является первообразной функции $3\sin x + 1$?

Вычислите интегралы (1.6.20—1.6.33).

1.6.20. а) $\int\limits_0^1 (x+1)^5\,dx$; б) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos(x+1)\,dx$.

1.6.21. а) $\int\limits_1^3 3x^4 dx$; б) $\int\limits_2^4 \frac{1}{3}x^3 dx$.

1.6.22. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\,dx$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\,dx$.

1.6.23. а) $\int\limits_{-1}^{0} \left(2x^3 + 1\right)dx$; б) $\int\limits_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right)\,dx$.

1.6.24. а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{3x^6}$; б) $\int\limits_2^7 \frac{dx}{x^2}$.

1.6.25. а) $\int\limits_0^{\pi} (\sin x - x)\,dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + x)\,dx$.

1.6.26. а) $\int\limits_0^2 \left(2x^3 - x - 1\right)dx$; б) $\int\limits_{-1}^1 \left(2x^2 - 5x - 7\right)dx$.

1.6.27. а) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x^2}\,dx$; б) $\int\limits_2^8 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1.6.28. а) $\int\limits_0^1 \left(x^2 + x\right)dx$; б) $\int\limits_1^0 \left(x^2 + 2x\right)dx$.

1.6.29. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \cos 3x dx$.

1.6.30. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

1.6.31. а) $\int\limits_{2\ln 2}^{\ln 2} e^{2x} dx$; б) $\int\limits_0^{2\ln 2} e^{\frac{x}{2}} dx$.

1.6.32. а) $\int\limits_1^2 (3x - 1)\,dx$; б) $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)\,dx$.

1.6.33. а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\,dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx$.

Решите уравнения (1.6.34—1.6.36).

1.6.34.* а) $\int_0^3 x^2 dx = 4y^2 + 5$; б) $\int_0^2 (x+1)\, dx = y^2$.

1.6.35.* а) $\int_0^2 (x-2)\, dx = y^2 + 3y$; б) $\int_0^3 (x^2+1)\, dx = y^2 + y$.

1.6.36.* а) $\int_{-1}^3 (x+3)\, dx = y^2 - y$; б) $\int_0^2 (x+6)\, dx = y^2 - 6y$.

Решите неравенства (1.6.37—1.6.39).

1.6.37.* а) $\int_{-2}^4 (x+3)\, dx \geq y^2 + 8$; б) $\int_{-1}^3 (x+5)\, dx \leq 2y^2 + 6$.

1.6.38.* а) $\int_2^6 (x-2)\, dx \geq y^2 + 2$; б) $\int_{-2}^4 (x+2)\, dx \geq y^2 + 15$.

1.6.39.* а) $\int_2^7 (x-1)\, dx \geq y^2 - \frac{1}{2}$; б) $\int_{-3}^0 (x+4)\, dx \leq y^2 - \frac{3}{2}$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (1.6.40—1.6.53).

1.6.40. а) $y = -x^2 - 3x$, $y = 0$; б) $y = 6(x - x^2)$, ось Ox.

1.6.41. а) $y = 2\cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$;

б) $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$.

1.6.42. а) $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, $y = \frac{1}{x^2}$;

б) $x = -4$, $x = -2$, $y = 0$, $y = \frac{1}{x^2}$.

1.6.43. а) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3 + 2x$;

б) $y = x^2 + 2x + 5$, $y = 5 - 2x$.

1.6.44. а) $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 3 - x$;

б) $y = -x^2 - 2x + 7$, $y = x + 7$.

1.6.45.* а) $y = (x-2)(2x-3)$, $y = 0$;

б) $y = (3x+2)(x-1)$, $y = 0$.

1.6.46. а) $y = x^2 + 1$, $x = 2$, $x = -1$, $y = 0$;

б) $y = x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

1.6.47. а) $y = -x^2 + 3x$, $y = 0$; б) $y = -x^2 - 2x$, $y = 0$.

1.6.48. а) $y = 2x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$;

б) $y = 2x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

1.6.49. а) $y = 4x - x^2$, $y = 0$; б) $y = 6x - x^2$, $y = 0$.

1.6.50.* а) $y = 3x^2$, $y = 5 - 2x^2$; б) $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 + 3$.

1.6.51. а) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 1$; б) $y = -x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

1.6.52. а) $y = -x^3$, $y = -1$, $x = 0$; б) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$.

1.6.53. а) $y = x^2 - 3x + 4$, $y = x + 1$;

б) $y = 0{,}5x^2 - 2x + 3$, $y = 7 - x$.

Изобразите криволинейную трапецию, ограниченную данными линиями, и найдите ее площадь (1.6.54—1.6.56).

1.6.54. а) $y = (x-1)^2$, $y = 0$, $x = 3$;

б) $y = (x-2)^2$, $y = 0$, $x = 4$.

1.6.55. а) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \pi$;

б) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$.

1.6.56.* а) $y = -\frac{2}{x}$, $x = -1$, $x = -4$, $y = 2$;

б) $y = -\frac{1}{x}$, $x = -1$, $x = -3$, $y = 1$.

1.6.57. Изобразите фигуру, ограниченную данными линиями, и вычислите ее площадь:

а) $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 0$;

б) $y = -x^2 - 2x + 3$, $y = 0$.

1.6.58.* а) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 - 2x + 1$ и графиком ее производной $f'(x)$.

б) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 - 4x + 4$ и графиком ее производной $f'(x)$.

1.6.59.* а) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций f и F, зная, что функция F является первообразной функции $f(x) = 2x - 3$ и график F проходит через точку $M(0; 1)$.

б) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций f и F, зная, что функция F является первообразной функции $f(x) = 2x + 3$ и график F проходит через точку $M(0; -3)$.

1.6.60.* При каких значениях $a > 0$ площадь фигуры, ограниченной данными линиями, равна S:

а) $y = x^4$, $y = 0$, $x = a$, $S = 6{,}4$;

б) $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$, $S = 9$?

Фигура, ограниченная данными линиями, делится прямой $x = a$ на две части. Равны ли их площади (1.6.61—1.6.62)?

1.6.61.* а) $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, $a = 2$;

б) $y = \frac{2}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, $a = 2$.

1.6.62.* а) $y = 2^x$, $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $a = 3$;

б) $y = (0{,}5)^x$, $x = -4$, $x = 0$, $y = 0$, $a = -3$.

При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной данными линиями, равна S (1.6.63—1.6.64)?

1.6.63.* а) $y = 2x + 3$, $y = 0$, $x = 2$, $x = a$, $a > 2$, $S = 18$;

б) $y = 3x + 5$, $y = 0$, $x = 1$, $x = a$, $a > 1$, $S = 9{,}5$.

1.6.64.* а) $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = a$, $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{2}$, $S = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$;

б) $y = \cos x$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = a$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $S = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

РАЗДЕЛ 2

2.1. Числа и тождественные преобразования

Вычислите (2.1.01—2.1.13).

2.1.01.* а) $2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-4\sqrt{15\sqrt{27}}$;

б) $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[3]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$.

2.1.02.* а) $\dfrac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}\times$

$\times\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{9+\sqrt{5}}}{\sqrt{19}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7+\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{21+\sqrt{7+\sqrt{5}}}}\times$

$\times\sqrt{5-\sqrt{21+\sqrt{7+\sqrt{5}}}}$.

2.1.03. а) $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}$; б) $\dfrac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}}+6\sqrt[3]{375}}$.

2.1.04. а) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt[4]{52}}\cdot\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{52}-\sqrt{5}}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt[4]{12}}\cdot\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{12}+\sqrt{2}}$.

2.1.05. а) $\dfrac{3^{-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2-\left(\frac{3}{4}\right)^{2}}\cdot\left(5^{0}-\frac{1}{6}\right)^{-1}+2\cdot10^{-1}$;

б) $\dfrac{2^{-2}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}{8-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}:\left(3^{0}-\frac{5}{6}\right)^{2}-3\cdot5^{-1}$.

2.1.06. а) $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{65}+7}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{65}-7}$.

2.1.07. а) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

2.1.08. а) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^{2}$; б) $\left(\sqrt{7+\sqrt{33}}+\sqrt{7-\sqrt{33}}\right)^{2}$.

2.1.09. а) $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{19-8\sqrt{3}}+\sqrt{19+8\sqrt{3}}$.

2.1.10. а) $\left(\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}-\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}$;

б) $\left(\sqrt[4]{46-6\sqrt{5}}-\sqrt{3\sqrt{5}-1}\right)\cdot\sqrt{1+3\sqrt{5}}$.

2.1.11. а) $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-2{,}5\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1{,}5-\sqrt{5}\right)^3}\right)^2-1$;

б) $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-1{,}5\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3}\right)^2+0{,}75$.

2.1.12. а) $3^{0,3}:\dfrac{3^{-0,2}}{1-3^{0,5}}+\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}$; б) $2^{0,7}:\dfrac{2^{0,2}}{1-2^{0,5}}+\left(1-\sqrt{2}\right)^1$.

2.1.13. а) $\dfrac{2\cdot4^{-2}+\left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\sqrt{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$; б) $\dfrac{3\cdot9^{-1}+\left(16^{-\frac{1}{2}}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-5}}{32^{-\frac{1}{5}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\sqrt{6}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}$.

Установите, какое из двух выражений больше (2.1.14—2.1.24).

2.1.14. а) $\left(1+\sqrt{5}\right)^{100}$ и 3^{100}; б) $\left(2-\sqrt{3}\right)^{30}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$.

2.1.15. а) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{70}$ и 4^{70}; б) $\left(3-\sqrt{5}\right)^{50}$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^{50}$.

2.1.16. а) $\dfrac{\sqrt[15]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^3}}$ и $\dfrac{\sqrt[14]{3^9}}{\sqrt[9]{3^2}}$; б) $\dfrac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[6]{2}}$ и $\dfrac{\sqrt[4]{2^7}}{\sqrt[3]{2^4}}$.

2.1.17. а) $\left(\frac{1}{8}\cdot125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и $27^{-\frac{1}{3}}\cdot81^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

б) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ и $8^{-\frac{1}{3}}\cdot64^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{9}{64}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2.1.18. а) $100^{-\frac{1}{2}}\cdot0{,}1^{-\frac{1}{2}}$ и $6{,}25^{-0,5}\cdot0{,}1^{-1}$;

б) $\left(\frac{25}{49}\right)^{-0,5}:\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$ и $0{,}008^{-\frac{2}{3}}\cdot25^{-1}$.

2.1.19. а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{3}+\sqrt{4}$ и $\sqrt{11}$.

2.1.20. а) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{7}+\sqrt{4}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{5}$.

2.1.21. а) $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ и $\sqrt{6}-\sqrt{5}$; б) $\sqrt{22}-\sqrt{21}$ и $\sqrt{15}-\sqrt{14}$.

2.1.22. а) $2\sqrt{3}-\sqrt{11}$ и $3\sqrt{2}-\sqrt{17}$; б) $2\sqrt{5}-\sqrt{19}$ и $2\sqrt{6}-\sqrt{23}$.

2.1.23. а) $\left(1\frac{24}{25}\right)^{\frac{1}{2}}:\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$ и $\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-1}$;

б) $100^{-\frac{1}{2}}\cdot 0{,}1^{-2}$ и $0{,}16^{\frac{1}{2}}\cdot 0{,}1^{-1}$.

2.1.24. а) $\left(\sqrt{5}-2\right)^4$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; б) $\left(\sqrt{6}-2\right)^4$ и $\left(\frac{2}{5}\right)^4$.

2.1.25.* Докажите, что:

а) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}-\sqrt{21-8\sqrt{5}}=-1$;

б) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}=3$.

2.1.26. Истинно или ложно равенство:

а) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$;

б) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$?

2.1.27. Докажите, что:

а) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{7-4\sqrt{3}}=14$; б) $\frac{1}{3\sqrt{5}+7}-\frac{1}{3\sqrt{5}-7}=3{,}5$.

2.1.28.* Докажите, что:

а) $3^{\frac{1}{1995}}+3^{-\frac{1}{1995}}>2$; б) $5^{\frac{1}{1995}}+5^{-\frac{1}{1995}}>2$.

2.1.29.* Докажите, что число:

а) $\sqrt{2}$ иррациональное; б) $\sqrt{3}$ иррациональное.

Докажите (2.1.30—2.1.31).

2.1.30. а) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}>\sqrt{35}$; б) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2}>\sqrt{33}$.

2.1.31. а) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}>2$; б) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}+\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}>2$.

Вычислите (2.1.32—2.1.37).

2.1.32. а) $(3\log_7 2-\log_7 24):(\log_7 3+\log_7 9)$;

б) $(\lg 2+3\lg 0{,}25):(\lg 14-\lg 7)$.

2.1.33. а) $\frac{\log_2^2 14+\log_2 14+\log_2 7-\log_2^2 7}{\log_2 14+\log_2 7}$;

б) $\frac{2\log_3 12-4\log_3^2 2+\log_3^2 12+4\log_3 2}{3\log_3 12+6\log_3 2}$.

2.1.34. а) $\log_3 1 - \log_4 \cos\frac{\pi}{4} \cdot \log_2 \cos\frac{\pi}{3}$;

б) $\log_2 \sin\frac{\pi}{4} - 2\log_3 \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - \log_7 \sin\frac{\pi}{2}$.

2.1.35. а) $2\log_2 6 + \log_2 \frac{35}{9} - \log_2 35$;

б) $\log_4 \frac{1}{5} + \log_4 36 + \frac{1}{2}\log_4 \frac{25}{81}$.

2.1.36. а) $2^{2-\log_2 5} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3+\log_{\frac{1}{2}} 5} + 2^{\log_{\frac{1}{2}} 8}$.

2.1.37. а) $\frac{1}{3}\left(1 + 9^{\log_3 7}\right)^{\log_{50} 3}$; б) $\frac{1}{5}\left(3 + 8^{\log_2 3}\right)^{\log_{30} 5}$.

2.1.38. а) Вычислите значение A, если $A = 4^B$, где $B = \log_2 5 + \log_{\frac{1}{4}} 10$.

б) Вычислите значение A, если $A = 5^B$, где $B = 2\log_{25} 8 + \log_{\frac{1}{5}} 5$.

2.1.39. Вычислите:

а) $2^{4\log_2 3 - 1} + 3^{2-\log_3 18} - 32{,}5$;

б) $2^{3\log_2 5 + 4} + 4^{2\log_4 3} - 2009$.

Упростите выражения (2.1.40—2.1.44).

2.1.40. а) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$; б) $\sqrt{36^{\frac{1}{\log_3 6}} + 81^{\frac{1}{\log_4 9}}}$.

2.1.41. а) $-\log_2 \log_2 \sqrt[4]{\sqrt{2}}$; б) $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

2.1.42. а) $81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8} - 49^{1-\log_7 2} + 9$;

б) $36^{\frac{1}{2} - \log_6 5} - 5^{\log_5 5} + 2^{3-\log_2 10} + 4$.

2.1.43. а) $x = \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9$;

б) $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5} \cdot \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{6} \cdot \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{7} \cdot \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{8}$.

2.1.44. а) $36^{\log_6 5} + 10^{2-\lg 4} - 4^{\log_4 49}$; б) $0{,}36^{\log_{0,6} 4} + 4^{2-\log_4 2} - 3^{\log_3 16}$.

2.1.45. Найдите $\lg A$, если:

а) $A = \frac{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt{6}}$; б) $A = \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{8}}{\sqrt{12}}$.

2.1.46. Найдите значение данного выражения:

а) $3\log_{\frac{a}{b}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}+\log_{\frac{a}{b}}b$, если $\log_a b=2$;

б) $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{4}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}}b$, если $\log_a b=6$.

2.1.47.* Найдите:

а) $\log_8 9$, если $\log_{12}18=a$;

б) $\log_9 15$, если $\log_{\sqrt[3]{45}}25=a$.

Установите, первое выражение больше, меньше или равно второму (2.1.48—2.1.51).

2.1.48. а) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}64}{\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}}$ и $\log_{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{4}\cdot\log_3 1-\log_3 9$;

б) $\log_2\sin\frac{\pi}{6}+\log_{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)\cdot\log_3 1$ и $\dfrac{\log_{\sqrt{3}}81}{\log_{\frac{1}{3}}81}$.

2.1.49. а) $\log_2\log_5\sqrt[8]{5}$ и $\log_{\frac{1}{3}}\log_3 27$;

б) $\log_3\log_7\sqrt[9]{7}$ и $\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}$.

2.1.50. а) $4^{\frac{1}{4}\log_2 3+2\log_{16}4}$ и $49^{\log_7 2-\frac{1}{2}\log_{49}64}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2+2\log_{\frac{1}{3}}6}$ и $2^{1-3\log_2 5}$.

2.1.51. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot 8^{1-\log_2 3}$ и $9^{\log_3 2+\log_{25}5}$;

б) $4^{\log_5 25-\log_4 5}$ и $4^{\log_4 10+2}$.

2.1.52. Определите знак разности:

а) $0{,}04^{1+\log_5 0{,}02}-(\sqrt{2})^{\log_5 25}$;

б) $5^{1-\log_{25}4}-81^{\log_9 3}$.

2.1.53. Упростите выражение:

а) $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 3}}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}}{674}\cdot\left(\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{2}{\log_6 5}}-64^{\frac{1}{\log_9 4}}\right)$;

б) $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{6}{\log_6 9}}}{241}\cdot\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{\log_{25}7}}-625^{\log_{25}6}\right)$.

Расположите в порядке возрастания числа (2.1.54—2.1.55).

2.1.54. а) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$; 2^{π};

б) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\log_{\frac{1}{5}}25$; $4^{\frac{1}{2}}$.

2.1.55. а) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\log_a\sqrt[3]{a^{-2}}$; $5^{-\frac{1}{2}}$; $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $\log_{\frac{1}{a}}a^2$; $4^{-\frac{1}{3}}$; $\operatorname{arctg}(-1)$.

Найдите значения выражений (2.1.56—2.1.62).

2.1.56. а) $\arcsin 1+\arccos 1+\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arcctg} 1$;

б) $\arcsin 0+\arccos 0+\operatorname{arctg} 0+\operatorname{arcctg} 0$.

2.1.57. а) $2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+3\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}(-1)-2\arccos 0$;

б) $6\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+4\arccos(-1)-\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-4\arcsin 1$.

2.1.58.* а) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\arccos\frac{3}{5}\right)$; б) $\sin\left(2\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}-\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

2.1.59.* а) $\sin\left(2\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}-\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$;

б) $\cos\left(2\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

2.1.60. а) $\frac{1-\sin^2 22°30'}{2\cos^2 15°-1}$; б) $\frac{1-\sin^2 15°}{2\cos^2\frac{\pi}{8}-1}$.

2.1.61. а) $\frac{1-\sin^2 67°30'}{2\cos^2 75°-1}$; б) $\frac{1-2\cos^2\frac{5\pi}{8}}{\sin^2 75°-1}$.

2.1.62. а) $(\operatorname{tg}255°-\operatorname{tg}555°)(\operatorname{tg}795°+\operatorname{tg}195°)$; б) $\frac{\operatorname{tg}615°-\operatorname{tg}555°}{\operatorname{tg}795°+\operatorname{tg}735°}$.

Установите, первое выражение больше, меньше или равно второму (2.1.63—2.1.68).

2.1.63. а) $\frac{\sin 10°\cdot\cos 20°+\cos 10°\cdot\sin 20°}{\cos 19°\cdot\cos 11°-\sin 19°\cdot\sin 11°}$ и $\frac{\sin 39°\cdot\cos 9°-\cos 39°\cdot\sin 9°}{\cos 47°\cdot\cos 17°+\sin 47°\cdot\sin 17°}$;

б) $\frac{\cos 72°\cdot\cos 12°+\sin 72°\cdot\sin 12°}{\sin 35°\cdot\cos 25°+\cos 35°\cdot\sin 25°}$ и $\frac{\cos 41°\cdot\cos 19°-\sin 19°\cdot\sin 41°}{\sin 62°\cdot\cos 2°-\cos 62°\cdot\sin 2°}$.

2.1.64. а) $\dfrac{\sin 50^\circ - \sin 25^\circ}{1 - \cos 25^\circ + \cos 50^\circ}$ и $\dfrac{\sin 25^\circ \cdot \cos 5^\circ - \cos 25^\circ \cdot \cos 85^\circ}{\cos 375^\circ \cdot \cos 5^\circ - \sin 15^\circ \cdot \sin 5^\circ}$;

б) $\dfrac{\cos 70^\circ + \sin 140^\circ}{1 + \sin 70^\circ - \cos 140^\circ}$ и $\dfrac{\cos 25^\circ \cdot \cos 15^\circ + \sin 25^\circ \cdot \cos 105^\circ}{\sin 175^\circ \cdot \cos 35^\circ + \cos 5^\circ \cdot \sin 35^\circ}$.

2.1.65. а) $\dfrac{1 + \cos 40^\circ + \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}$ и $\dfrac{\cos 105^\circ \cdot \cos 5^\circ + \sin 105^\circ \cdot \cos 85^\circ}{\sin 95^\circ \cdot \cos 5^\circ - \cos 95^\circ \cdot \sin 185^\circ}$;

б) $\dfrac{1 - \sin 50^\circ - \cos 100^\circ}{\sin 100^\circ - \cos 50^\circ}$ и $\dfrac{\sin 125^\circ \cdot \cos 25^\circ + \cos 125^\circ \cdot \cos 115^\circ}{\sin 115^\circ \cdot \sin 15^\circ - \cos 115^\circ \cdot \sin 195^\circ}$.

2.1.66.* а) $8\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 10^\circ$ и $\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ$;

б) $\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ$ и $8\sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ$.

2.1.67. а) $2\sin(\pi + \alpha)$ и $2 - \sin 2\alpha$ при $\alpha = \dfrac{13\pi}{4}$;

б) $\cos 2\alpha$ и $1 + 2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$ при $\alpha = -4\dfrac{1}{3}\pi$.

2.1.68.* а) $\dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$ и $\dfrac{\sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$;

б) $\dfrac{2\cos 80^\circ + \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}$ и $\dfrac{\cos 50^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \sin 70^\circ}$.

Докажите (2.1.69—2.1.76).

2.1.69. а) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2\sin\alpha} \cdot \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

б) $\dfrac{2\cos^2\alpha - \sin 2\alpha}{2\cos\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$.

2.1.70. а) $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$;

б) $\dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} + \dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{\cos\alpha}$.

2.1.71. а) $\left(\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = \dfrac{\sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \dfrac{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

2.1.72. а) $\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = -2\operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$;

б) $\sqrt{\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} = 2\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

2.1.73. а) $\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)}=\sin\alpha\,,\quad \alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right);$

б) $\sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-1\right)\left(1-\cos^2\alpha\right)}=-\cos\alpha\,,\quad \alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right).$

2.1.74. а) Если $\sin^2\alpha+\cos^2\beta>1$, то $\cos^2\alpha+\sin^2\beta<1$.

б) Если $\sin^2\alpha-\cos^2\beta>1$, то $\cos^2\alpha-\sin^2\beta<-1$.

2.1.75. а) Если $\sin t+\cos t=m$, то $\sin 2t=m^2-1$.

б) Если $\sin t-\cos t=m-1$, то $\sin 2t=2m-m^2$.

2.1.76. а) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$

$=-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha);$

б) $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}(3\alpha-\pi)=$

$=\cos(\pi-\alpha)\cdot\sin(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right).$

Упростите выражения (2.1.77—2.1.82).

2.1.77. а) $\frac{\sin(1{,}5\pi-x)-\cos(\pi+3x)}{1-\cos(-2x)}$; б) $\frac{\cos(0{,}5\pi+6x)+\sin(2\pi-2x)}{1-\cos(-4x)}$.

2.1.78. а) $\frac{\sin(0{,}5\pi+x)-\cos(\pi-3x)}{1-\cos(-2x)}$; б) $\frac{\cos(1{,}5\pi+6x)-\sin(-2x)}{1+\cos(-4x)}$.

2.1.79. а) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)}-\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(2\pi-\beta)\cdot\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}$;

б) $\frac{\cos(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}-\frac{\cos(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

2.1.80. а) $\frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha-2\pi)}+\frac{\sin^2(-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}$;

б) $\frac{\cos^2(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}+\frac{\sin^2(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^2(-\alpha)}$.

2.1.81. а) $\dfrac{\sin 24^\circ \cdot \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \cdot \sin 66^\circ}{\sin 21^\circ \cdot \cos 39^\circ - \cos 51^\circ \cdot \sin 69^\circ}$; б) $\dfrac{\cos 54^\circ \cdot \cos 7^\circ - \cos 36^\circ \cdot \sin 7^\circ}{\sin 73^\circ \cdot \cos 44^\circ - \cos 73^\circ \cdot \cos 46^\circ}$.

2.1.82. а) $\dfrac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\cos\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \dfrac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$; б) $\dfrac{2\cos\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \dfrac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

2.1.83. Укажите множество значений α, при которых значение данного выражения равно b:

а) $\dfrac{2\cos\alpha - \sin 2\alpha}{\sin^2\alpha - \sin\alpha + \cos^2\alpha}$, $b = -1$;

б) $\dfrac{-\sin 2\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$, $b = 1$.

Упростите выражение и найдите его значение при данном значении переменной (2.1.84—2.1.87).

2.1.84. а) $\dfrac{\sin(0{,}5\pi + x) + \cos(\pi - 3x)}{1 - \cos(-2x)}$, $x = \dfrac{4\pi}{3}$;

б) $\dfrac{\cos(1{,}5\pi + 6x) - \sin(-2x)}{1 + \cos(-4x)}$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

2.1.85. а) $\sin(0{,}5\pi + 5x)\cdot\cos 3x - \sin 3x \cdot \sin(\pi + 5x)$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$;

б) $-\cos(1{,}5\pi - 5x)\cdot\cos 3x - \cos 5x \cdot \sin(\pi - 3x)$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

2.1.86. а) $\cos(2\pi - 3x)\cdot\cos x + \sin 3x \cdot \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$, $x = \dfrac{\pi}{3}$;

б) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)\cdot\cos 3x - \sin(\pi + 3x)\cdot\cos x$, $x = \dfrac{\pi}{6}$.

2.1.87. а) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} - \sin^2 x$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$;

б) $\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \cos^2 x$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

Упростите (2.1.88—2.1.89).

2.1.88. а) $1 - \sin\left(\dfrac{x}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\dfrac{x}{4} + \sin^2\dfrac{x}{4}$;

б) $\cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2} + 1 - \sin(x - 2\pi)$.

2.1.89. а) $2 - 4\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; б) $4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2$.

Докажите тождества (2.1.90—2.1.91).

2.1.90. а) $\dfrac{\sqrt{ab}\cdot\sqrt[4]{a}}{(a+2)\sqrt[4]{a^{-1}b^2}}-\dfrac{a^2+4}{a^2-4}=\dfrac{2}{2-a}$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt[6]{b}}{(b+3)\sqrt[6]{a^4b^{-3}}}-\dfrac{b^2+9}{b^2-9}=\dfrac{3}{3-b}$.

2.1.91. а) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}\cdot b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}=0$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{m^2}-2m^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{1}{3}}+4\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{m^4}+8\sqrt[3]{m}\cdot n}\cdot\left(1+\dfrac{2n^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{1}{3}}}\right)=\dfrac{1}{m^{\frac{2}{3}}}$.

2.1.92. Упростите и найдите значение:

а) $\dfrac{1-b^{-1}+b^{-2}}{1-b+b^2}$, $b=\left(\sqrt{5}\right)^{-1}$; б) $\dfrac{a^2-a+1}{a^{-2}-a^{-1}+1}$, $a=\sqrt{3}$.

Найдите значения выражений (2.1.93—2.1.96).

2.1.93.* а) $\dfrac{a^2-4}{a\cdot\sqrt{\left(\dfrac{a^2+4}{2a}\right)^2-4}}$ при $a<-2$;

б) $\dfrac{m^2-9}{m\cdot\sqrt{\left(\dfrac{m^2+9}{3m}\right)^2-4}}$ при $m<-3$.

2.1.94. а) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{3}{2}}+x+x^{\frac{1}{2}}}:\dfrac{1}{x^2-x^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{a^2+a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{3}{2}}-a+a^{\frac{1}{2}}}$.

2.1.95. а) $\dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+\left(\sqrt{a}\right)^{-1}}+\dfrac{1+\sqrt{a^{-1}}}{1-a^{-\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{1+\sqrt{x^{-1}}}{x^{-\frac{1}{2}}-1}+\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}-1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^{-1}}$.

2.1.96. а) $\dfrac{3^{-1}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}}{2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}\cdot\left(5^0-\dfrac{1}{6}\right)^{-1}+2\cdot10^{-1}$;

б) $\dfrac{2^{-2}-\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-1}}{3-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}}\cdot\left(3^0-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}-5\cdot4^{-1}$.

2.1.97. Выясните, что больше:

а) $\log_2 \frac{1}{5}$ или $\log_3 \frac{1}{5}$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ или $\log_{\frac{1}{5}} 2$.

2.1.98. Найдите x, если:

а) $\lg x = \frac{2}{3}(\lg a - \lg c) - \lg(a - c)$;

б) $\lg x = \frac{3}{4}\left(\lg b - \frac{1}{3}\lg a\right) + \lg(b + a)$.

2.1.99. Вычислите:

а) $\log_3 \operatorname{tg} 30° - \log_2 \cos\frac{\pi}{3}$; б) $\log_2 \cos\frac{\pi}{4} - \log_3 \operatorname{ctg} 30°$.

2.2. Уравнения и системы уравнений

Решите уравнения (2.2.01—2.2.13).

2.2.01. а) $\frac{x+4}{x-2} = \frac{x^2 - 7x + 10}{x-5}$; б) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x-3}$.

2.2.02. а) $\frac{2x-3}{x-1} = \frac{3x - 2x^2}{x}$; б) $\frac{6x-8}{x-2} = \frac{4x - 3x^2}{x}$.

2.2.03. а) $\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} = \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$; б) $\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2x + 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$.

2.2.04. а) $\sqrt{x+5} = x + 2$; б) $\sqrt{2x+5} = x + 1$.

2.2.05. а) $\sqrt{2x+1} = 3x - 1$; б) $\sqrt{x+9} = 2x - 3$.

2.2.06. а) $x + 1 = \sqrt{5 + 2x - x^2}$; б) $x - 1 = \sqrt{7 - 2x - x^2}$.

2.2.07. а) $x - 2 = \sqrt{14 - 4x - x^2}$; б) $x + 2 = \sqrt{16 + 4x - x^2}$.

2.2.08. а) $1 - 2x + 3\sqrt{1 - 2x} = 4$; б) $3x + 1 + 5\sqrt{3x+1} = 6$.

2.2.09. а) $8 - 2x = 15 + \sqrt{4 - x}$; б) $x + 3 = 6 - \sqrt{x+3}$.

2.2.10. а) $x^2 = 5 + \sqrt{x^2 - 3}$; б) $\sqrt{x^2 + 7} + 5 = x^2$.

2.2.11. а) $\sqrt{13 - x^2} + 1 = x^2$; б) $x^2 = 3 + \sqrt{2x^2 + 18}$.

2.2.12. а) $\left(\sqrt{5x-6} - x\right)\cdot\left(x^2 - 9\right) = 0$;

б) $\left(x^2 - 4\right)\cdot\left(\sqrt{14 + 5x} - x\right) = 0$.

2.2.13. а) $\left(x^2 - 9\right)\cdot\left(\sqrt{6 - 5x} - x\right) = 0$;

б) $\left(x^2 - 4\right)\cdot\left(\sqrt{3 - 2x} - x\right) = 0$.

2.2.14. Найдите абсциссы всех точек пересечения графиков функций f и g:

а) $f(x) = x$, $g(x) = 1 + \sqrt{3x + 7}$;

б) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{3x + 7} - 1$.

2.2.15. Найдите координаты общих точек данной прямой и графика функции f:

а) $f(x) = \sqrt{x + 7}$, $y - x - 1 = 0$;

б) $f(x) = \sqrt{x - 4}$, $y - 2x + 9 = 0$.

2.2.16. Найдите координаты всех точек пересечения графиков функций f и g:

а) $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{2x^2 - 2x - 3}$;

б) $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{2x^2 - 6x - 7}$.

2.2.17.* При каких значениях a число m является корнем уравнения:

а) $\sqrt{x - a} = 3a - x$, $m = 2$; б) $3\sqrt{a - x} = 2a - x$, $m = -2$?

2.2.18.* При каких значениях a число n является корнем уравнения:

а) $\sqrt{4x - 5a} = 2a - x$, $n = 1$; б) $\sqrt{5x - 11a} = 3a - x$, $n = 1$?

2.2.19.* При каком значении a число n является корнем данного уравнения:

а) $-\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 14} = \sqrt{4x + a}$, n=4;

б) $-\sqrt{9 - x} + \sqrt{4 + x} = \sqrt{2x - a}$, n=5?

Существуют ли другие корни при найденном значении a?

Найдите координаты всех точек графика функции f, равноудаленных от осей координат (2.2.20—2.2.21).

2.2.20.* а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + x - 2$;

б) $f(x) = \sqrt{x^2 + 10x + 34} + x - 3$.

2.2.21.* а) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x - 1} - 1$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 8} - x - 2$.

Решите системы уравнений (2.2.22—2.2.28).

2.2.22. а) $\begin{cases} \sqrt{x + y} = 7, \\ \sqrt{x - y} = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x - y} = 3, \\ 2x - 3y = 213. \end{cases}$

2.2.23. а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=11,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=1,\\ 11\sqrt{x}-7\sqrt{y}=-1.\end{cases}$

2.2.24.* а) $\begin{cases}2\sqrt{y+2x}-\sqrt{y-x}=2x,\\ \sqrt{y+2x}+\sqrt{y-x}=y;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{y+x}+\sqrt{2y-x}=y,\\ 2\sqrt{y+x}-\sqrt{2y-x}=x.\end{cases}$

2.2.25.* а) $\begin{cases}\sqrt[4]{y+x}-\sqrt[4]{x-y}=2,\\ \sqrt{y+x}+\sqrt{x-y}=8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt[4]{y+x}+\sqrt[4]{x-y}=4,\\ \sqrt{y+x}-\sqrt{x-y}=8.\end{cases}$

2.2.26. а) $\begin{cases}x^2-y=0{,}75,\\ y^2+x=\frac{3}{4};\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+xy=4y,\\ y^2+xy=4x.\end{cases}$

2.2.27. а) $\begin{cases}\frac{1}{x+3y}+y=5,\\ \frac{y}{x+3y}=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{1}{x-y}+x+1=0,\\ \frac{x}{x-y}+2=0.\end{cases}$

2.2.28. а) $\begin{cases}\frac{1}{2x-3y}+\frac{2}{3x-2y}=\frac{3}{4},\\ \frac{3}{2x-3y}-\frac{4}{3x-2y}=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{1}{x+y}+\frac{10}{x-y}=1,\\ \frac{1}{x+y}-\frac{2}{x-y}=-\frac{3}{5}.\end{cases}$

Решите уравнения (2.2.29—2.2.34).

2.2.29. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\cos(\pi+x)=0$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos(\pi-2x)=0$.

2.2.30. а) $3\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+5\cos(\pi+x)=1$;

б) $5\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+21\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=13$.

2.2.31. а) $\sqrt{3}\sin x=\sin 2x$; б) $\sin 2x=\sqrt{2}\cos x$.

2.2.32. а) $2\sin 3x\cdot\cos x=\sqrt{3}-2\cos 3x\cdot\sin x$;

б) $2\cos 3x\cdot\cos x=2\sin x\cdot\sin 3x-1$.

2.2.33. а) $\sin 3x+\sin x=\sin 2x$;

б) $\cos 5x-\cos 3x=\sin 4x$.

2.2.34. а) $\frac{7\sin x-\cos x}{2\sin x+\cos x}=2$; б) $\frac{2\sin x+\cos x}{5\sin x+\cos x}=\frac{1}{4}$.

Найдите абсциссы общих точек графиков данных функций (2.2.35—2.2.36).

2.2.35. а) $y = -3\sin 2x$, $y = \cos 2x + 1$;

б) $y = \sin^2 x$, $y = \frac{1}{4} - \cos 2x$.

2.2.36. а) $y = 2\cos^2(\pi + x)$, $y = 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$;

б) $y = 3\sin 2x$, $y = 2 + 2\cos 2x$.

При каких значениях x функции f и g принимают равные значения (2.2.37—2.2.38)?

2.2.37.* а) $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$, $g(x) = 2\sin 2x - \frac{3}{4}\sin^2 2x$;

б) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $g(x) = \sin 2x - \frac{1}{2}$.

2.2.38.* а) $f(x) = \cos x + \cos 7x$, $g(x) = -\cos 4x$;

б) $f(x) = \sin 5x + \cos 3x$, $g(x) = \sin x$.

Найдите все значения x, при которых значение данного выражения равно a (2.2.39—2.2.40).

2.2.39. а) $12\cos^4 x - \cos 2x$, $a = 3$; б) $8\sin^4 x + 13\cos 2x$, $a = 7$.

2.2.40. а) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $a = \frac{1}{4}$;

б) $8\cos^4 x - 11\cos 2x$, $a = -1$.

Найдите все x, при которых равны значения данных выражений. Равны ли их значения при $x = a$ (2.2.41—2.2.42)?

2.2.41. а) $\sin 2x + \cos 2x$ и $1 + \sin 4x$, $a = -\frac{19\pi}{4}$;

б) $5 + 5\sin 4x$ и $12(\sin x + \cos x)^2 - 7$, $a = -\frac{13\pi}{4}$.

2.2.42. а) $\sin^2 x - 1$ и $\sin^2 2x$, $a = -\frac{7\pi}{6}$;

б) $\cos 4x - 1$ и $2\cos^2 x$, $a = \frac{19\pi}{6}$.

Решите уравнение и укажите те решения, которые удовлетворяют данному условию (2.2.43—2.2.45).

2.2.43. а) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$, $\sin x > 0$;

б) $5\sin^2 x + 8\cos x = 8$, $\sin x \le 0$.

2.2.44. а) $\cos 5x - \cos x = \sin 3x$, $\cos x > 0$;

б) $5\cos^2 x - 9\sin x = 9$, $\cos x \le 0$.

2.2.45. а) $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+5\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+2=0$, $\sin x>0$;

б) $2\sin^2(\pi+2x)-\cos 2x+1=0$, $\cos x<0$.

Найдите решения уравнения, принадлежащие заданному промежутку (2.2.46—2.2.48).

2.2.46. а) $5-5\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\cos^2(\pi-x)$, $[\pi;\,5\pi]$;

б) $\cos^2 x-\cos 2x=\sin x$, $[-\pi;\,2\pi]$.

2.2.47. а) $2\sin^3 x+\cos x\cdot\sin 2x=-1$, $[0;\,2\pi]$;

б) $2\cos^3 x+\sin 2x\cdot\sin x=1$, $[-\pi;\,3\pi]$.

2.2.48. а) $\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x=\sin^2 x$, $\left(-\frac{\pi}{2};\,\frac{3\pi}{2}\right)$;

б) $\sin x\cdot\cos x=\sqrt{3}\cos^2 x$, $(-\pi;\,\pi)$.

Сколько решений имеет уравнение на данном промежутке (2.2.49—2.2.51)?

2.2.49. а) $5\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x+6\cos^2 x=5$, $(-3\pi;\,3\pi)$;

б) $7\cos^2 x+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\cdot\cos x=7-8\sin^2 x$, $(0;\,5\pi)$.

2.2.50. а) $\sin x\cdot\operatorname{ctg} x+\cos^2 x-\cos^2 3x=\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)-1$,

$\left(-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right)$;

б) $5\sin^2 x-1+\sin^2 6x=-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-6x\right)+5\cos x\cdot\operatorname{tg} x$,

$(0;\,2\pi)$.

2.2.51. а) $2\cos 2x+5=7\cos x-2\cdot\sin^2 x$, $(-20\pi;\,30\pi)$;

б) $3\cos 2x-7\sin x=3\cos^2 x-10$, $(-30\pi;\,20\pi)$.

Решите уравнения (2.2.52—2.2.54).

2.2.52.* а) $\sin 3x\cdot\sqrt{4-x^2}=0$; б) $(\cos 2x-1)\cdot\sqrt{9-x^2}=0$.

2.2.53.* а) $\sin 2x\cdot\sqrt{7+6x-x^2}=0$;

б) $(1+\cos 3x)\cdot\sqrt{5+4x-x^2}=0$.

2.2.54.* а) $\sqrt{6-x-x^2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x^2\pi}{4}=0$;

б) $\sqrt{3-2x-x^2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x^2\pi}{3}=0$.

Решите системы уравнений (2.2.55—2.2.56).

2.2.55.* а) $\begin{cases}\sin x \cdot \cos y = 0{,}25,\\ \sin y \cdot \cos x = 0{,}75;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sin x \cdot \sin y = 0{,}75,\\ \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y = 3.\end{cases}$

2.2.56.* а) $\begin{cases}\sin x + 2\cos y = 2,\\ -\sin x + 3\cos y = 0{,}5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3\sin x + \cos y = 3{,}5,\\ \sin x - \cos y = 0{,}5.\end{cases}$

Решите уравнения (2.2.57—2.2.66).

2.2.57. а) $0{,}9^{3x^2-2} = \left(\frac{10}{9}\right)^{2x-3}$; б) $2{,}5^{4x^2+3x} = 0{,}4^{4x+3}$.

2.2.58. а) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$; б) $3^x + 9^{x-1} - 810 = 0$.

2.2.59. а) $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$; б) $15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{2-x} = 135$.

2.2.60. а) $\frac{5x^2 - 13x - 6}{2^x - 8} = 0$; б) $\frac{4x^2 + 3x - 10}{3^x - \frac{1}{9}} = 0$.

2.2.61. а) $3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x$; б) $3^{x+4} + 3 \cdot 5^{x+3} = -3^{x+2} + 5^{x+4}$.

2.2.62. а) $7^{\frac{2+x}{x}} \cdot 2^{\frac{x}{2}} = 98$; б) $5^x \cdot 3^{\frac{2+x}{x}} = 135$.

2.2.63.* а) $5^{3x} + 5^{2x+1} \cdot 2^x - 5^x \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 8^x = 0$;

б) $3^{3x} + 5 \cdot 36^x - 4^{2x} \cdot 3^x - 5 \cdot 64^x = 0$.

2.2.64. а) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$; б) $3^{2\sqrt{x}} + 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 5 = 0$.

2.2.65.* а) $3^{3x} - 3^{x+1} \cdot 2^{2x} + 18^x - 3 \cdot 8^x = 0$;

б) $4^{3x} - 4^{x+1} \cdot 5^{2x} + 80^x - 4 \cdot 125^x = 0$.

2.2.66.* а) $2 \cdot 5^{2x^2} + 5^{(x+6)(x-1)} - 3 \cdot 5^{10x-12} = 0$;

б) $3^{2x^2+7} + 3^{(x+3)(x+1)} - 4 \cdot 3^{8x} = 0$.

Вычислите ординату точки пересечения графиков функций (2.2.67—2.2.69).

2.2.67. а) $y = 0{,}7^{5x-3}$ и $y = \left(\frac{10}{7}\right)^x$; б) $y = 0{,}3^{2x-3}$ и $y = \left(\frac{10}{3}\right)^{2x-1}$.

2.2.68. а) $y = 4^x - 24$ и $y = 10 \cdot 2^{x-1}$; б) $y = 9^x - 3$ и $y = 2 \cdot 3^x$.

2.2.69. а) $y = 8 \cdot 4^x$ и $y = 2 \cdot 2^x + 1$; б) $y = 64^x$ и $y = 8^x + 56$.

2.2.70. Вычислите абсциссу всех общих точек пересечения графиков функций:

а) $f(x) = 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x$ и $g(x) = 5 \cdot 36^x$;

б) $f(x) = 9^x + 6^x$ и $g(x) = 2^{2x+1}$.

2.2.71. Дана функция $f(x)$, решите уравнение $f(x)=a$:

а) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$, $a=-3$;

б) $f(x)=9^x-3^{x+1}$, $a=-2$.

Решите системы уравнений (2.2.72—2.2.76).

2.2.72. а) $\begin{cases}3^x\cdot 3^y=81,\\ 3^x-3^y=80;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5^x\cdot 5^y=125,\\ 5^x+5^y=30.\end{cases}$

2.2.73. а) $\begin{cases}3\cdot 2^x-2^{x+y}=-2,\\ 5\cdot 2^{x+1}-2^{x+y-1}=16;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3^x+3^y=36,\\ 3^{2x-y}+3^x=12.\end{cases}$

2.2.74. а) $\begin{cases}3^{2x}-2^y=725,\\ 3^x-2^{\frac{y}{2}}=25;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5^{2x}-4^y=609,\\ 5^x-4^{\frac{y}{2}}=21.\end{cases}$

2.2.75. а) $\begin{cases}2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6,\\ x^2+5y^2=6xy;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3^{\frac{x}{4}\cdot\frac{y}{2}}+3^{\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}}=12,\\ x^2-5y^2=4xy.\end{cases}$

2.2.76. а) $\begin{cases}3^x\cdot 9^y=3,\\ \frac{2^{y-x}}{2^x}=\frac{1}{64};\end{cases}$ б) $\begin{cases}2^y\cdot 2^x=\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \frac{3^y}{3^{x-y}}=81.\end{cases}$

Решите уравнения (2.2.77—2.2.82).

2.2.77. а) $\log_3(x^2-3x-5)=\log_3(7-2x)$;

б) $\log_2(2x^2+11x+12)=\log_2(9x+16)$.

2.2.78. а) $\log_5(x-4)+\log_5 x=\log_5(x+14)$;

б) $\log_2(x+3)+\log_2(x-1)=2+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$.

2.2.79. а) $\lg^2 10x+\lg x=19$; б) $\log_3^2 x-3\log_3 x+5=3^{\log_3 9}$.

2.2.80. а) $\log_{3x+5}(7x-3)+\log_{7x-3}(3x+5)=2$;

б) $\log_{5x+3}(3x+7)+\log_{3x+7}(5x+3)=2$.

2.2.81. а) $\log_2\sqrt{x-4}+\log_2\sqrt{2x-1}=\log_2 3$;

б) $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30$.

2.2.82. а) $(3x^2-5x-2)\log_3(5-4x)=0$;

б) $(4x^2+5x-6)\log_2(2x-6)=0$.

2.2.83. Найдите произведение корней уравнения:

а) $(2x^2 - 5x - 7)\log_2(3 - 2x) = 0$;

б) $(3x^2 + 4x - 7)\log_5(3 + 2x) = 0$.

Вычислите абсциссы всех точек пересечения графиков функций (2.2.84—2.2.86).

2.2.84. а) $y = \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + x - \frac{7}{4}\right)$ и $y = \log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{4}$;

б) $y = \log_2\left(x^2 + 2x - \frac{5}{2}\right)$ и $y = \log_2\frac{x}{2}$.

2.2.85. а) $y = \log_3(2x^2 + x - 1)$ и $y = 1 + \log_3(5 - x)$;

б) $y = \log_4\frac{3x - 1}{4 - x}$ и $y = 2 - \log_4(x - 1)$.

2.2.86. а) $y = 3\log_2^2 \sin x$ и $y = 2 - \log_2(1 - \cos 2x)$;

б) $y = 4\log_2^2 \cos x + 3\log_2(1 + \cos 2x)$ и $y = 4 + 3\log_2 \cos x$.

2.2.87.* Дана функция $f(x)$, решите уравнение $f(x) = f(x + a)$:

а) $f(x) = \log_2(x - x^2 + 12)$, $a = -2$;

б) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x - 2)$, $a = 3$.

Решите системы уравнений (2.2.88—2.2.95).

2.2.88. а) $\begin{cases}\log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 5,\\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{15};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{1}{2}\log_2 x - \log_4 y = 0,\\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0.\end{cases}$

2.2.89. а) $\begin{cases}\lg(x + 1) + \lg(y - 3) = \lg 2,\\ 3x - 2y = 2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log_6(x - 2) = 2 - \log_6(y - 3),\\ x - y = 4.\end{cases}$

2.2.90. а) $\begin{cases}\log_4(x + 2y) = 1,\\ 2^{x-y} = 8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_3(x + y) = 1,\\ 4^{x+2y} = 2^{7+y}.\end{cases}$

2.2.91. а) $\begin{cases}\lg^2 x - \lg^2 y = 1,\\ \log_2 x - \log_2 y = 1 + \log_2 5;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\lg^2 x + \lg^2 y = 2{,}5\lg^2 100,\\ \log_2 x + \log_2 y = 2 + 2\log_2 5.\end{cases}$

2.2.92. а) $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2,\\ x^2+y=12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=\frac{26}{5},\\ xy=64.\end{cases}$

2.2.93. а) $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50,\\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5;\end{cases}$

б) $\begin{cases}8\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-y}=0{,}5^{y-3},\\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3.\end{cases}$

2.2.94. а) $\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=\log_2 3+2,\\ 3^{\log_3(x+y)}=3{,}5\log_3 9;\end{cases}$

б) $\begin{cases}3^{1+\log_3(x+y)}=15,\\ \log_5(x+y)+\log_5(x-y)=1.\end{cases}$

2.2.95. а) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=\lg 2+\lg 17,\\ 10^{\lg x+\lg y}=15;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=1,\\ 3^{x-y}=\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}.\end{cases}$

2.2.96.* Найдите все значения a, при которых уравнение имеет единственное решение:

а) $(x-a)\log_2 x=0$; б) $(y+a)\log_3 y=0$.

2.3. Неравенства и системы неравенств

Решите неравенства (2.3.01—2.3.10).

2.3.01. а) $(x+5)\sqrt{x^2-4x+3}\ge 0$; б) $(x-8)\sqrt{x^2-3x+2}\ge 0$.

2.3.02.* а) $\sqrt{2x-x^2}<5-x$; б) $\sqrt{2x^2-2x}<x-1$.

2.3.03.* а) $\sqrt{x+18}>2-x$; б) $\sqrt{x+7}>x+1$.

2.3.04. а) $\left(x^2-9\right)\sqrt{x+2}\ge 0$; б) $\left(x^2-1\right)\sqrt{4-x^2}\ge 0$.

2.3.05. а) $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}<0$; б) $\frac{x-7}{2\sqrt{x^2-4x+3}}<0$.

2.3.06.* а) $\frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{7-x}\le 0$; б) $\frac{\sqrt{x^2+12x+36}}{x-2}\ge 0$.

2.3.07.* а) $\frac{\sqrt{21-4x-x^2}}{x-2}<1$; б) $\frac{1-\sqrt{8-x^2}}{2x}<1$.

2.3.08. а) $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 4} < 0$; б) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} < 0$.

2.3.09. а) $x - 7 + \dfrac{16}{x + 1} \le 0$; б) $x - 3 + \dfrac{1}{x - 1} \le 0$.

2.3.10. а) $(4 - x)(2x + 3) < (x - 4)^2$; б) $2(1 - x)^2 < (1 - x)(x - 2)$.

Решите системы неравенств (2.3.11—2.3.12).

2.3.11. а) $\begin{cases} (x - 3)(x - 1) > 0, \\ x^2 - 4x + 3 \le 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x - 2)(x - 5) > 0, \\ x^2 - 6x - 2 \le 5. \end{cases}$

2.3.12. а) $\begin{cases} \dfrac{(x - 3)^2}{(x - 3)(x + 1)} \ge 0, \\ (x - 4)(x + 4) > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{(x + 4)^2}{(x + 4)(x - 2)} \le 0, \\ x(x - 5) < 0. \end{cases}$

2.3.13. Решите двойное неравенство и укажите наибольшее целое решение:

а) $-2 < 3x - 5 < 4$; б) $-2 \le 4 - 2x \le 2$.

2.3.14. а) При каких x график функции $y = x + \dfrac{4}{x + 1}$ расположен выше прямой $y = 3$?

б) При каких x график функции $y = x + \dfrac{4}{x - 1}$ расположен ниже прямой $y = -3$?

2.3.15. а) Найдите наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{-x^2 - 2x + 3}{(x + 5)(3 - x)} < 0$.

б) Найдите наименьшее целое число, при котором функция $y = \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{(2 - x)(x - 5)}$ принимает положительные значения.

2.3.16.* Для каждого значения параметра a найдите все решения неравенства:

а) $(5 - x)\sqrt{x - a} \le 0$; б) $(x - a)\sqrt{x - 2} \ge 0$;

Для каждого значения параметра решите неравенство и приведите геометрическую интерпретацию полученного решения (2.3.17—2.3.19).

2.3.17. а) $|x - 2| < a$; б) $|x + 1| + a > 0$.

2.3.18. а) $|x - a| < 2$; б) $|x - a| < x$.

2.3.19. а) $|x| > ax^2$; б) $ax > |x-1|$.

2.3.20.* Определите, при каких значениях a корни уравнения $x^2 - 2(a-1)x + a + 5 = 0$:

а) положительные; б) отрицательные.

2.3.21.* а) Найдите все значения p для которых неравенство $(p+4)x^2 - 2px + 2p - 6 < 0$ выполняется при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

б) Определите, при каких значениях k неравенство $(k+1)x^2 + 2(k+1)x + 9k - 5 > 0$ выполняется при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств. Укажите какие-либо два решения (2.3.22—2.3.25).

2.3.22. а) $\begin{cases} xy \le 9, \\ x + 4 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3 < 0, \\ xy \le -1. \end{cases}$

2.3.23. а) $\begin{cases} y \ge x + 2, \\ y \le 2x - 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y + 1 < 0, \\ 9x - 3y - 2 < 0. \end{cases}$

2.3.24. а) $\begin{cases} x + y > 4, \\ x - y < 4, \\ 3x + 8 > 4 - y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y < x + 3, \\ x + y < 3, \\ y > 1. \end{cases}$

2.3.25. а) $\begin{cases} y > x^2, \\ 3y - x < 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y > x^2 - 5x + 6, \\ y < 4. \end{cases}$

Решите неравенства и приведите геометрическую интерпретацию полученного решения (2.3.26—2.3.28).

2.3.26. а) $1 - x \ge \sqrt{3 - x}$; б) $\sqrt{6 + x} \ge x$.

2.3.27. а) $|1 - x| < 2$; б) $|2x + 1| > 1$.

2.3.28. а) $|x| + |x + 1| \le 1$; б) $|2 + x| < |x - 1|$.

2.3.29. Решите неравенство:

а) $\left|\frac{x-3}{x+4}\right| < 1$; б) $\left|\frac{2x+1}{x-1}\right| > 2$.

Решите неравенства (2.3.30—2.3.53).

2.3.30. а) $\cos x + \frac{1}{2} \le 1$; б) $\sin x - \frac{11}{2} > -5$.

2.3.31. а) $2 - 2\cos x < 1$; б) $4\sin x + \sqrt{12} \le 0$.

2.3.32. а) $\frac{1}{3}\sin 3x > \frac{1}{\sqrt{12}}$; б) $2\cos 2x \le \frac{2}{\sqrt{2}}$.

2.3.33. а) $5\cos x - 6 \geq 0$; б) $-2\sin x - 3 > 0$.

2.3.34. а) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$; б) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < -1$.

2.3.35. а) $4\operatorname{tg} x - \sqrt{48} < 0$; б) $\frac{1}{3}\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sqrt{27}} > 0$.

2.3.36. а) $\cos^2 x + 3\cos x > 0$; б) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 > 0$.

2.3.37. а) $\sin^2 x - 4\sin x < 0$; б) $2\cos x - \cos^2 x > 0$.

2.3.38. а) $5\cos x > \sqrt{75}$; б) $\sqrt{45} + 3\sin x \leq 0$.

2.3.39. а) $\sin(5x - 1) > \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\cos(6 - 2x) - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$.

2.3.40. а) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1} \geq 5^{2-x}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} > 4^{2x-1}$.

2.3.41. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} - 2 \cdot 3^{1-x} \leq -135$; б) $7 \cdot 0{,}25^{x} - 4^{2-x} \leq -144$.

2.3.42. а) $\sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}} < \frac{1}{8}$; б) $2^{x^2-6x+0,5} \leq \left(16\sqrt{2}\right)^{-1}$.

2.3.43. а) $3^{x+1} - 3^{x-1} \leq 90$; б) $5^{x} - 5^{x+2} \geq -120$.

2.3.44. а) $x^2 \cdot 5^{x} - 5^{x+2} > 0$; б) $x^2 \cdot 3^{x} - 3^{x+2} < 0$.

2.3.45. а) $0{,}5^{x+2} - 0{,}5^{x} \cdot x^2 < 0$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x} \cdot x^2 > 0$.

2.3.46. а) $2^{\frac{3}{x}} \geq 0{,}5^{x-4}$; б) $5^{\frac{2}{x}} \leq 0{,}2^{x-3}$.

2.3.47. а) $3^{2x+1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} \leq 315$; б) $7^{2x-1} + 7^{2x-2} - 7^{2x-4} \leq 391$.

2.3.48. а) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$;

б) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} < 7^{x+2} - 7^{x+1}$.

2.3.49. а) $0{,}25^{2,5-0,5x^2} > \frac{1}{16}$; б) $5 \cdot 0{,}04^{5-4x} < 25^{3-x}$.

2.3.50. а) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x} + 2 \leq 0$; б) $0{,}04^{x} - 2 \cdot 0{,}2^{x} < 15$.

2.3.51. а) $4^{x} - 3 \cdot 2^{x} - 4 < 0$; б) $0{,}04^{x} - 4 \cdot 0{,}2^{x} \leq 5$.

2.3.52. а) $5 - 16^{x} > 4^{x+1}$; б) $9^{x} > 4 - 3^{x+1}$.

2.3.53. а) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$;

б) $-2 \cdot 9^{x} < 6 - 8 \cdot 3^{x}$.

2.3.54. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

а) $\frac{x^2 \cdot 7^{x} - 7^{2+x}}{x^2 + x + 1} < 0$; б) $\frac{4^{x} + 3 \cdot 2^{x} - 4}{x^2 + x + 3} < 0$.

Решите неравенства (2.3.55—2.3.68).

2.3.55. а) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-2) > -1$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+6) > -2$.

2.3.56. а) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_8 \frac{x^2-2x}{x-3}\right) < 0$; б) $0{,}6^{\log_2 \frac{3x-1}{x^2-1}} \le 1$.

2.3.57. а) $\log_{\frac{1}{7}}(x+3) \le \log_{\frac{1}{7}}(4x-3)$; б) $\log_{\frac{1}{7}}(x^2-9) > -1$.

2.3.58. а) $\log_{0,7}(3x-2) \ge 1$; б) $\log_9(2+x) \le 0{,}5$.

2.3.59.* а) $\log_2(x^2-7x+6) \le 1+\log_2 7$;

б) $\log_{0,5}(-x^2+9x-14) \ge \log_{0,5} 3 - 1$.

2.3.60.* а) $\log_3 x > \log_9 \frac{3x+1}{4x}$; б) $\log_2 x > \log_4 \frac{3x-2}{x}$.

2.3.61. а) $x \cdot 3^{\log_3 x} < 3\log_2 2\sqrt[3]{2}$; б) $2^{1+\log_2(x-1)} < x \cdot 3\log_3 27$.

2.3.62.* а) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2+6x+9}{2(x+1)} + \log_2(x+1) < 0$;

б) $\log_3(x+2) > \log_{x+2} 81$.

2.3.63. а) $\log_2 \log_3 x - \log_4 \log_3 x < 0$;

б) $2 + \log_{0,2} \frac{100}{x+2} \le \log_{0,2}(3-x)$.

2.3.64.* а) $\log_{x-3}(x-1) < 2$; б) $\log_{3-x}(x^2-5x+6) < 1$.

2.3.65. а) $\log^2_{0,5} x + 2\log_{0,5} x < 3$; б) $\log^2_{0,2} x - 5\log_{0,2} x < -6$.

2.3.66. а) $(3x+2)\log_{0,3} 4 - 11\log_{0,3} 4 > 0$;

б) $(5x-2)\log_{1,2} 2 - 18\log_{1,2} 2 < 0$.

2.3.67. а) $\log_{0,5}(4-x) \ge \log_{0,5} 2 - \log_{0,5}(x-1)$;

б) $\log_{\frac{1}{6}}(10-x) + \log_{\frac{1}{6}}(x-3) \le -1$.

2.3.68.* а) $\log_x(2x-3) > 1$; б) $\log_{x+1}(2x-3) < 1$.

2.3.69.* а) Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству $\log_{x+0,5}(5-x) > 1$.

б) Найдите наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству $\log_x(x^2-6x+8) > 1$.

2.3.70. Решите неравенство. Укажите какое-либо целое его решение.

а) $(x-3)\log_{\frac{1}{3}} x < 0$; б) $\frac{e^{3x-1}-1}{x+8} \ge 0$.

2.3.71. Решите неравенство:

а) $(x+4)\log_{0,5}(2x^2-5x+3)<0$; б) $\dfrac{\log_2(3x^2-8x+5)}{x-5}\geq 0$.

Найдите те значения переменной, при которых выражение имеет смысл (2.3.72—2.3.76).

2.3.72. а) $\dfrac{\sqrt{2x+10}}{\log_3(-x^2-9x)}$; б) $\dfrac{5-2\log_3(x^2-4x+3)}{\sqrt{x}}$.

2.3.73. а) $(x-3)^{x^2-4x+3}$; б) $(x-2)^{x^2-x-2}$.

2.3.74. а) $5^{\log_5(x^2-1)}$; б) $7^{\log_7(4-x^2)}$.

2.3.75. а) $\log_{\sin x}5$; б) $2-\log_{\cos x}5$.

2.3.76. а) $\dfrac{\cos x}{\log_2(4-x)}$; б) $\dfrac{13-7x}{\log_4(x^2-1)}$.

2.4. Функции, их свойства и графики

Найдите область определения функций (2.4.01—2.4.12).

2.4.01. а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x-10}{x^4-9x^2}}$; б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-3x^2}{1-3x+2x^2}}$.

2.4.02. а) $y=\sqrt{\lg\dfrac{1-3x}{x-2}}$; б) $y=\sqrt{\log_2\dfrac{5x+1}{1-x}}$.

2.4.03. а) $y=\sqrt{16-x^2}+\dfrac{1}{\lg(x^2-5x+7)}$;

б) $y=\sqrt{x^2-4}+\dfrac{1}{\lg(x^2-x-19)}$.

2.4.04. а) $y=\sqrt{\dfrac{12+x-x^2}{\log_2(x-1)}}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{\log_3(2-x)}{10+3x-x^2}}$.

2.4.05. а) $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\lg(x-4)}+\dfrac{1}{x}$; б) $y=\dfrac{\log_2(3x+9)}{\sqrt{4-x}}$.

2.4.06. а) $y=\sqrt{3-x}+\log_2(2x-1)$; б) $y=\log_{0,5}(x+3)-\sqrt{1-2x}$.

2.4.07. а) $y=\sqrt{x^4-16}-\log_4(2-x)$;

б) $y=(5-2x)^{\frac{1}{2}}+\log_4(2{,}5x+x^2)$.

2.4.08.* а) $y=\log_2(\sin 3x-\sin x)$; б) $y=\log_{\frac{1}{3}}(\cos x+\cos 3x)$.

2.4.09.* а) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x}$; б) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 4x}$.

2.4.10.* а) $y = \sqrt{\cos 3x + \cos x}$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(\sin x - \sin 5x)$.

2.4.11.* а) $y = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x + \dfrac{1}{1 - \operatorname{tg} x}$;

б) $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 3x - \operatorname{ctg} 5x} + \dfrac{1}{1 - \operatorname{ctg} x}$.

2.4.12.* а) $y = \sqrt[3]{\sin\dfrac{x}{3} - \sin\dfrac{x}{5}} + \dfrac{\sin x}{\frac{1}{2} - \sin^2 2x}$;

б) $y = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}} + \dfrac{\cos x}{1 - \cos^2 3x}$.

2.4.13. Найдите наименьшее целое число из области определения функции:

а) $y = \dfrac{\sqrt{2x+3}}{x-1}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{2+5x}}{3x-4}$.

2.4.14. Найдите наименьшее целое число из области определения функции:

а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 - 5x - x^2}}$; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 + x - x^2}}$.

2.4.15. а) Найдите наибольшее целое число из области определения функции

$$y = \sqrt{3-x} \cdot \log_2 \frac{1+x}{5-x^2}.$$

б) Найдите наименьшее целое число из области определения функции

$$y = \sqrt{x+4} \cdot \log_2 \frac{1-x}{x^2-3}.$$

2.4.16. а) Найдите наибольшее целое число из области определения функции

$$y = \lg \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 4},$$

удовлетворяющее условию $x < 5$.

б) Найдите наименьшее целое число из области определения функции

$$y = \lg \frac{9 + x^2}{x^2 - 9x + 20},$$

удовлетворяющее условию $x > 3$.

Найдите промежутки монотонности функций (2.4.17—2.4.20).

2.4.17. а) $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$; б) $y = \dfrac{3x^2}{x^2-9}$.

2.4.18. а) $y = 3 - \sqrt{1-x}$; б) $y = \sqrt{x+2} - 1$.

2.4.19.* а) $y = \begin{cases} x+2 \text{ при } x > -1, \\ \frac{1}{2} \text{ при } x = -1, \\ 1-|x| \text{ при } x < -1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 1-|x| \text{ при } x > 1, \\ \frac{1}{2} \text{ при } x = 1, \\ -x+2 \text{ при } x < 1. \end{cases}$

2.4.20. а) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; б) $y = \dfrac{x+3}{2-x}$.

Найдите наибольшее или наименьшее значения функций (2.4.21—2.4.22).

2.4.21. а) $y = \dfrac{1}{2x-x^2-2}$; б) $y = \dfrac{1}{-x^2+x-1}$.

2.4.22. а) $y = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$; б) $y = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$.

2.4.23. а) Найдите коэффициенты трехчлена ax^2+bx+c, зная, что он обращается в нуль при $x = 8$ и что его наименьшее значение равно -12 при $x = 6$.

б) Найдите коэффициенты трехчлена ax^2+bx+c, зная, что при $x = -2$ он имеет наименьшее значение, равное 7, и при $x = 0$ имеет значение, равное 15.

2.4.24. а) Определите a так, чтобы сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (2-a)x - a - 3 = 0$$

была наименьшей.

б) Определите a так, чтобы сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (a+1)x - 4 + a = 0$$

была наименьшей.

2.4.25. Каковы должны быть коэффициенты p и q трехчлена $x^2 + px + q$, чтобы этот трехчлен:

а) при $x = 5$ имел минимум, равный 1;

б) при $x = 3$ имел минимум, равный 2.

Найдите область значений функции (2.4.26—2.4.28).

2.4.26.* а) $y = \frac{x-1}{x^2+1}$; б) $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

2.4.27.* а) $y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$; б) $y = \sqrt{2+x-x^2}$.

2.4.28.* а) $y = 0{,}25x^4 - 2x^2 + 1$; б) $y = 4{,}5x^2 - 0{,}25x^4 + 1$.

Постройте график функции, предварительно заменив ее тождественной функцией (2.4.29—2.4.35).

2.4.29. а) $y = \log_2 \frac{x^2-4}{x-2}$; б) $y = 0{,}5^{\frac{2x^2-6x}{x-3}}$.

2.4.30.* а) $y = \frac{x-1}{|x-3|} \cdot (x^2-9)$; б) $y = \frac{2-x}{|x+1|} \cdot (x^2-x-2)$.

2.4.31.* а) $y = 2^{|x-1|} \cdot 0{,}5^{-x}$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|} \cdot 2^x$.

2.4.32.* а) $y = \sqrt{x+2\sqrt{x+1}+2} + \sqrt{x-2\sqrt{x+1}+2}$;

б) $y = \sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}$.

2.4.33.* а) $y = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \frac{(1-\operatorname{tg} x)\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$;

б) $y = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \frac{\operatorname{ctg} 2x \cdot (1+\operatorname{tg} 2x)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}$.

2.4.34. а) $y = 2^{\log_2(x^2-1)}$; б) $y = 3^{\log_3(1-x^2)}$.

2.4.35. а) $y = 2^{\log_2 \cos x}$; б) $y = 2^{\log_2 \sin x}$.

Исследуйте функцию и постройте ее график (2.4.36— 2.4.42).

2.4.36.* а) $y = -x^2(0{,}5x^2-4)$; б) $y = (x^2-1)^2$.

2.4.37.* а) $y = x^4 - 2x^2 + 3$; б) $y = -x^4 + 2x^2 - 5$.

2.4.38.* а) $y = \frac{1}{4}x^2(x-4)^2$; б) $y = 4x^2(x-2)^2$.

2.4.39.* а) $y = 3x - x^3$; б) $y = x^3 - 6x$.

2.4.40. а) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$; б) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x$.

2.4.41. а) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$; б) $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

2.4.42. а) $y = x^4 - 2x^2 - 3$; б) $y = 2x^4 - 4x^2 + 2$.

2.4.43.* При каком значении a уравнение:

а) $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней ;

б) $x^4 - 2x^2 - 3 = a$ имеет 3 корня ?

2.4.44.* а) Исследуйте функцию $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 6$. Определите, при каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет 3 корня.

б) Исследуйте функцию $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 3$. Определите, при каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет 2 корня.

2.4.45.* Сколько корней имеет данное уравнение при указанном условии:

а) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 3 = a$, $-17 < a < 10$;

б) $x^3 - 2x^2 + x + 7 = a$, $a < 5$?

2.4.46.* При каком значении a уравнение:

а) $\frac{8}{x} + 2x = a$ имеет одно решение ;

б) $\frac{2}{x} + 8x = a$ не имеет решения?

2.4.47.* а) При каких значениях a прямая $y = a$ пересекает график функции $y = 3x^2 - x^3$ более, чем в двух различных точках?

б) При каких значениях переменной b прямая $y = b$ и график функции $y = 3x - 4x^3$ имеют две общие точки?

Для каждого значения a определите число решений системы уравнений (2.4.48—2.4.49).

2.4.48.* а) $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$

2.4.49.* а) $\begin{cases} x - y = a, \\ x^2 + y^2 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

2.4.50. Найдите ординату точки пересечения графиков функций:

а) $y = 2x^3$ и $y = x^2 - 2x + 1$; б) $y = x^3 + 3$ и $y = 2x^2$.

2.4.51.* Найдите промежутки, на которых функция принимает положительные значения:

а) $y = \frac{1}{x - \sqrt{1 - x}}$; б) $y = \frac{1}{2x - \sqrt{1 - 3x}}$.

2.4.52. Найдите промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения:

а) $y = \sqrt{10 - x} - \sqrt{x - 2}$; б) $y = \sqrt{7 - x} - \sqrt{x - 1}$.

Решите графически уравнения (2.4.53—2.4.59).

2.4.53. а) $x^3 + x - 10 = 0$; б) $x - \sqrt[3]{x} - 6 = 0$.

2.4.54. а) $\frac{1}{2}x^3 = 6 - x$; б) $x^3 = 2 - x$.

2.4.55. а) $e^x = x + 1$; б) $\ln x = x - 1$.

2.4.56. а) $\log_3(x + 1) = \frac{1}{4}x^2$; б) $2^{x+1} = -3x^2 + 5x + 2$.

2.4.57. а) $3\log_2(x - 1) = -2x + 4$; б) $3\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) = 2x - 4$.

2.4.58.* а) $\frac{2x - 3}{x - 1} = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$; б) $\frac{x + 1}{x - 1} - 1 = \log_2(x - 1)$.

2.4.59.* а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{x - 3}{x - 1}$, $x < 0$; б) $2^x = \frac{x + 1}{x}$, $x > 0$.

При каких значениях x график функции $f(x)$ находится ниже графика функции $g(x)$ (2.4.60—2.4.62)?

2.4.60. а) $f(x) = 6 - x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$;

б) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 3x + 3$.

2.4.61. а) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 4x - 1$; б) $f(x) = 5x$, $g(x) = x^2 + 4$.

2.4.62. а) $f(x) = x^2 - 5x$, $g(x) = -4$;

б) $f(x) = 14 - 5x$, $g(x) = x^2$.

Изобразите на плоскости Oxy множество точек $P(x, y)$, координаты которых удовлетворяют условию (2.4.63—2.4.66).

2.4.63.* а) $|y - \sin x| = y$; б) $|y - 2| = \log_2 x$.

2.4.64.* а) $|x + 1| = |y|$; б) $|x - y| = y$.

2.4.65.* а) $\begin{cases} y \le 5 - 2|x|, \\ y \ge 2 - \frac{1}{2}|x|; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x| \le 2(1 - y), \\ |x| + y \ge 1. \end{cases}$

2.4.66.* а) $xy - y = x + 2$; б) $x = y - xy$.

Решите неравенство и приведите геометрическую интерпретацию полученного решения (2.4.67—2.4.69).

2.4.67.* а) $\sqrt{x + 2} > 2x - 2$; б) $\sqrt{x - 2} \ge x - 4$.

2.4.68.* а) $\sqrt{x+1} < x-5$; б) $\sqrt{1+x} < 3x-1$.

2.4.69.* а) $\sqrt{x-1} < \frac{1}{2}x$; б) $\sqrt{2-x} > x$.

Укажите число решений уравнения в зависимости от параметра a (2.4.70—2.4.77).

2.4.70.* а) $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = a$; б) $\left|\frac{5-2x}{x-2}\right| = a$.

2.4.71.* а) $\log_4|x+2| = a$; б) $|\log_3(4-3x)| = a$.

2.4.72.* а) $\frac{|\operatorname{tg} x+1|}{a-1} = 2$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\frac{\left|\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|}{a-2} = 3$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

2.4.73.* а) $\frac{|2-x|}{a(x-1)} = \frac{1}{2}$; б) $\frac{2x+4}{a|x+5|} = \frac{1}{2}$.

2.4.74.* а) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+1}{a+2} = 1$; б) $\frac{2^{|x|}-1}{a+1} = 1$.

2.4.75.* а) $\frac{x^2-5|x|+4}{a-2} = 1$; б) $\frac{3|x|-x^2-1}{a+1} = 1$.

2.4.76.* а) $|x|-|x+1| = a$; б) $|x+2|+|x| = a$.

2.4.77.* а) $|x^2-3x+2|-1 = a$; б) $|x^2-5x+6|+2 = a$.

2.5. Производная и ее применение

2.5.01. Найдите значения a и b, при которых выполняются данные условия:

а) $f(x) = a\sin 4x + b\cos 2x$, $f'\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 4$, $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$;

б) $f(x) = a\sin 2x + b\cos 4x$, $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4$, $f'\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -4$.

Решите неравенства (2.5.02—2.5.03).

2.5.02. а) $f'(x) \geq 0$, если $f(x) = 9\ln x - 2x^2$;

б) $f'(x) \leq 0$, если $f(x) = x^2 - 8\ln x$.

2.5.03. а) $f'(x) \leq 0$, если $f(x) = 6x^2 - 3\ln x$;

б) $f'(x) \geq 0$, если $f(x) = 4\ln x - 8x^2$.

Сравните с нулем (2.5.04—2.5.06).

2.5.04. а) $f'(2)$, если $f(x) = \log_{0,5}(1 + 3x)$;

б) $f'(3)$, если $f(x) = \log_2(5 - x)$.

2.5.05. а) $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x) = \sin(0{,}5\pi + 2x)$;

б) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x) = \cos(\pi - x)$.

2.5.06. а) $f'\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, если $f(x) = \operatorname{tg}(0{,}5\pi - x)$;

б) $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \sin(1{,}5\pi + 0{,}5x)$.

2.5.07.* Найдите критические точки функции и укажите одну точку максимума:

а) $y = 2x + \frac{8}{x}$; б) $y = 16x + \frac{1}{x}$.

2.5.08.* Найдите критические точки функции и укажите одну точку минимума:

а) $f(x) = \sin x + 0{,}5\sin 2x + 5$;

б) $f(x) = 1{,}5\sin 2x - 3\sin x - 5$.

2.5.09.* Найдите критические точки функции g и укажите одну точку максимума:

а) $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \sin x$;

б) $g(x) = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

2.5.10. Найдите критические точки функции f на данном промежутке:

а) $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sqrt{3}\sin x + 1$, $[0;\pi]$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x - 3$, $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2.5.11. Найдите экстремумы функции:

а) $f(x) = 1{,}5e^{2x} - e^x - 2x + 3$; б) $f(x) = 2{,}5e^{2x} - 2e^x - 3x + 2$.

2.5.12. Докажите, что функция не имеет ни максимума, ни минимума:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 2$; б) $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 5$.

2.5.13.* При каком значении a функция f имеет в точке x_0 экстремум? Определите, какой точкой экстремума является точка x_0 при найденном значении a:

а) $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 2(a-1)x^2 - 4ax + 3$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - (a-2)x^2 - 4ax - 3$, $x_0 = 1$.

2.5.14.* а) Производная квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + 1$ в точках -2 и 2 равна соответственно 5 и 10. Найдите точку экстремума функции и укажите, является ли она точкой максимума или минимума.

б) Производная квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + 1$ в точках 3 и 8 равна соответственно 10 и 5. Найдите точку экстремума функции и укажите, является ли она точкой максимума или минимума.

2.5.15.* Найдите критические точки и выясните, какие из них являются точками максимума, а какие точками минимума:

а) $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x - 5$; б) $f(x) = \ln^4 x - 2\ln^2 x + 2$.

Найдите значения функций в точках максимума (2.5.16—2.5.17).

2.5.16. а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$; б) $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$.

2.5.17. а) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 5$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 3$.

Найдите значения функций в точках минимума (2.5.18—2.5.19).

2.5.18. а) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 - 3$;

б) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - x^2 - 5$.

2.5.19. а) $f(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 17\frac{13}{15}$; б) $f(x) = -\frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 3\frac{1}{15}$.

2.5.20.* Исследуйте на возрастание и убывание функцию:

а) $y = \sin x + \cos x$; б) $y = \sin x - \cos x$.

2.5.21.* а) Найдите все значения b, при которых функция $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - (b-2)x^2 - 2$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

б) Найдите все значения a, при которых функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

2.5.22.* а) Найдите значения a, при которых функция $y = 3x^3 - 4x^2 - x + 2$ возрастает на $\left(a - 2; a + \frac{8}{9}\right)$.

б) Найдите значения m, при которых функция $y = 1 + 18x - 6x^2 - 2x^3$ убывает на $(m - 1; m + 3)$.

2.5.23. Составьте уравнение касательной к графику функции $g(x)$ в точке с абсциссой x_0. Напишите уравнение одной из прямых, параллельных этой касательной:

а) $g(x) = 2x^3 - x^2 - 3$, $x_0 = 1$;

б) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, $x_0 = -1$.

2.5.24. а) Составьте уравнения касательных, проведенных к графикам функций $y = x^2$ и $y = x^2 - 2x + 4$ в точке их пересечения.

б) Составьте уравнения касательных, проведенных к графикам функций $y = x^2$ и $y = x^2 + 3x - 6$ в точке их пересечения.

2.5.25.* При каких значениях a данная прямая является касательной к графику функции $f(x)$:

а) $y = 4x + a$, $f(x) = x^2 + 6x - 3$;

б) $y = -7x + a$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$?

2.5.26.* При каком значении k данная прямая является касательной к графику функции $f(x)$:

а) $y = kx - 5$, $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$;

б) $y = kx - 7$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$?

2.5.27. Укажите все точки графика функции, касательная в которых параллельна оси абсцисс. Напишите уравнение одной из этих касательных:

а) $y = x \cdot e^{-x^2}$; б) $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

2.5.28. а) В какой точке касательная к графику функции $y = 3x^2 - 8x + 5$ параллельна прямой $y = 4x + 3$? Напишите уравнение касательной.

б) В какой точке касательная к графику функции $y = 2x^2 + 7x - 3$ параллельна прямой $y = -5x + 3$? Напишите уравнение касательной.

2.5.29.* Найдите точку пересечения касательных, проведенных к графику функции $f(x)$ через точки графика с абсциссами x_1 и x_2:

а) $f(x) = x^2 - |5x + 9|$, $x_1 = -4$, $x_2 = 4$;

б) $f(x) = x^2 + |7 - 4x|$, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

2.5.30. Составьте уравнения касательных к графику функции f, проходящих через точку A:

а) $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$, $A(1; 7)$;

б) $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$, $A(-1; 3)$.

2.5.31. При каких b касательная, проведенная к графику функции f в точке с абсциссой x_0, проходит через точку N:

а) $f(x) = bx^3 - x^2 + 3$, $x_0 = 1$, $N(2; 8)$;

б) $f(x) = bx^3 + 2x + 4$, $x_0 = -1$, $N(-2; -8)$?

2.5.32.* Найдите абсциссы всех общих точек графика функции и касательной, проведенной к этому графику в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = |x|(x - 3) + 3x$, $x_0 = 3$;

б) $f(x) = |x - 2|x + 2x$, $x_0 = 1$.

2.5.33.* а) Найдите расстояние от оси абсцисс до касательной к графику функции $y = 4\ln(x - 1) - x^2$, параллельной оси абсцисс.

б) Найдите расстояние от начала координат до касательной, проведенной к графику функции $y = x - 4\ln x$, параллельной оси абсцисс.

2.5.34. Найдите все общие точки графика функции g и касательной, проведенной к этому графику через точку M:

а) $g(x) = 3x - x^3$; $M(0; 16)$;

б) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$; $M(0; 18)$.

2.5.35. При каком значении a прямая f имеет только одну общую точку с графиком функции g? Для найденного значения a определите координаты точки.

а) $f(x) = 8x + a$, $g(x) = 2x^2 + 7$;

б) $f(x) = 5x - a$, $g(x) = x^2 + 3x - 1$.

2.5.36. Угловой коэффициент касательной к кривой в каждой ее точке равен абсциссе этой точки. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку A. Напишите уравнение касательной, проходящей через точку A:

а) $A(2;\ 1)$; б) $A(-2;\ 2)$.

2.5.37. а) Запишите уравнение той из касательных к параболе

$$y = -x^2 + 2x - 3\frac{1}{4},$$

которая наклонена к оси абсцисс под углом 45°.

б) Запишите уравнение той из касательных к параболе

$$y = x^2 + 3x + 4,$$

которая наклонена к оси абсцисс под углом 135°.

2.5.38. а) Запишите уравнение той из касательных к параболе

$$y = 2x^2 - \sqrt{3}x + 5,$$

которая наклонена к оси абсцисс под углом 120°.

б) Запишите уравнение той из касательных к параболе

$$y = x^2 + \sqrt{3}x - 2,$$

которая наклонена к оси абсцисс под углом 60°.

2.5.39. а) Запишите уравнение той из касательных к параболе

$$y = -2x^2 + 3x - 5,$$

которая параллельна прямой $y = 7x - 6$.

б) Запишите уравнение той из касательных к параболе

$$y = 2x^2 - 5x + 3{,}5,$$

которая параллельна прямой $y = -3x + 1$.

2.5.40. а) Запишите уравнение той из касательных к параболе

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6,$$

которая параллельна прямой $y = 2x + 5$.

б) Запишите уравнение той из касательных к параболе

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + 3,$$

которая параллельна прямой $y = -5x + 3$.

2.5.41. а) Прямая $y = 3x + 6$ и парабола $y = x^2 + 2$ пересекаются в точках A и B. Найдите точку C пересечения прямых, касающихся параболы в точках A и B.

б) Прямая $y = 2x + 7$ и парабола $y = x^2 - 1$ пересекаются в точках M и N. Найдите точку K пересечения прямых, касающихся параболы в точках M и N.

2.5.42. а) Найдите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к кривой

$$y = (x+1)(x-3)$$

в точке пересечения данной кривой с осью ординат.

б) Найдите угол наклона к оси абсцисс касательной к кривой $y = (x-3)(x-2)$ в точке пересечения этой кривой с осью ординат.

2.5.43. а) Найдите угол наклона к оси абсцисс касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + 5$ в точке $x_0 = \frac{1}{2}$.

б) Найдите угол наклона к оси абсцисс касательной к графику функции $y = 2x^2 + 4x - 3$ в точке $x_0 = -\frac{3}{4}$.

2.5.44. а) На кривой, определяемой уравнением $y = x^2 - 2x$, найдите точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

б) На кривой, определяемой уравнением $y = 3x - x^2$, найдите точку, в которой касательная наклонена под углом 45° к оси абсцисс.

2.5.45. а) На кривой $y = \cos 2x$ найдите одну из точек, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

б) На кривой $y = \sin 2x$ найдите одну из точек, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

2.5.46. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке:

а) $y = \frac{4}{3}x^3 - 4x$, $[0; 2]$; б) $y = -x^3 + 3x^2 + 5$, $[0; 3]$.

2.5.47.* Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке:

а) $f(x) = 2\sin 2x - \cos 4x$, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;

б) $f(x) = 3\cos 4x + 6\sin 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2.5.48.* На графике функции f найдите точки, ближайшие к точке A:

а) $f(x) = x^2 - 2$, $A(2; -1{,}5)$; б) $f(x) = x^2 + 2$, $A(16; 2{,}5)$.

2.5.49.* На графике заданной функции найдите точки, ближайшие к началу координат:

а) $y = x^2 - 3$; б) $y = 1 - x^2$.

2.5.50.* На графике заданной функции найдите точку, ближайшую к точке M:

а) $y = x^2 - 2x + 4$, $M(15; 4)$; б) $y = x^2 + 2x + 2$, $M(-15; 2)$.

2.5.51.* На графике данной функции найдите точку, ближайшую к точке N:

а) $y = \sqrt{\ln\left(\frac{2}{x} + 1\right)}$, $N(0; 0)$; б) $y = \sqrt{\ln(-2x + 3)}$, $N(0; 0)$.

2.5.52.* а) При каких значениях a минимум функции $y = (3a + x)\sqrt{x}$ равен $6\sqrt{3}$?

б) При каких значениях b максимум функции $y = 2x\sqrt{b - x}$ равен 4?

Найдите промежутки возрастания, убывания и точки максимума и минимума функций (2.5.53—2.5.59).

2.5.53. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

2.5.54. а) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 5$; б) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7$.

2.5.55. а) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 4$; б) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$.

2.5.56. а) $f(x) = 4x^2(x - 2)^2$; б) $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x - 4)^2$.

2.5.57. а) $f(x) = 2x^2(x - 3)^2$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x^2(x + 3)^2$.

2.5.58. а) $f(x) = 2\ln x - x^2$; б) $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

2.5.59. а) $f(x) = x^3 \cdot e^{-3x}$; б) $f(x) = x^3 - 3\ln(2x)$.

Докажите утверждения (2.5.60 – 2.5.63).

2.5.60. а) $p(x) = 2x + \sin 2x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

б) $h(x) = \cos 3x - 3x$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

2.5.61. а) $f(x) = 2x + \cos x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

б) $g(x) = \sin x - 3x$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

2.5.62. а) $f(x) = \sin(2x + 5) - 6x$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

б) $g(x) = \cos(4 - 2x) + 4x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

2.5.63. а) $y = x\ln x$ убывает на интервале $\left(0; \frac{1}{e}\right)$.

б) $y = x - \ln(2x - 1)$ убывает на $(0{,}5; 1{,}5)$.

2.5.64. Найдите точки, в которых скорость изменения функции f больше скорости изменения функции g:

а) $f(x) = x^4 + 2x^3$, $g(x) = 2x^3 + 2x^2$;

б) $f(x) = x^3 - 2x^4$, $g(x) = x^3 - 4x^2$.

2.5.65. Найдите точки, в которых скорость изменения функции f равна скорости изменения функции g:

а) $f(x) = 2x^2 + 1$, $g(x) = x^4 - 3$;

б) $f(x) = 3x^5 + 2$, $g(x) = 5x^3 - 1$.

2.5.66. Найдите точки, в которых скорость изменения функции f меньше скорости изменения функции g:

а) $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = x + 19$;

б) $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = x - 15$.

2.5.67. а) Докажите, что произведение двух положительных чисел, сумма которых постоянна, имеет максимум при равенстве множителей.

б) Докажите, что сумма двух положительных чисел, произведение которых постоянно, имеет минимум при равенстве слагаемых.

2.5.68. а) Число 256 представьте в виде произведения двух положительных множителей, сумма квадратов которых будет наименьшей.

б) Число 81 представьте в виде произведения двух положительных множителей, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

2.5.69. а) Какими должны быть стороны прямоугольного участка площадью 1600 м^2, чтобы на его ограждение было израсходовано наименьшее количество материала?

б) Периметр окна прямоугольной формы равен 6 м. Какими должны быть размеры окна, чтобы площадь его была наибольшей?

2.5.70. а) Из листа жести, имеющего форму прямоугольника длиной 48 см и шириной 18 см, изготовляют коробку, открытую сверху, вырезав по углам квадраты со стороной x см и загнув образовавшиеся кромки. Каково должно быть x, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

б) Из листа жести, имеющего форму прямоугольника длиной 8 см и шириной 5 см, изготовляют коробку, открытую сверху, вырезав по углам квадраты со стороной x и загнув образовавшиеся кромки. Каково должно быть x, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

2.6. Первообразная и интеграл

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (2.6.01—2.6.30).

2.6.01. а) $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$; б) $y = 6 - x^2$, $y = x + 4$.

2.6.02. а) $y = -x^2 - 2x + 3$, $y = x + 3$;

б) $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 1 - x$.

2.6.03. а) $y = 6x - x^2$, $y = x + 4$; б) $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$.

2.6.04. а) $y = (2 + x)^2$, $y = x + 2$;

б) $y = (x - 2)^2$, $y = 4 - x$, $x = 4$.

2.6.05. а) $y = -x^2 - 3x + 4$, $y = -2x + 2$;

б) $y = 5 + 4x - x^2$, $y = x + 1$.

2.6.06. а) $y = x^2 - 6x + 5$, $y = 11 - x$;

б) $y = 3x - x^2 + 4$, $y = x + 1$.

2.6.07. а) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 5 - x$;

б) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 4 - 2x$.

2.6.08. а) $y = -0{,}5x^2 + 2$, $y = 2 - x$; б) $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$.

2.6.09. а) $y = x^2 + 2x + 5$, $y = 5 - 2x$;

б) $y = -0{,}5x^2 + x + 1{,}5$, $y = 0{,}5x + 0{,}5$.

2.6.10. а) $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$;

б) $y = x^2 + 2$, $y = 5 - 2x$, $x = 0$, $y = 0$.

2.6.11. а) $y = x^2 + 5$, $y = 4 - x^2$, $x = -1$, $x = 1$;

б) $y = x^2 + 3$, $y = 2 - x^2$, $x = -1$, $x = 1$.

2.6.12. а) $y = x^2 - 5x + 7$, $y = -2x^2 + 10x - 5$;

б) $y = 0{,}25x^2 + 8$, $y = 2x^2 + 1$.

2.6.13. а) $y = x^2 + 3$, $y = 2x^2 - x + 1$; б) $y = x^2$, $y = 0{,}5x^2 + 2$.

2.6.14. а) $y = x^2$, $y = 4 - 3x^2$; б) $y = 3x^2$, $y = 5 - 2x^2$.

2.6.15. а) $y = x^3 + 1$, $y = x^2 + 2x + 1$;

б) $y = -x^3 + 8$, $y = 8 - 2x - x^2$.

2.6.16. а) $y = x^3$, $y = 2x$; б) $y = -x^3$, $y = -3x$.

2.6.17. а) $y = \frac{3}{x}$, $y = 4 - x$; б) $y = -\frac{5}{x}$, $y = x - 6$.

2.6.18. а) $y = \frac{5}{x}$, $y = 6 - x$; б) $y = -\frac{4}{x}$, $y = x + 5$.

2.6.19. а) $y = \frac{5}{x}$, $y = x$, $x = 5$; б) $y = \frac{3}{x}$, $y = 2 + x$, $y = 2$.

2.6.20.* а) $xy = b^2$, $x = b$, $x = 3b$, $y = 0$, где $b > 0$;

б) $xy = a^2$, $x = a$, $x = 2a$, $y = 0$, где $a > 0$.

2.6.21.* а) $y = 2\sqrt{x}$, $y = 4$, $x = 0$; б) $y = 3\sqrt{x}$, $y = 6$, $x = 0$.

2.6.22.* а) $y = \sqrt{x}$, $y = \sin\frac{x}{2}$, $x = \pi$;

б) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$.

2.6.23.* а) $y = (x-1)^2$, $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{3}$;

б) $y = 1 - \cos x$, $y = \cos x + 1$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$.

2.6.24. а) $y = e^{2x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

б) $y = \frac{1}{e^x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$.

2.6.25. а) $y = 3^x$, $y = 9^x$, $x = 1$; б) $y = 2^x$, $y = 4^x$, $x = 1$.

2.6.26. а) $y = e^{-x}$, $y = e^{-2x}$, $x = -1$; б) $y = e^{2x}$, $y = e^{3x}$, $x = 1$.

2.6.27. а) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y = 4$, $x = 1$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 3$, $x = 2$.

2.6.28. а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 2^x$, $y = 4$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 3^x$, $y = 9$.

2.6.29. а) $y = \frac{4}{x}$, $y = x$, $x = 4$; б) $y = \frac{8}{x}$, $y = 2x$, $x = 8$.

2.6.30.* а) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - 3x}$, $y = 0$;

б) $y = \sqrt{x+2}$, $y = \sqrt{5 - 2x}$, $y = 0$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой $x = 0$, графиком функции y и касательной к этому графику в точке с абсциссой x_0 (2.6.31—2.6.33).

2.6.31.* а) $y = -x^2 + 3$, $x_0 = 1$; б) $y = x^2 + 3$, $x_0 = -1$.

2.6.32.* а) $y = 4x - x^2$, $x_0 = 3$; б) $y = -4x - x^2$, $x_0 = -3$.

2.6.33.* а) $y = x^2 - 4x + 5$, $x_0 = 1$; б) $y = x^2 - 4x + 9$, $x_0 = 3$.

2.6.34.* Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями и касательной к параболе, проведенной через ее точку с абсциссой x_0:

а) $y = -0{,}5x^2 + 0{,}5x + 6$, $x = -3$, $x_0 = 1$;

б) $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 1$, $x = 1$, $x_0 = -2$.

2.6.35.* а) Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой

$$y = 2x - x^2$$

и касательными, проведенными к ней через точки пересечения параболы с осью абсцисс.

б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой

$$y = -x^2 + 4x + \frac{9}{4}$$

и касательными к ней, проведенными через ее точки с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

Найдите площадь фигуры ограниченной графиком функции и графиком ее производной (2.6.36—2.6.37).

2.6.36. а) $y = x^2 - 4x + 4$; б) $y = x^2 - 6x + 9$.

2.6.37. а) $y = x^2 + 6x + 9$; б) $y = x^2 + 4x + 4$.

2.6.38. а) Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 4\cos t \sin t$ м/с. Найдите уравнение движения точки, если при $t = \frac{\pi}{2}$ с пройденный путь составляет 5 м.

б) Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 1 - 2\sin^2 2t$ м/с. Найдите уравнение движения точки, если при $t = \frac{\pi}{8}$ с пройденный путь составляет $\frac{5}{4}$ м.

2.6.39. а) Тело движется прямолинейно со скоростью, изменяющейся по закону $v(t) = t^2 - 3t$ м/с. Найдите закон движения, если известно, что за первые 6 с оно прошло 20 м.

б) Тело движется прямолинейно со скоростью, изменяющейся по закону $v(t) = 8t - t^2$ м/с. Найдите закон движения, если известно, что за первые 3 с оно прошло 30 м.

2.6.40. а) Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M(1; 1{,}5)$, если угловой коэффициент касательной в точке x равен $4x^3 + x - 4$.

б) Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M(2; 5)$, если угловой коэффициент касательной в точке x равен $3x^2 - x - 1$.

Найдите пары чисел a и b, при которых функция $f(x)$ удовлетворяет данным условиям (2.6.41—2.6.43).

2.6.41.* а) $f(x) = a\sin\frac{\pi x}{2} + b$, $f'(4) = 2\pi$, $\int\limits_0^6 f(x)\,dx = \frac{22}{\pi}$;

б) $f(x) = a\cos\frac{\pi x}{3} + b$, $f'(2) = -\frac{3}{2}$, $\int\limits_0^{0,5} f(x)\,dx = \sqrt{3}$.

2.6.42.* а) $f(x) = ax^2 - b$, $f'(8) = 48$, $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,dx = 6$;

б) $f(x) = ax^2 - b$, $f'(-3) = -6$, $\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,dx = 6$.

2.6.43.* а) $f(x) = ax^3 - bx$, $f'(-1) = 10$, $\int\limits_{-3}^{2} f(x)\,dx = -60$;

б) $f(x) = ax^3 + bx^2$, $f'(2) = 12$, $\int\limits_{2}^{1} f(x)\,dx = \frac{57}{4}$.

2.6.44.* Запишите уравнения касательных к графику функции $F(x)$ в точках, где он пересекает ось абсцисс:

а) $F(x) = \int\limits_2^x (2t+1)\,dt$; б) $F(x) = \int\limits_1^x (2t+2)\,dt$.

2.6.45. Решите уравнение:

а) $\int\limits_0^x \cos t\,dt = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$; б) $\int\limits_0^x \cos t\,dt = \sin(2x - \pi)$.

Решите неравенства (2.6.46—2.6.47).

2.6.46.* а) $\int\limits_2^x (2t+2)\,dt < \frac{10}{\log_{\frac{1}{2}} 4}$; б) $\int\limits_3^x (2t+1)\,dt < -\frac{3}{2^{-1}}$.

2.6.47. а) $\int\limits_0^x (y+3)\,dy \geq -7x$; б) $\int\limits_0^x (2y-3)\,dy \leq 2x$.

2.6.48. Вычислите:

а) $\int\limits_{-a}^{e^2 a} \frac{1}{x}\,dx$, где $a > 0$; б) $\int\limits_{a\sqrt{e}}^{ea} \frac{1}{x}\,dx$, где $a > 0$.

2.6.49.* а) При каком значении a прямая $x = a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x}$, $x = 1$, $x = 3$, в отношении 1:3?

б) При каком значении a прямая $x = a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, в отношении 1:2?

2.6.50. а) Фигура, ограниченная линиями $y = x + 2$, $x = 3$, $y = 0$, делится линией $y = x^2 - 2x + 2$ на две части. Найдите площадь каждой части.

б) Фигура, ограниченная линиями $y = 2 + 4x - x^2$, $y = 0$, делится линией $y = -x + 6$ на две части. Найдите площадь каждой части.

2.6.51. а) Фигура, ограниченная линиями $y = -x + 3, x = -1$, $y = 0$, делится линией $y = (x - 1)^2$ на две части. Найдите площадь каждой части.

б) Фигура, ограниченная линиями $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = 0$, делится линией $y = x + 1$ на две части. Найдите площадь каждой части.

Найдите ту первообразную функции f, график которой касается данной прямой y. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком найденной первообразной, данной касательной и прямой $y = 0$ (2.6.52—2.6.53).

2.6.52.* а) $f(x) = x + 3$, $y = 5x - 2$;

б) $f(x) = x$, $y = 2x - 2$.

2.6.53.* а) $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$, $y = -\frac{2}{3}x + 5\frac{4}{3}$;

б) $f(x) = -\frac{x}{2}$, $y = -x + 5$.

Найдите уравнение касательной к графику функции f, параллельной данной прямой. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции, касательной и осью ординат (2.6.54—2.6.55).

2.6.54.* а) $f(x) = x^2 + 5$, $y = -2x + 10$;

б) $f(x) = -x^2 + 6x$, $y = -2x + 15$.

2.6.55.* а) $f(x) = x^2 + 8x$, $y = 2x - 7$;

б) $f(x) = -x^2 + 7$, $y = -2x + 13$.

РАЗДЕЛ 3

3.1. Числа и тождественные преобразования

3.1.01. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые:
а) при делении на 33 дают остаток 5;
б) при делении на 41 дают остаток 4.

Проверьте равенства (3.1.02—3.1.03).

3.1.02.° а) $75^{20} = 45^{10} \cdot 5^{30}$; б) $(1+2+3+4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.

3.1.03.° а) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{8+\sqrt{8}+\sqrt{20}+\sqrt{40}} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

3.1.04.° Разность чисел:

а) $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$;

б) $\sqrt{\left|12\sqrt{5}-29\right|} - \sqrt{12\sqrt{5}+29}$

является целым числом. Найдите это число.

3.1.05. а) Найдите коэффициенты трехчлена ax^2+bx+c, зная, что он принимает наибольшее значение, равное 5, в точке $x=3$, а его график пересекает ось Oy в точке с ординатой, равной -4.

б) Найдите коэффициенты трехчлена ax^2+bx+c, зная, что он обращается в нуль при $x=6$ и что его наименьшее значение равно -8 при $x=4$.

3.1.06. Докажите, что при всех натуральных значениях n число:
а) $4^n+15n+8$ кратно 3; б) $3^{2n+2}-8n+55$ кратно 8.

3.1.07. Докажите, что при всех натуральных значениях n число:
а) $5\cdot 9^{n-1}+2^{4n-3}$ кратно 7; б) $7\cdot 5^{2n-1}+2^{3n+1}$ кратно 17.

3.1.08. а) Докажите, что 16^n-4^n-3n кратно 9 при $n \in N$.
б) Докажите, что $2^{3n+1}+5^{n+2}$ кратно 27 при $n \in N$.

3.1.09. Докажите, что для любого натурального n справедливо равенство:

а) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n} = 2-\frac{n+2}{2^n}$;

б) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n} = 3-\frac{2n+3}{2^n}$.

3.1.10. Докажите, что для любого натурального n справедливо равенство:

а) $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{6}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{(2n-1)\cdot 2^{n+1}}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2^n}{2n+3}-\frac{1}{3}$;

б) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n^2}{2n+1}$.

3.1.11. Докажите, что для всех натуральных n справедливо равенство:

а) $2+18+60+\ldots+n(n+1)(2n-1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(3n-1)$;

б) $4+60+\ldots+(n+1)(3n-1)\cdot 4^{n-1}=n^2\cdot 4^n$.

3.1.12. Докажите, что:

а) $n^2(n^2-1)(n^2-4)$ кратно 720 при $n\in N$;

б) $(n^2+4n+3)(n^2+6n+8)$ кратно 24 при $n\in N$.

3.1.13.° Докажите, что при любом натуральном n выражение равно целому числу:

а) $\frac{10^n+8}{9}$; б) $\frac{10^n+2}{3}$.

3.1.14.° Докажите, что при $a>0$ имеет место неравенство:

а) $(a+3)(a+6)(a+2)(a+1)>96a^2$;

б) $(a+5)(a+4)(a+8)(a+2)>128a^2\sqrt{5}$.

3.1.15.° а) Известно, что $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$. Найдите значение выражения

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-3xy+2y^2}.$$

б) Известно, что $\frac{x^4+2x^2y^2}{x^2y^2+x^4}=1{,}6$. Найдите $\frac{y}{x}$.

3.1.16.° Дано квадратное уравнение, имеющее корни α и β. Составьте новое квадратное уравнение, корнями которого были бы α_1 и β_1, если:

а) $2x^2-4x+3=0$, $\alpha_1=\frac{\alpha}{2\alpha+\beta}$ и $\beta_1=\frac{\beta}{2\beta+\alpha}$;

б) $3x^2+7x+4=0$, $\alpha_1=\frac{\alpha}{\beta-1}$ и $\beta_1=\frac{\beta}{\alpha-1}$.

3.1.17.° а) Дано квадратное уравнение $x^2-2x-2=0$, корни которого a и b. Не решая его, найдите a^4+b^4.

б) Дано квадратное уравнение $x^2 - 3x + 1 = 0$, корни которого a и b. Не решая его, найдите $\frac{a^4b + ab^4}{a^2 + b^2}$.

Вычислите (3.1.18—3.1.19).

3.1.18. а) $\sin\left(2\arcsin\frac{12}{13}\right)$; б) $\cos\left(2\arcsin\left(\frac{7}{25}\right)\right)$.

3.1.19. а) $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$; б) $\sin\left(2\arccos\left(\frac{12}{13}\right)\right)$.

3.1.20.° Найдите $2\alpha + \beta$, если:

а) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$, $\operatorname{tg}\beta = 7$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < 1{,}5\pi$;

б) $\operatorname{tg}\alpha = -2$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{7}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < 0{,}5\pi$.

3.1.21.° Докажите, что $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$, если:

а) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}$;

б) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}$.

3.1.22.° Докажите, что при всех $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ верно неравенство:

а) $\left(2\sin\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(2\cos\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\right) \geq 8$;

б) $(\sin\alpha + \cos\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}\right) \geq 4$.

При каких α имеет место знак равенства?

3.1.23.° а) Найдите $\log_4 36$, если $\log_{12} 3 = a$.

б) Найдите $\log_{25} 10$, если $\log_{20} 4 = b$.

3.1.24.° Упростите:

а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{9\log_8 \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 4\log_{2\sqrt{2}}\left(5+3\sqrt{5}\right)}$; б) $4^{3\log_{2\sqrt{2}}\left(5-\sqrt{10}\right) - 4\log_4\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$.

Найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие данному условию (3.1.25—3.1.26).

3.1.25. а) $|z| + 2z - 1 = (1+i)^6$; б) $|z| + 2iz + 1 = (1-i)^6$.

3.1.26. а) $2z = |z| + 2i$; б) $|z| - iz = 1 - 2i$.

3.1.27. а) Пусть $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -4 + 3i$. При каких действительных a и b выполняется условие $\frac{z_1}{z_2} = az_1 + bz_2$?

б) Пусть $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -0{,}2 - 0{,}4i$. При каких действительных a и b выполняется условие $z_1 z_2 = az_1 + bz_2$?

3.1.28. а) Пусть $z_1 = -\sqrt{3} + 3i$, $z_2 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$.

Вычислите $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{12}$.

б) Пусть $z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

Вычислите $(z_1 \cdot z_2)^{18}$.

3.1.29. а) Найдите z^{12}, если $z + 2\bar{z} = 3 + i$.

б) Найдите z^6, если $3z - \bar{z} = -4 + 8i$.

3.1.30. а) Найдите сумму всех таких z, что $z^4 = \sqrt{3} - i$. Укажите одно из этих чисел.

б) Найдите сумму всех таких z, что $z^4 = 1 - i\sqrt{3}$. Укажите одно из этих чисел.

3.1.31. Расположите по возрастанию действительных частей все корни четвертой степени из числа z_0, где:

а) $z_0 = \sqrt{3} + i$; б) $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$.

3.1.32. а) Из всех чисел z, удовлетворяющих условию $z \cdot \bar{z} = 25$, найдите такие, что $|z - 7|$ принимает наибольшее значение.

б) Из всех чисел z, удовлетворяющих условию $z \cdot \bar{z} = 16$, найдите такие, что $|z - 5i|$ принимает наименьшее значение.

3.1.33.* а) Даны два комплексных числа:

$$z_1 = a - i,\ z_2 = 2^{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

Найдите все значения $a \in \boldsymbol{R}$, при которых $z_1^3 = z_2^2$.

б) Даны два комплексных числа:

$$z_1 = 1 + ai,\ z_2 = 2^{\frac{3}{4}}\left(\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right).$$

Найдите все значения $a \in \boldsymbol{R}$, при которых $z_1^3 = z_2^2$.

3.1.34. Изобразите комплексные числа z, удовлетворяющие условию:

а) $z^4 = \frac{1-i}{1+i}$; б) $z^2 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$.

3.1.35. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $\begin{cases} 2 \le |z - i| \le 4, \\ 0 \le \operatorname{Re} z \le 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 \le |z - 1| \le 2, \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le \sqrt{3}. \end{cases}$

3.1.36. Изобразите на чертеже множество точек z комплексной области, удовлетворяющих условию $\operatorname{Im}(z \cdot z_0) = \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z_0$, где:

а) $z_0 = 3 - i$; б) $z_0 = 2 + 2i$.

3.1.37. Комплексные числа z_1, z_2 и z_3 являются вершинами треугольника, расположенного в комплексной области. Найдите длину медианы, выходящей из вершины z_1, если:

а) $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 8 - 5i$, $z_3 = 6 - 7i$;

б) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 12 - 3i$, $z_3 = 16 - 5i$.

3.1.38. В комплексной области найдите действительное число x, такое, чтобы точки z_1, z_2, z_3 и x являлись вершинами параллелограмма, если:

а) $z_1 = -17$, $z_2 = \left(\sqrt{3} - i\right)^4$, $z_3 = \overline{z}_2$;

б) $z_1 = -18$, $z_2 = \left(1 + \sqrt{3}i\right)^4$, $z_3 = \overline{z}_2$.

3.1.39. Известно, что z — комплексное число.

а) Найдите z^{17}, если $\frac{1}{z} + z = \sqrt{3}$.

б) Найдите z^{20}, если $\frac{1}{z} + z = 1$.

3.1.40. а) Найдите модуль комплексного числа $z^3 + z^5$, если

$$z = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

б) Найдите модуль комплексного числа $z^2 - z^4$, если

$$z = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

3.1.41. Укажите все возможные значения $\arg z$ ненулевого комплексного числа z, если:

а) $\operatorname{Im}\frac{\overline{z}}{z} = \frac{4}{5}$; б) $\operatorname{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^{-1} = \frac{4}{5}$.

3.1.42.* а) Найдите все комплексные числа z вида

$$z = \sqrt{3}\left(x^2 - 6x + 13\right) + 3\left(4y - y^2\right)i,$$

где $x, y \in \boldsymbol{R}$, причем $\arg z = \frac{\pi}{3}$.

б) Найдите все комплексные числа z вида

$$z = 3\left(x^2 - 4x + 13\right) + \sqrt{3}\left(6y - y^2\right)i,$$

где $x, y \in \boldsymbol{R}$, причем $\arg z = \frac{\pi}{6}$.

3.1.43. а) Представьте в тригонометрической форме комплексное число $z = \sin 2\alpha - i\left(1 + \cos 2\alpha\right)$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

б) Представьте в тригонометрической форме комплексное число $z = \sin 2\alpha + i\left(1 - \cos 2\alpha\right)$, где $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

3.1.44. Представьте в алгебраической форме корни квадратного уравнения:

а) $z^2 - (4 - 3i)z + 7 - i = 0$; б) $z^2 + (2 - 3i)z + 1 + 7i = 0$.

Найдите комплексные корни уравнения (3.1.45—3.1.53).

3.1.45. а) $z^6 + (8 - i)z^3 - 8i = 0$; б) $z^6 + (1 + 8i)z^3 + 8i = 0$.

3.1.46. а) $z^5 + z^3 - z^2 = 1$; б) $z^5 - z^3 + z^2 = 1$.

3.1.47. а) $|z - 1| + z = 9 + 4i$; б) $|z - 1| - z = 7 + 12i$.

3.1.48.* а) $z^2 - 4z + 9 = \frac{12}{z} - \frac{9}{z^2}$; б) $z^2 - 2z + 5 = \frac{8}{z} - \frac{16}{z^2}$.

3.1.49.* а) $|2z - 1| = 4iz$; б) $|2z + 1| = 4iz$.

3.1.50.* Найдите все комлексные числа z, удовлетворяющие двойному равенству:

а) $|z - 3 + 4i| = ||z| - 5| = 4$; б) $|z + 4 - 3i| = ||z| - 5| = 6$.

3.1.51.* Составьте многочлен наименьшей степени с целыми коэффициентами, имеющий среди своих корней числа:

а) $0{,}25 - i$ и $1 + \sqrt{2}$; б) $0{,}5 + i$ и $1 - \sqrt{3}$.

3.1.52.* а) Число $x = \frac{1 + i}{1 - i}$ является корнем уравнения

$$2x^3 - a^2x^2 + 2a^2x - a - 2 = 0,\ a \in \boldsymbol{R}.$$

Найдите значение a и решите уравнение при найденном значении a.

б) Число $x = \frac{1 - i}{1 + i}$ является корнем уравнения

$$2x^3 + a^2x^2 + 2a^2x - a + 2 = 0,\ a \in \boldsymbol{R}.$$

Найдите значение a и решите уравнение при найденном значении a.

3.1.53.* а) Известно, что число $x_1 = \left(\sin\frac{5\pi}{8} + i\cos\frac{5\pi}{8}\right)^4$ является корнем уравнения

$$x^3 + (a-2)x^2 + a^2x - 2a^2 - 1 = 0,\ a \in \boldsymbol{R}.$$

Найдите значение a и решите уравнение при найденном значении a.

б) Известно, что число $x_1 = \left(\sin\frac{3\pi}{8} - i\cos\frac{3\pi}{8}\right)^4$ является корнем уравнения

$$x^3 - (a+3)x^2 + a^2x - a^2 - 1 = 0,\ a \in \boldsymbol{R}.$$

Найдите значение a и решите уравнение при найденном значении a.

3.1.54. Найдите действительные значения x и y из уравнения:

а) $(1+i)x + (1-i)y = 3 - i$;

б) $(2-i)x + (1+i)y = 5 - i$.

3.1.55. Найдите действительные числа x, y, z, удовлетворяющие равенству:

а) $2x - x^2 + z^2i - xi = y^2 + 2y + 2 + xi + zi$;

б) $z^2 + 2z + yi + xi = 2x - x^2 - 2 - xi + y^2i$.

3.1.56. Найдите все пары действительных чисел x, y, удовлетворяющих равенству:

а) $x(\cos(\pi y) + i\sin(\pi y)) = \sqrt{3} + i$;

б) $y(\cos(\pi x) + i\sin(\pi x)) = \sqrt{3}\cdot i + 1$.

3.1.57. Найдите действительные числа x и y, удовлетворяющие уравнению:

а) $2(x^2 + y^2) + 3(x+y)i = 7 + 3xy + (xy+1)i$;

б) $3(x^2 + y^2) + 2(x+y)i = 8 + 2xy + (xy+1)i$.

Укажите все действительные значения a, при которых данная система уравнений имеет единственное комплексное решение (3.1.58—3.1.59).

3.1.58.* а) $\begin{cases} |z-2| = a, \\ (z+1)^6 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z+3| = a, \\ (z-1)^6 = 1. \end{cases}$

3.1.59.* а) $\begin{cases} |z+2| = 1, \\ \arg z = a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z-2| = 1, \\ \arg z = a. \end{cases}$

3.1.60. Сократите дробь:

а) $\dfrac{9m^2 + 4n^2}{3m - 2in}$; б) $\dfrac{\sqrt{a} - i\sqrt{b}}{a + b}$.

3.1.61. Выполните действия:

а) $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$; б) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)(1 + i)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

3.1.62.* а) Найдите все действительные значения x и y, при которых комплексные числа

$$z_1 = \log_y \frac{x}{2} + 2xi \quad \text{и} \quad z_2 = \log_{\frac{x}{2}} y - yi$$

сопряженные.

б) Найдите все действительные значения x и y, при которых комплексные числа

$$z_1 = \log_{2x} y + xi \quad \text{и} \quad z_2 = \log_y 2x + 2yi$$

равны.

Вычислите (3.1.63—3.1.69).

3.1.63. а) $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{10}$; б) $\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$.

3.1.64. а) $\left(3 + i\sqrt{2}\right)^8 + \left(3 - i\sqrt{2}\right)^8$; б) $\left(2 + i\sqrt{3}\right)^5 + \left(2 - i\sqrt{3}\right)^5$.

3.1.65. а) $\dfrac{(1+i)^{1993}}{(1-i)^{1994}}$; б) $\dfrac{(1-i)^{1993}}{(1+i)^{1994}}$.

3.1.66.* а) $\left(\dfrac{1 - \sqrt{3} + \left(\sqrt{3} + 1\right)i}{8}\right)^{26}$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{3} - 1 + \left(\sqrt{3} + 1\right)i}{8}\right)^{38}$.

3.1.67. а) $\sqrt[4]{\dfrac{6\sqrt{3}i - 2}{2 + i\sqrt{3}} \cdot (1+i)^4}$; б) $\sqrt[4]{\dfrac{6\sqrt{3}i + 2}{-2 + i\sqrt{3}} \cdot (1+i)^4}$.

3.1.68. а) $\arg \dfrac{5(1-2i)(1+i)^6}{8(2-i)}$; б) $\arg \dfrac{5(1+2i)(1-i)^6}{8(1-2i)}$.

3.1.69.* а) $\operatorname{Re}\left(\left(\sqrt{3} - i\right)^{55} + \sqrt{3}\left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{53}\right)\right)$;

б) $\operatorname{Re}\left(\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{52} + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{50}\right)$.

Вычислите $f(z)$ при $z = z_0$ (3.1.70—3.1.71).

3.1.70. а) $f(z) = \left(\dfrac{z+1}{z + \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}} \right)^{12}$, $z_0 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}i}{2}$;

б) $f(z) = \left(\dfrac{z-1}{z - \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}} \right)^{12}$, $z_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}i}{2}$.

3.1.71. а) $f(z) = 27z^3 - 54z^2 + 36z - 8$, $z_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}i}{6}$;

б) $f(z) = 8z^3 - 36z^2 + 54z - 27$, $z_0 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}i}{4}$.

3.1.72. Вычислите значение выражения:

а) $4x^{25} - 3x^{24} + 2x^3 - 2x + 1$ при $x = i$;

б) $x^{25} - 8x^{14} + 5x^4 - 4x^2 - x - 10$ при $x = i$.

3.1.73. а) Найдите наибольший модуль комплексного числа z, удовлетворяющего условию: $|zi - 3i + 4| \le |i|$.

б) Найдите наименьший модуль комплексного числа z, удовлетворяющего условию: $|z - i| \le |z + \sqrt{3}|$.

3.1.74. а) Дано: $z_1 = 3 + 4i$ и $z_2 = i$. Найдите $\left(\dfrac{\bar{z}_1 + z_2}{3z_2} \right)^{14}$.

б) Дано: $z_1 = 4i$ и $z_2 = i - 3$. Найдите $\left(\dfrac{\bar{z}_1 + z_2}{3z_1} \right)^{6}$.

3.1.75. а) Пусть $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -\sin\dfrac{\pi}{24} + i\cos\dfrac{\pi}{24}$.

Вычислите $(z_1 \cdot z_2)^6$.

б) Пусть $z_1 = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

Вычислите $\left(\dfrac{z_1}{z_2} \right)^6$.

3.1.76. Представьте в тригонометрической форме:

а) $z = 1 + \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

3.1.77. При каких действительных x и y справедливо равенство:

а) $\dfrac{x+1+(y-3)i}{5+3i}=1+i$;

б) $(x+y)^2 i+\dfrac{6}{i}-x=-y+5i(x+y)-1$?

3.1.78. Найдите такие действительные значения a и b, при которых выполняется равенство:

а) $(a+bi)^2=5+6bi$; б) $(a-i)^3=b-4+i$.

3.1.79. а) Найдите действительные x, если известно, что число $(1-2ix)^3+11$ чисто мнимое.

б) Найдите действительные x из условия, что число $(x-2i)^3-2ix$ действительное.

Решите уравнения (3.1.80—3.1.82).

3.1.80. а) $x^2+(1+2x)i-1+i=0$; б) $2x^2+(4+2i)x+1+2i=0$.

3.1.81. а) $x^6-9x^3+8=0$; б) $x^6-7x^3-8=0$.

3.1.82. а) $(x-1)^6+26(x-1)^3-27=0$;

б) $(x+1)^6+7(x+1)^3-8=0$.

3.1.83. Найдите модуль комплексного числа:

а) $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; б) $\left(\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}\right)^3$.

3.1.84. Вычислите выражение, представив его в тригонометрической форме:

а) $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$; б) $(1+\sin\alpha+i\cos\alpha)^8$.

3.1.85. а) Выразите функции $\cos 7x$, $\sin 7x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

б) Выразите функции $\cos 5x$, $\sin 5x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

3.1.86. а) Найдите наибольшее и наименьшее по модулю решения системы

$$\begin{cases}|z-1-i|=1,\\ |z-i|=1.\end{cases}$$

б) Найдите наибольшее по аргументу решение системы

$$\begin{cases}|z-1-i|\le 1,\\ |z-i|\ge 1.\end{cases}$$

3.1.87. а) Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z+1-i| \le 1$, найдите число с наименьшим положительным аргументом.

б) Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z-5i| \le 3$, найдите число с наибольшим модулем.

3.1.88. Пусть z — комплексное число. Точкам A, B, C соответствуют числа z, z^2, z^3.

а) Докажите, что если $|z| = 1$, то ΔABC равнобедренный.

б) Найдите все такие комплексные числа z, что ΔABC равносторонний.

3.2. Уравнения и системы уравнений

3.2.01. Найдите все действительные корни уравнения:

а) $3x^5 - 6x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 3x + 6 = 0$;

б) $4x^5 + 8x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 3x - 6 = 0$.

3.2.02. а) Вычислите наибольший корень уравнения

$$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0.$$

б) Вычислите наименьший корень уравнения

$$x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x + 1 = 0.$$

3.2.03.° Дана функция f. Решите уравнение $f(x) = b$:

а) $f(x) = \sqrt{2x+6} - \sqrt{x-2}$, $b = 4$;

б) $f(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{2x+4}$, $b = -4$.

Решите уравнения (3.2.04—3.2.06).

3.2.04.° а) $\sqrt{x^2 - x + 4} = 2x$;

б) $\sqrt{x^2 - 2x + 9} = 3 - 2x$.

3.2.05.° а) $\sqrt{7x^2 + 8x + 10} - \sqrt{7x^2 - 8x + 10} = 2x$;

б) $\sqrt{10x^2 + 8x + 7} + \sqrt{10x^2 - 8x + 7} = 8x$.

3.2.06. а) $|x| = 5 - \sqrt{1-x}$; б) $\sqrt{3-x} = |x| - 3$.

3.2.07. Найдите модуль разности корней уравнения:

а) $\sqrt{2x^2+3x-5}-\sqrt{2x^2+3x-8}=1$;

б) $\sqrt{3x^2-5x-4}+\sqrt{3x^2-5x-8}=2$.

3.2.08. Решите уравнение:

а) $x+\sqrt{3+\sqrt{x^2-2x+1}}=4$;

б) $x+\sqrt{7+\sqrt{x^2-6x+9}}=4$.

3.2.09. Решите уравнение и укажите значения арккосинуса и арксинуса его корней:

а) $x^2+\frac{3}{2}x+2=\sqrt{2x^2+3x+7}$;

б) $x^2-3x-\sqrt{x^2-3x+5}=1$.

3.2.10. а) Решите уравнение $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$ и найдите знаки $\sin x_1$, $\sin x_2$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

б) Решите уравнение $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$ и найдите знак $\cos x_1$, где x_1 — корень данного уравнения.

Решите уравнения (3.2.11—3.2.12).

3.2.11.° а) $\frac{24}{(x+4)(x-2)}-\frac{15}{(x+3)(x-1)}=2$;

б) $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

3.2.12. а) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$;

б) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

3.2.13. Решите уравнение, в котором x — целое число:

а) $\frac{x-1}{x^2}+\frac{x-2}{x^2}+\frac{x-3}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^2}=\frac{7}{15}$;

б) $\frac{x+1}{x^2}+\frac{x+2}{x^2}+\frac{x+3}{x^2}+\ldots+\frac{4}{x^2}=-\frac{7}{20}$.

3.2.14. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

а) $\sqrt{x-3}=x-a$; б) $\sqrt{x-2}=x-a$.

3.2.15.° а) При каких значениях a уравнения

$$x^2+ax+1=0 \quad \text{и} \quad x^2+x+a=0$$

имеют общий действительный корень?

б) При каких значениях b уравнения

$$2x^2 - (2b+1)x - 3 = 0 \quad \text{и} \quad 6x^2 + (2b-3)x - 1 = 0$$

имеют общий корень?

3.2.16.* а) Найдите a, при которых имеет решение уравнение

$$\sqrt{3a + \sqrt{3a + 2x - x^2}} = 2x - x^2.$$

б) Для каждого $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$ найдите решение уравнения

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}.$$

3.2.17. Найдите целые решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - y^2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - 2xy = -1, \\ x^2 + y^2 + 3xy = 11. \end{cases}$

Найдите все действительные решения системы уравнений (3.2.18.—3.2.19).

3.2.18.° а) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 26, \\ x^2y - xy^2 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{5}{x - y}, \\ (x+y)^2(x-y) = 9. \end{cases}$

3.2.19. а) $\begin{cases} x^2 + x\sqrt{xy} - 3 = 0, \\ y^2 + y\sqrt{xy} - 24 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y + 2\sqrt{xy} + 8 = 0, \\ x - 3\sqrt{xy} + 7 = 0. \end{cases}$

3.2.20.° Решите систему уравнений (m — параметр):

а) $\begin{cases} x + (m+1)y = 1, \\ mx + 2y = m; \end{cases}$ б) $\begin{cases} mx + y = 1, \\ x + my = -1. \end{cases}$

3.2.21.° При каких значениях b система:

а) $\begin{cases} x - (b-1)y = 2, \\ (b+2)x + 2y = 4 + b^2 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений;

б) $\begin{cases} (b+1)x + y = 3, \\ 2x - (b-2)y = 6 \end{cases}$ не имеет решений?

3.2.22. При каких значениях параметра a совместна система уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = a, \\ ax - 2y = 4, \\ x + ay = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + y = 2, \\ x - y = a? \end{cases}$

Найдите все действительные решения системы уравнений (3.2.23—3.2.24).

3.2.23. а) $\begin{cases} -x+y+z=-3, \\ 2x+2y-3z=3, \\ 3x+4y+5z=-6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x-y+z=3, \\ 5x+2y+3z=-4, \\ 3x+4y-2z=-9. \end{cases}$

3.2.24. а) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2+2x^2y-9=0, \\ x-y-x^2y+3=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2+2xy+6xy^2=25, \\ x+y-xy^2+5=0. \end{cases}$

3.2.25.° Решите уравнение:

а) $\cos 8x-2\sin 2x\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=1$;

б) $\cos 6x+4\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3x}{2}\right)\cdot\sin\frac{3x}{2}=1$.

3.2.26. Найдите решения уравнения, принадлежащие области определения функции $f(x)$:

а) $\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2$, $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}x-\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{13-18\operatorname{tg}x}=6\operatorname{tg}x-3$, $f(x)=\sqrt{13\sin x-2\sqrt{13}}$.

3.2.27. Найдите те решения уравнения, для которых определено выражение $g(x)$:

а) $\sin 3x\cdot\cos 3x=\sin 2x$, $g(x)=\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\sin 6x\cdot\cos 6x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)$, $g(x)=\operatorname{tg}\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$.

3.2.28.° Решите уравнение:

а) $\frac{1-\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{ctg}x}=-(\cos x-\sin x)^2$;

б) $\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=-(\sin x+\cos x)^2$.

3.2.29.° Найдите те решения уравнения, для которых имеет смысл данное условие:

а) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}^2x-1$, $\sin x>0$;

б) $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=9\operatorname{tg}^2x+1$, $\cos x>0$.

3.2.30.° Решите уравнение и найдите сумму наибольшего и наименьшего корней уравнения, принадлежащих интервалу:

а) $\dfrac{6\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = 4 - \cos 4x$, $\left(\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{7\pi}{4}\right)$;

б) $\dfrac{8}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = 2\cos 4x - 3$, $\left(\dfrac{\pi}{16}; \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

3.2.31. Найдите все решения уравнения на данном промежутке:

а) $3\sin 5x + \sqrt{2}\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{20}\right) = 3\cos 5x - 3\sqrt{2}$, $[-2\pi; 2\pi]$;

б) $5\cos 3x + \sqrt{2}\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 5\sin 3x - 5\sqrt{2}$, $[-2\pi; 2\pi]$.

Решите уравнения (3.2.32—3.2.33).

3.2.32. а) $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$; б) $4|\sin x| + 3 = 4\cos^2 x$.

3.2.33. а) $\sin^2 x + 3x^2\cos x + 3x^2 = 0$;

б) $\cos^2 x + \sqrt{x - \dfrac{\pi}{2}} \cdot \sin x + \sqrt{x - \dfrac{\pi}{2}} = 0$.

3.2.34.° Решите уравнение и укажите число его корней на промежутке:

а) $2\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 1\right) = \cos x$, $[0;\pi]$;

б) $\dfrac{1}{2}\cos x + 1 = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3.2.35. Решите уравнение:

а) $\sqrt{\sin^3 x - \cos^3 x} = \sqrt{-\cos x}$;

б) $\sqrt{\cos^3 x - \sin^3 x} = \sqrt{-\sin x}$.

Решите уравнения (3.2.36—3.2.40).

3.2.36.* а) $\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{2}} = \sqrt{\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$;

б) $\sqrt{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x} = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{2}}$.

3.2.37. а) $15\cos 2x \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 7$; б) $(4 - \cos 2x) \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = 7$.

3.2.38. а) $\sin 2x = \sqrt{\frac{5}{4} - 2\sin^2 x}$; б) $\cos 2x = \sqrt{\frac{7}{4} - 2\cos^2 x}$.

3.2.39. а) $4\sin^2 x \cdot \sin 4x = \sin 6x$; б) $\cos^2 x \cdot \cos^2 2x = \cos 6x$.

3.2.40.° а) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$;

б) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 2x + \cos^4 2x$.

3.2.41. Найдите корни уравнения, удовлетворяющие данному условию:

а) $\sin^5 3x + \sin^3 3x \cdot \cos^2 3x + 8\sin^2 3x \cdot \cos^3 3x +$
$+ 8\cos^5 3x = 0$, $\sin 3x > 0$;

б) $\sin^4 3x + \sin 3x \cdot \cos^3 3x - 2\sin^3 3x \cdot \cos 3x -$
$- 2\cos^4 3x = 0$, $\operatorname{tg} 3x < 0$.

Решите уравнения (3.2.42—3.2.43).

3.2.42. а) $(\arcsin x)^2 - 5\arcsin x = -2$;

б) $(\arccos x)^2 - 7\arccos x = -3$.

3.2.43. а) $\operatorname{arctg}(1+x) + \operatorname{arctg}(1-x) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

б) $\operatorname{arcctg}(1+x) + \operatorname{arcctg}(1-x) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

3.2.44.* Найдите сумму корней уравнения:

а) $\arcsin 2x = 3\arcsin x$; б) $3\arccos 2x = \arccos x$.

3.2.45.* Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \arccos x + \arcsin\frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}, \\ 3x^3 + x^2 - 3x + 3 = y^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \arcsin x + \arccos\frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}, \\ 2x^3 + x^2 - 3x + 2 = y^2. \end{cases}$

3.2.46.* При каких значениях a, принадлежащих данному интервалу, уравнение имеет решения:

а) $\sqrt{2\sin(x-a) + \sqrt{3}} = \cos 6x - 1$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\sqrt{2\cos(x-a) + \sqrt{3}} = \sin 6x - 1$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

3.2.47.* На данном отрезке найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению:

а) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2 - \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{1 + 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решите системы уравнений (3.2.48—3.2.51).

3.2.48.* а) $\begin{cases} \sin x^2 - \sin y = 1, \\ x^2 + |y| = \dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x^2 + \cos y = 1, \\ x^2 + |y| = \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$

3.2.49.* а) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x + \cos y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin y + \cos x = 1. \end{cases}$

3.2.50.* а) $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \dfrac{\sin x + \sin y - \cos x \cdot \cos y - 1}{1 - \cos y} = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - x = \pi, \\ \dfrac{\cos x - \cos y + \cos x \cdot \cos y}{1 - \sin x} = 0. \end{cases}$

3.2.51.* а) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ |x - y| = \dfrac{2\pi}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x + \cos y = -\sqrt{3}, \\ |x + y| = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

3.2.52. Решите уравнение:

а) $4\cos x - 3\sin x = 5$; б) $12\sin x + 5\cos x = 13$.

Решите уравнения (3.2.53—3.2.56).

3.2.53.° а) $8 \cdot 9^x + 6^{x+1} = 27 \cdot 4^x$; б) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.

3.2.54.° а) $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$; б) $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$.

3.2.55.° а) $125^x + 45^x = 2 \cdot 27^x$; б) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.

3.2.56. а) $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x$;

б) $3^{x+3} - 2^{x^2+2x-3} = 2^{x^2+2x-2} + 26 \cdot 3^x$.

3.2.57. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$:

а) $f(x) = 6^{x^2-6} - 6^{4x-9} + \dfrac{81}{4}$, $g(x) = 4^{\log_2\left(3+1+\frac{1}{3}+\ldots\right)}$;

б) $f(x) = 5^{x^2-8} - 5^{5x-12} + \dfrac{3}{16}$, $g(x) = 0{,}5^{\log_2\left(4+1+\frac{1}{4}+\ldots\right)}$.

Решите уравнения (3.2.58—3.2.59).

3.2.58. а) $3\sqrt{4^x + 4 - 2^{x+2}} = 3 \cdot 2^{x+1} - 2^{2x} - 2$;

б) $\sqrt{1 - 2 \cdot 3^x + 9^x} = 3^{2x+1} + 3 \cdot 3^x - \dfrac{2}{3}$.

б) $\log_4(ax-7)=2\log_{16}(12x-x^2-32)$?

3.2.80. Найдите все значения параметра a, при которых данная система имеет решение:

а) $\begin{cases}\log_2(4y+4a-3)=1+\log_2(a-x),\\ y=\sqrt{x};\end{cases}$

б) $\begin{cases}1+\log_2(a-2-y)=\log_2(a-x),\\ y+2\sqrt{x}=1.\end{cases}$

3.2.81. а) При каких значениях параметра a уравнение

$$(2\sin\alpha+1)x^2+4x\sin\alpha=1-2\sin\alpha$$

имеет, и притом только отрицательные, решения?

б) При каких значениях параметра a уравнение

$$(2\cos\alpha+1)x^2-4x\cos\alpha=1-2\cos\alpha$$

имеет, и притом только положительные, решения?

3.3. Неравенства и системы неравенств

3.3.01.° Решите неравенства:

а) $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{3+2x-x^2}\le 0$; б) $\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{2+x-x^2}\ge 0$.

3.3.02.° Найдите наибольшее и наименьшее целые значения аргумента, при которых функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения:

а) $f(x)=\dfrac{(x^2-8x+15)(x^2-5x)}{4+3x-x^2}$;

б) $f(x)=\dfrac{(x^2-2x-3)(x^2-x-2)}{4x-x^2}$.

Найдите область определения функции (3.3.03—3.3.05).

3.3.03.° а) $y=\sqrt{\dfrac{3x-17}{x-6}+\dfrac{4}{3-x}}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{3x-5}{x-2}-\dfrac{4}{x+1}}$.

3.3.04. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x^2-3x-4}+2x+2}}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x^2+2x-3}+2x+6}}$.

3.3.05. а) $y=\sqrt{2x-4-\sqrt{x^2-5x+6}}$;

б) $y=\sqrt{2x-2-\sqrt{x^2-3x+2}}$.

3.3.06. а) При каких значениях аргумента график функции $y = xf(x)$ лежит не ниже графика функции $y = 2f(x)$, где $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$?

б) При каких значениях аргумента график функции $y = xf(x)$ лежит не выше графика функции $y = 3f(x)$, где $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$?

3.3.07.* Решите неравенство:

а) $\dfrac{2 + \sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1} \geq 1$;

б) $\dfrac{1 - \sqrt{2x^2 + x - 10}}{x - 1} \leq 1$.

3.3.08. Найдите наименьшее натуральное и наибольшее отрицательное целое решения неравенства:

а) $|x^2 + 6x + 5| < 2x^2 + 8x - 10$;

б) $|x^2 + 8x + 12| < 2x^2 + 12x$.

Выясните, равносильны ли следующие неравенства. Ответ обоснуйте (3.3.09—3.3.10).

3.3.09. а) $|x^2 - 5x - 6| \geq 2x + 2$ и $\dfrac{x^2 - 12x + 32}{x^2 - 12x + 36} \geq 0$;

б) $|x^2 - 4x - 5| \geq 3x + 3$ и $\dfrac{x^2 - 10x + 16}{x^2 - 10x + 25} \geq 0$.

3.3.10.* а) $\sqrt{x^2 - x - 2} \leq x + 1$ и $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 7x + 12} \leq 0$;

б) $\sqrt{x^2 + x - 2} \leq x + 2$ и $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x} \geq 0$.

3.3.11. Найдите такие ближайшие целые числа x_1 и x_2, удовлетворяющие неравенству $f(x) \geq 1$, чтобы их среднее арифметическое не удовлетворяло этому неравенству:

а) $f(x) = |x^2 - 5x + 6| + |x - 2|$;

б) $f(x) = |x^2 - 7x + 12| + |x - 3|$.

Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств и найдите все ее целочисленные решения (3.3.12—3.3.13).

3.3.12.* а) $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 5 < 0, \\ x - 5y + 1 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + 2 \geq 0, \\ x - y - 4 < 0, \\ x + 5y + 2 < 0. \end{cases}$

3.3.13.* а) $\begin{cases} y + 6x \geq x^2 + 8, \\ y + x^2 + 8 < 6x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + 2x + 2 \geq x^2, \\ y + x^2 + 2 < 2x. \end{cases}$

3.3.14.* Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

а) $\left|\sqrt{x} - \sqrt{x + y} + 0{,}5\right| \leq 0{,}5$; б) $\left|\sqrt{x} - \sqrt{x - y} + 1\right| \leq 1$.

Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств (3.3.15—3.3.16).

3.3.15.* а) $\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 2y + 1, \\ y + x^2 \leq 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 1 - 2y, \\ y + x^2 \leq 3. \end{cases}$

3.3.16.* а) $\begin{cases} x + |y - 1| \leq 3, \\ |y - 1| \leq \sqrt{3 + 2x - x^2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + |y + 1| \leq 1, \\ |y + 1| \leq \sqrt{3 - 2x - x^2}. \end{cases}$

3.3.17. Для всех значений параметра a решите неравенство:

а) $\sqrt{1 - x} + 1 \leq x - a^2$; б) $\sqrt{x - 2} + x \leq 2 - a^2$.

3.3.18.* Для всех значений параметра a решите неравенство $f(x) > a^2 - 1$:

а) $f(x) = \sqrt{8 - 2x - x^2}$; б) $f(x) = \sqrt{5 - 4x - x^2}$.

3.3.19.* Для всех значений параметра a решите неравенство:

а) $x^2 + a \geq a \cdot |x - 1| + 2x$; б) $x^2 + 2x + a \cdot |x + 1| \geq a$.

Решите неравенства (3.3.20—3.3.34).

3.3.20.° а) $\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{3}{4}$; б) $\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{4}$.

3.3.21.° а) $-\frac{1}{3} \leq \sin 3x < \frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{4} \leq \cos\frac{x}{3} < \frac{1}{2}$.

3.3.22. а) $\cos\left(4x + \frac{5\pi}{2}\right) \leq \cos^4 x - \sin^4 x$;

б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) \geq \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$.

3.3.23. а) $\cos\frac{x}{2}+2\cos x\ge 1$; б) $\sin\frac{x}{2}+2\cos x\le -1$.

3.3.24. а) $2\sin^2 2x\ge \cos^4 x+\sin^4 x$;

б) $2\cos^2 2x\le \cos^4 x+\sin^4 x$.

3.3.25. а) $\sin\left(x+\frac{\pi}{7}\right)\le\cos x$; б) $\cos\left(x-\frac{\pi}{7}\right)\le\sin x$.

3.3.26.* а) $\sin x\le 7\cos x+5$; б) $\cos x+5\le 7\sin x$.

3.3.27. а) $\dfrac{2\sin^2 2x-1}{4\sin^2 2x-3}\ge 0$; б) $\dfrac{4\cos^2\frac{x}{2}-3}{2\cos^2\frac{x}{2}-1}\le 0$.

3.3.28.* а) $\sqrt{-2\sin x+2}\ge 2\sin(\pi-x)$;

б) $\sqrt{2\cos x+2}\ge 2\cos(\pi-x)$.

3.3.29.* а) $\left|\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg}x+4\right|\ge\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg}x+3$;

б) $\left|\operatorname{ctg}^2 x-4\operatorname{ctg}x+3\right|\le\operatorname{ctg}^2 x-3\operatorname{ctg}x+2$.

3.3.30. а) $\sin 5x\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}+3x\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+4x\right)\cdot\cos 4x\le 0$;

б) $\sin\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin 3x+\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos 4x\le 0$.

3.3.31.* а) $\cos 5x(\sin 8x-\cos 5x-\sin 2x)\ge 0$;

б) $\cos 3x(\sin 8x-\cos 3x+\sin 2x)\le 0$.

3.3.32. а) $18\arcsin^2 x-3\pi\arcsin x\le\pi^2$;

б) $12\arccos^2 x-\pi\arccos x\le\pi^2$.

3.3.33. а) $\operatorname{arctg}^2(2x-1)\le\frac{\pi^2}{36}$; б) $\operatorname{arctg}^2\left(\frac{x}{2}-1\right)\le\frac{\pi^2}{9}$.

3.3.34.* а) $\arccos^2(\operatorname{tg}x)\le\frac{\pi^2}{9}$; б) $\arccos^2(\operatorname{ctg}x)\ge\frac{\pi^2}{9}$.

Решите системы неравенств (3.3.35—3.3.39).

3.3.35.* а) $\begin{cases}\sin x\ge -\frac{1}{2},\\ x^2-4\pi x-5\pi^2<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\cos x\le\frac{1}{2},\\ x^2+4\pi x-5\pi^2<0.\end{cases}$

3.3.36. а) $\begin{cases} \sin x < \frac{1}{3}, \\ \cos x \geq \frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x \leq \frac{1}{4}, \\ \sin x > \frac{1}{3}. \end{cases}$

3.3.37.* а) $\begin{cases} \sin 2x \leq \frac{1}{2}, \\ \operatorname{ctg} 2x > \frac{1}{\sqrt{3}}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos 3x \leq \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} 3x > \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

3.3.38.* а) $\begin{cases} \sin^2 x < \frac{3}{4}, \\ 2\cos^2 x \leq 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin^2 x < \frac{1}{2}, \\ 4\cos^2 x \leq 3. \end{cases}$

3.3.39.* а) $\begin{cases} \arcsin x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \arccos x^2 \leq \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \arccos x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ \arcsin x^2 \geq \frac{\pi}{6}. \end{cases}$

3.3.40. Найдите все значения параметра a, для которых данное неравенство выполняется при любых значениях неизвестной x:

а) $(3\operatorname{tg} a + 2)x^2 - 6x\operatorname{tg} a + 6\operatorname{tg} a \leq 3$;

б) $(2\operatorname{ctg} a - 1)x^2 - 4x\operatorname{ctg} a + 6\operatorname{ctg} a \geq 2$.

3.3.41.* При каких значениях параметра a числа $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$ одновременно являются решением неравенства:

а) $\cos(x - a) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin(x - a) > \frac{\sqrt{3}}{2}$?

3.3.42.* При каких значениях параметра a данное неравенство имеет хотя бы одно решение:

а) $(x^2 + 1)\cos a \leq 2x(\cos a - 1)$;

б) $(x^2 + 1)\sin a \geq 2x(1 + \sin a)$?

Решите неравенства (3.3.43—3.3.53).

3.3.43. а) $2^{\sqrt{2x+3}} \geq \frac{1}{2^x}$; б) $3^{\sqrt{3x+4}} \geq \frac{1}{3^x}$.

3.3.44.° а) $\frac{9^x - 10 \cdot 3^x + 9}{1 - x^2} \geq 0$; б) $\frac{4^x - 9 \cdot 2^x + 8}{4 - x^2} \geq 0$.

3.3.45.° а) $\frac{\frac{1}{9^x} - \frac{2}{3^{x-1}} + 9}{\frac{1}{3^{2x}} - \frac{4}{3^x} + 3} \leq 0$; б) $\frac{\frac{1}{4^x} - \frac{1}{2^{x-1}} + 1}{\frac{1}{2^{2x}} - \frac{3}{2^{x-1}} + 8} \leq 0$.

3.3.46. а) $\left|4^{x-1}-2^{x+1}+3\right| \le 2^{x-1}-3$;

б) $\left|3^{2x+1}-7\cdot 3^{x}+2\right| \le 3^{x+1}-1$.

3.3.47. а) $\left|9^{x}-3^{x+1}+2\right| \ge 3^{x}-1$; б) $\left|4^{x}-2^{x+2}+3\right| \ge 2^{x}-1$.

3.3.48. а) $\sqrt{2^{x}-7\cdot 2^{\frac{x}{2}}+10} \le 2^{\frac{x+2}{2}}-4$;

б) $\sqrt{3^{x}-3^{\frac{x+4}{2}}+18} \le 2\cdot 3^{\frac{x}{2}}-6$.

3.3.49.* а) $\sqrt{2\cdot 9^{x}-\left|6^{x}-3^{2x+1}\right|} > 2^{x}-3^{x+1}$;

б) $\sqrt{2^{2x+1}-\left|6^{x}-4^{x+1}\right|} > 3^{x}-2^{x+2}$.

3.3.50.* а) $\frac{1}{3^{2x^2+x-1}}+\frac{1}{3^{1-x}} < \frac{10}{3^{x^2+1}}$; б) $\frac{1}{2^{2x^2-x-3}}+\frac{1}{2^{x-1}} < \frac{5}{2^{x^2-1}}$.

3.3.51.* а) $\left(3^{\frac{x-2}{2}}-1\right)\cdot\sqrt{3^{x}-5\cdot 3^{\frac{x}{2}}+4} \ge 0$;

б) $\left(2^{\frac{x-4}{2}}-1\right)\cdot\sqrt{2^{x}-7\cdot 2^{\frac{x}{2}}+10} \ge 0$.

3.3.52.* а) $\frac{9^{x}-3^{x+2}+18}{3^{x}-1} \le 9^{x}-7\cdot 3^{x}+12$;

б) $\frac{4^{x}-11\cdot 2^{x}+28}{2^{x}-2} \le 4^{x}-9\cdot 2^{x}+20$.

3.3.53.* а) $\left|9^{x}-1\right|+\left|9^{x}-3^{x+1}+2\right| \le 3^{x+1}-3$;

б) $\left|4^{x}-2^{x+1}\right|+\left|4^{x}-5\cdot 2^{x}+6\right| \le 3\cdot 2^{x}-6$.

3.3.54.* При всех допустимых значениях параметра a решите неравенство:

а) $\sqrt{3-2a^{x}} \le a^{x}$; б) $\sqrt{4-3a^{x}} \le a^{x}$.

3.3.55.* Найдите все значения параметра a, при которых любые значения x из промежутка $[0;3]$ удовлетворяют данному неравенству:

а) $2^{a^2-ax} \le 16$; б) $3^{a^2+ax} \le 81$.

3.3.56.* Решите неравенство:

а) $4^{\cos x}+1<3\cdot 2^{\cos x-\frac{1}{2}}$; б) $9^{\sin x}+1<4\cdot 3^{\sin x-\frac{1}{2}}$.

3.3.57.* При каких значениях аргумента график функции $f(x)$ расположен не ниже графика функции $g(x)$:

а) $f(x)=1+4^{\operatorname{ctg} x}$, $g(x)=5\cdot 2^{\operatorname{ctg} x-1}$;

б) $f(x)=1+9^{\operatorname{tg} x}$, $g(x)=10\cdot 3^{\operatorname{tg} x-1}$?

Решите неравенства (3.3.58—3.3.77).

3.3.58. а) $\log_{\cos\frac{\pi}{4}}\left(x^2-x\right)\geq -2$; б) $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}\left(x^2+2x\right)\geq -2$.

3.3.59.° а) $\log_{x-1}4<2$; б) $\log_{x+1}9>2$.

3.3.60.° а) $\dfrac{\log_x 2-3}{8x^2-14x+5}\geq 0$; б) $\dfrac{\log_x 3-2}{8x^2-18x+7}\geq 0$.

3.3.61.° а) $\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{x-3}{x-2}<\dfrac{1}{1-\log_2 3}$; б) $\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{x-4}{x-2}>\dfrac{1}{1-\log_3 2}$.

3.3.62.° а) $\dfrac{\log_{0,25}(5+x)}{\log_4(7-x)}>0$; б) $\dfrac{\log_{0,2}(9-x)}{\log_5(7+x)}<0$.

3.3.63.* а) $\dfrac{\log_{0,1}|x+1|}{x^2+2x-3}<0$; б) $\dfrac{\log_{0,2}|x-1|}{x^2-2x-3}<0$.

3.3.64.* а) $\log_{2x-1}(x-1)\geq -1$; б) $\log_{2x+3}(x+1)\geq -1$.

3.3.65.* а) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(3-2x)\cdot\log_3(9-6x)<-4$;

б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(3-x)\cdot\log_2(6-2x)<-12$.

3.3.66. а) $(2x)^{\log_2 x-3}>32$; б) $(3x)^{\log_3 x-2}<81$.

3.3.67.° а) $\log_2 x^2>\log_8(x-1)^3+2$; б) $3\log_8(x+1)^2>\log_2 x+2$.

3.3.68. а) $\log_2\left(\log_3{}^2 x+\log_3 x\right)<1$; б) $\log_3\left(\log_2{}^2 x+2\log_2 x\right)<1$.

3.3.69. а) $\left|\log_x 2-2\right|>2\log_x{}^2 2-\log_x 32+2$;

б) $\left|\log_x 3-2\right|>2\log_x{}^2 3-\log_x 27+2$.

3.3.70.* а) $\sqrt{\log_2{}^2 x^2-\log_{\frac{1}{2}}x^{10}+4}\geq 2\log_2(-x)+1$;

б) $\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}{}^2 x^2+\log_3 x^{10}+4}\geq 2\log_3(-x)-4$.

3.3.71.* а) $\log_3\left(x^2+2x+1\right)\le 3\log_{|x+1|}9+4$;

б) $\log_2\left(x^2-2x+1\right)\le \log_{|x-1|}64+4$.

3.3.72. а) $\log_{2^2}x+4\log_x 8>13$; б) $\log_{3^2}x+3\log_x 9<7$.

3.3.73. а) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\log_{\frac{1}{5}}(x-1)^8\le -1$;

б) $\log_{\frac{1}{5}}\log_2\log_{\frac{1}{3}}(x+1)^{32}\le -1$.

3.3.74. а) $2\lg^2(2+x)-\lg\left(2+x\right)^2\cdot\lg x^3+\lg^2 x^2\le 0$;

б) $\lg^2(2-x)^2-\lg\left(2-x\right)^3\cdot\lg x^4+8\lg^2 x\ge 0$.

3.3.75. а) $\log_2\left(x^2-4x+4\right)<2x\log_{\frac{1}{2}}(2-x)+4x+4$;

б) $\log_2\left(x^2-6x+9\right)<2(x-1)\log_{\frac{1}{2}}(3-x)+4x$.

3.3.76.* а) $\sqrt{\log_2\frac{x}{4}}+\sqrt{\log_2(128x)}<5$;

б) $\sqrt{\log_3\frac{x}{3}}+\sqrt{\log_3(9x)+6}<5$.

3.3.77.* а) $2\log_{0,6}2^{4^x}-5\log_{0,6}2^{6^x}+\log_{0,6}2^{3^{2x+1}}\ge 0$;

б) $2\log_{0,7}3^{4^x}-7\log_{0,7}3^{10^x}+\log_{0,7}3^{5^{2x+1}}\ge 0$.

Найдите область определения функций (3.3.78—3.3.80).

3.3.78.* а) $y=\sqrt{\frac{17-\log_2 x^4}{\log_{2^2}|x|-4}+4}$; б) $y=\sqrt{\frac{10-\log_3 x^6}{\log_{3^2}|x|-1}+9}$.

3.3.79. а) $y=\log_{4\,9^x-3^{x+1}}\left(x^2-3x+2\right)$;

б) $y=\log_{3\,4^x-2^{x+1}}\left(x^2-5x+6\right)$.

3.3.80.* а) $y=\left(4^x-3\cdot 2^x+2\right)^{\log_{4-x^2}2}$; б) $y=\left(9^x-4\cdot 3^x+3\right)^{\log_{9-x^2}3}$.

3.3.81. Укажите промежутки знакопостоянства данной функции:

а) $y=\frac{\log_{2^2}x-4\log_2 x+3}{9^x-3^{x+1}+2}$; б) $y=\frac{\log_{3^2}x-3\log_3 x+2}{4^x-5\cdot 2^x+4}$.

Докажите, что при всех допустимых значениях x указанные неравенства являются истинными (3.3.82—3.3.84).

3.3.82.* а) $x^3-12x+17>\log_{2-|x|}\left(2-|x|\right)$;

б) $x^3-27x+55>\log_{3-|x|}\left(3-|x|\right)$.

3.3.83.* а) $\ln\left(x^2+x+1\right) < 2^{\log_2(3x)}$; б) $\ln\left(x^2-x+1\right) < 3^{\log_3(2x)}$.

3.3.84.* а) $9^{x^2+x+1} > \log_x x^{18x}$; б) $3^{x^2+3x+1} > \log_x x^{9x}$.

3.3.85.* Укажите все значения аргумента, при которых график функции $f(x)$ расположен ниже прямой $y=2$:

а) $f(x)=\log_{0,5x(x+1)}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{9}{16}\right)$;

б) $f(x)=\log_{0,5x(x-1)}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{9}{16}\right)$.

3.3.86.* Решите неравенство:

а) $\log_3^2 \operatorname{tg}^2 x + 2\log_3(-\operatorname{ctg} x) < 0$;

б) $\log_3^2 \operatorname{ctg}^2 x - 2\log_3(-\operatorname{tg} x) < 0$.

При всех допустимых значениях параметра a решите неравенства (3.3.87—3.3.88).

3.3.87.* а) $\sqrt{\log_a^2 x - 4} \ge \log_a\left(\frac{x}{a^2}\right)$; б) $\sqrt{\log_a^2 x - 9} \ge \log_a\left(\frac{x}{a^3}\right)$.

3.3.88.* а) $\left|\log_x\left(a^2-3\right)-3\right| \le 3$; б) $\left|\log_x\left(a^2-8\right)-2\right| \le 2$.

Решите системы неравенств (3.3.89—3.3.90).

3.3.89.* а) $\begin{cases} \lg^2(x-1)+2^y \le 4, \\ \sqrt{2^y} \ge \lg^2(x-1)+2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lg^2(x+1)+3^y \le 9, \\ \sqrt{3^y} \ge \lg^2(x+1)+3. \end{cases}$

3.3.90.° а) $\begin{cases} 2^y \ge \ln x + \sqrt{2}, \\ \ln^2 x + 4^y \le 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \ln y + 2^x \ge \sqrt{2}, \\ 4^x + \ln^2 y \le 1. \end{cases}$

3.4. Функции, их свойства и графики

3.4.01.* Определите наименьший положительный период данной функции. Ответ обоснуйте:

а) $y=\sin^2\frac{x}{12}+0{,}5\cos\frac{x}{10}$; б) $y=\cos^2\frac{x}{16}+0{,}5\sin\frac{x}{10}$.

3.4.02.* Укажите множество всех рациональных абсцисс и множество всех иррациональных абсцисс точек пересечения графиков функций $f(x)$ и $f(x+\pi x)$:

а) $f(x)=\sin x$; б) $f(x)=\cos x$.

3.4.03. Покажите, что данная функция, определенная на указанном промежутке, обратима, и найдите обратную к ней функцию. Постройте графики данной и обратной функций:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 7$, где $x \in (-\infty; 2]$;

б) $f(x) = -x^2 + 8x - 12$, где $x \in (-\infty; 3]$.

Найдите функции, обратные данным (3.4.04—3.4.06).

3.4.04. а) $y = x^4 + 2x^2, x \geq 0$;

б) $y = -x^4 - 3x^2, x \leq 0$.

3.4.05. а) $y = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{при } x \leq 0, \\ -x + 2 & \text{при } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x + 2 & \text{при } x \geq 0, \\ -x^2 + 4x + 2 & \text{при } x < 0. \end{cases}$

3.4.06. Докажите, что функция $f(x)$ необратима. Найдите функцию, обратную $f(x)$ на указанном промежутке, и постройте их графики:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $[3; +\infty)$;

б) $f(x) = x^2 + 8x + 12$, $(-\infty; -4]$.

Найдите интервалы непрерывности функций (3.4.07—3.4.09).

3.4.07. а) $y = \dfrac{1}{(x-2)(x-5)}$; б) $y = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-3}$.

3.4.08. а) $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$; б) $y = \dfrac{x^2 + x - 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}$.

3.4.09. а) $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < -1, \\ x - 1 & \text{при } x \geq 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{при } x \leq 1, x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 2x & \text{при } x > 1. \end{cases}$

3.4.10. Укажите все числа a, при которых данная функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a; a+2]$, является обратимой:

а) $f(x) = \begin{cases} |x+1| + |x-2| & \text{при } x \in (-\infty; 2], \\ x^2 - 8x + 15 & \text{при } x \in [2; +\infty); \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} |x-1| + |x+2| & \text{при } x \in (-\infty; 1], \\ x^2 - 6x + 8 & \text{при } x \in [1; +\infty). \end{cases}$

3.4.11.* При каких значениях a данная функция является непрерывной на $\boldsymbol{R}$:

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 1} & \text{при } x \in (-\infty; 1), \\ x^5 - 4ax + a^2 & \text{при } x \in [1; +\infty); \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x - 1} & \text{при } x \in (-\infty; 1), \\ 4x^4 + ax^2 + a^2 & \text{при } x \in [1; +\infty)? \end{cases}$

Является ли функция четной, нечетной (3.4.12—3.4.13)?

3.4.12. а) $y = \log_2\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$; б) $y = \log_3\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)$.

3.4.13. а) $y = \left(\log_2 \dfrac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(x - \log_3 \dfrac{2+x}{2-x}\right)$;

б) $y = \log_3\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)$.

3.4.14. а) Доказать, что если $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ — четные функции, то $y = f(\varphi(t))$ — четная функция.

б) Доказать, что если $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ — нечетные функции, то $y = f(\varphi(t))$ — нечетная функция.

3.4.15. а) При каких значениях x график функции $y = 2 - |x|$ лежит в круге радиуса 2 с центром в точке $(-1; 1)$?

б) При каких значениях x график функции $y = |x + 2|$ лежит в круге радиуса 2 с центром в точке $(-1; 1)$?

3.4.16. Для всех значений числа a исследуйте на четность и нечетность данную функцию:

а) $y = \cos\frac{a+x}{3} + \lg\frac{2x-a}{2x+a}$; б) $y = \cos\frac{a+x}{2} + \lg\frac{3x+a}{3x-a}$.

3.4.17. Докажите, что функция ограничена на множестве действительных чисел:

а) $y = \frac{x^2+x+6}{x^2+x+1}$; б) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

Исследуйте на ограниченность функции (3.4.18—3.4.20).

3.4.18. а) $y = \log_2 \cos\frac{1}{x+2}$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(1+\cos x)$.

3.4.19. а) $y = \frac{x^3+1}{x^2+x}$; б) $y = \frac{x^2+\sin(x+1)}{1+x^2}$.

3.4.20. а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\sin x|}$; б) $y = 2^{\log_2(1-x^2)}$.

3.4.21. Найдите промежутки монотонности функции (без использования производной):

а) $y = \sqrt{\cos^2 x} - \cos x$; б) $y = 2\sqrt{\cos^2 x} - \cos x$.

Найдите точки экстремума (локального min и max) без использования производной (3.4.22—3.4.24).

3.4.22. а) $y = \frac{1}{x^2+x+1}$; б) $y = \frac{x^2}{1+x^4}$.

3.4.23. а) $y = \big||x-1|-1\big|$; б) $y = |x| - |x+1|$.

3.4.24.* а) Докажите, что $\max f(x) < 0{,}77$, если $x \in [-\pi;\pi]$, $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x$;

б) Докажите, что $\min f(x) > -\frac{7}{18}$, если $x \in [-\pi;\pi]$, $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$.

Исследуйте функцию и постройте эскиз ее графика (3.4.25—3.4.35).

3.4.25.* а) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7$;

б) $y = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$.

3.4.26. а) $y = \frac{2x^2}{x-2}$; б) $\frac{x^2}{2(x+2)}$.

3.4.27. а) $y = \frac{2|x|-3}{3x-2}$; б) $\frac{3|x|-2}{2x-3}$.

3.4.28.* а) $y = \ln|2x| - 2x^2 + \frac{1}{2}$; б) $y = 8x^2 - \ln|4x| - \frac{1}{2}$.

3.4.29.* а) $y = 3^{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)} - 1$; б) $y = 2^{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} - 2$.

3.4.30. а) $y = 3^{3x-x^3}$; б) $y = 0{,}5^{x^3+3x^2-2}$.

3.4.31. а) $y = -x^2 - \frac{2}{x}$; б) $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$.

3.4.32. а) $y = \cos x - \ln\cos x$; б) $y = \sin x - \ln\sin x$.

3.4.33.* а) $y = \arccos\frac{1-x}{1-2x}$; б) $y = \arcsin\frac{x-1}{2x-1}$.

3.4.34.° а) $y = x \cdot e^{-x}$; б) $y = \frac{1}{e^x - 1}$.

3.4.35.° а) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$; б) $y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$.

Постройте графики функций и по ним определите область значений функций, промежутки монотонности и экстремумы (3.4.36—3.4.41).

3.4.36. а) $y = |3x + 2| - |3|x| - 3|$; б) $y = |2|x| - 4| - |2x + 3|$.

3.4.37. а) $y = |2x + 4| - 2|x - 3|$; б) $y = |3x - 2| - 3|x + 1|$.

3.4.38. а) $y = \frac{1}{2} - \sin|x|$; б) $y = 1 + \sin 2|x|$.

3.4.39. а) $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}x + 4}{x + 1}$; б) $y = \log_4 \frac{4x + 16}{x - 1}$.

3.4.40. а) $y = \log_3 \frac{3x - 9}{x - 1}$; б) $y = \log_2 \frac{2x + 4}{x + 1}$.

3.4.41. а) $y = 3^{\frac{x+3}{2x-2}}$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+3}{2x-2}}$.

Найдите множество значений функций (3.4.42—3.4.45).

3.4.42. а) $y = f\left(x^{-2}\right)$, где $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$;

б) $y = f\left(x^{-2}\right)$, где $f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$.

3.4.43. а) $f(x) = \frac{\left(x^2 - x\right) \cdot e^{x-1}}{|x - 1|}$; б) $f(x) = \frac{x^2 + x}{|x + 1| \cdot e^{x+1}}$.

3.4.44.* а) $y = \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - x + 2^{\log_2\left(7x-x^2\right)} - 6$;

б) $y = \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} - 2x + 3^{\log_3(3x-x^2)} + 5$.

3.4.45.* а) $y = (\sin x + \cos x) \cdot e^{\sqrt{6}(\cos x - \sin x)}$;

б) $y = \left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right) \cdot e^{0{,}5\sqrt{3}\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)}$.

3.4.46. Постройте график функции f. Укажите множество значений этой функции. Определите число корней уравнения $f(x) = a$ в зависимости от параметра a:

а) $f(x) = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^3 \left(\frac{x}{9} - 1\right)$; б) $f(x) = (1 - x)^3 \left(\frac{x}{3} + 1\right)$.

3.4.47. Укажите все возможные натуральные значения функции $f(x)$:

а) $f(x) = \left|\frac{x}{10}\right| + \sqrt{110 - 2|x|} - \frac{1}{2}$;

б) $f(x) = \left|\frac{x}{12}\right| + \sqrt{168 - 2|x|} + \frac{1}{2}$.

3.4.48. Найдите все пары чисел (x, y), для любой из которых справедливо равенство:

а) $x^2 + 1 = 2^{-y^2}$; б) $2^x + 2^{-x} = 2\sin y$.

3.4.49. Найдите наименьшее и наибольшее возможные значения выражения $f(x, y)$ при указанном условии для x и y:

а) $f(x, y) = 2x + 3y$, $|x| = y(2 - y)$;

б) $f(x, y) = 3x + 2y$, $|x| = y(3 - y)$.

3.4.50. При каких значениях параметра a данное уравнение имеет три различных действительных корня:

а) $x^3 + 9x + 6a = a^2 + 6x^2 + 9$;

б) $x^3 + 9x + a^2 + 6a + 5 = 6x^2$?

Для каждого значения параметра a укажите количество корней уравнения (3.4.51—3.4.53).

3.4.51. а) $x^4 - 6x^2 + 8x = a$; б) $x^4 + 4x^3 - 16x = a$.

3.4.52.* а) $\frac{a}{x^2 - 3} = e^{-x}$; б) $\frac{a}{x^2 - 3} = -e^x$.

3.4.53.* а) $\frac{a}{2x} = \ln|3x|$; б) $\frac{a}{3x} = \ln|2x|$.

3.4.54.° Докажите, что данное уравнение имеет единственный корень:

а) $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$; б) $\sin x = -x - \pi$.

3.4.55. Решите неравенство:

а) $2 + \sin x > \frac{1}{1+x^2}$; б) $2 - \cos x > \frac{1}{1+x^2}$.

3.4.56. Найдите число корней данного уравнения в зависимости от параметра a:

а) $x^3 - 3x = a$; б) $|x^2 - 4x + 3| = a$.

3.5. Производная и ее применение

3.5.01. Найдите значения a, при которых данная функция имеет две критические точки одного знака:

а) $y = (a-4)x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 3(a-2)x + 1$;

б) $y = (a-3)x^3 + 3\sqrt{2}x^2 - 3ax + 2$.

3.5.02. Укажите значения a, при которых данная функция убывает на $\boldsymbol{R}$ и имеет критическую точку, а также все те значения a, при которых функция возрастает на $\boldsymbol{R}$ и не имеет критической точки:

а) $y = (a+1)x^3 + 6x^2 + 3(a+1)x + 1$;

б) $y = (a-2)x^3 + 12x^2 + 3(a-2)x - 1$.

3.5.03.* Найдите значения a, при которых функция:

а) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - ax - 8$ возрастает на интервале $(1;2)$;

б) $f(x) = -2x^3 - ax - 7a - 21$ убывает на интервале $(-1;1)$.

3.5.04.* а) При каких действительных значениях a функция

$$f(x) = 3\sin x \cdot \cos x - 4\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - ax$$

возрастает на всей области определения?

б) При каких действительных значениях b функция

$$f(x) = -5\sin x \cdot \cos x + 12\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - bx$$

убывает на всей области определения?

3.5.05.* Найдите все значения параметра a, при которых функция $f(x)$ убывает на множестве $\boldsymbol{R}$ и не имеет критических точек:

а) $f(x) = (a+2)x^3 + 6x^2 + (a+3)x - 1$;

б) $f(x) = (a-3)x^3 - 3x^2 + (a-5)x + 2$.

3.5.06. Найдите все значения a, при которых функция f возрастает на $\boldsymbol{R}$:

а) $f(x) = \frac{a^2-1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2x + 5$;

б) $f(x) = 2x^3 - 3(a+2)x^2 + 48ax + 6x - 5$.

3.5.07.* а) Найдите множество всех чисел b, при каждом из которых функция

$$f(x) = \sin 2x - 8(b+2)\cos x - (4b^2 + 16b + 6)x$$

является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

б) Найдите множество всех чисел a, при каждом из которых функция

$$f(x) = \sin 2x - 8(a+1)\sin x + (4a^2 + 8a - 14)x$$

является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

3.5.08. Найдите все значения a, при которых данная функция убывает на указанном интервале:

а) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$, $\left(a; a + \frac{1}{3}\right)$;

б) $f(x) = -\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x - 1$, $\left(a; a + \frac{3}{4}\right)$.

3.5.09. Укажите все значения a, при которых данная функция возрастает и притом только на одном из интервалов $(-3; -2)$ и $(3; 4)$:

а) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 3(a-1)x + 1$;

б) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 3(a-1)x - 1$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанном промежутке (3.5.10—3.5.16).

3.5.10.* а) $y = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 3$, $[-1; 3]$;

б) $y = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x - 3$, $[-2; 3]$.

3.5.11.* а) $y = \sqrt{1 - 2x + x^2} + 2^{|\log_4(x-5)^2|}$, $[-1; 4]$;

б) $y = \sqrt{4 - 4x + x^2} - 3^{|\log_9(x-6)^2|}$, $[-1; 5]$.

3.5.12.* а) $y = e^{\frac{x-3}{2}} \cdot \sqrt{2 - x}$, $(-\infty; 2]$;

б) $y = e^{\frac{5-x}{2}} \cdot \sqrt{2 + x}$, $[-2; +\infty)$.

3.5.13.* а) $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$, $[-4;-1]$; б) $f(x)=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$, $[-5;-2]$.

3.5.14. а) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$, $[-2;2]$;

б) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x^2+5}}$, $[-3;3]$.

3.5.15. а) $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;

б) $f(x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}2x$, $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$.

3.5.16. а) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, $[0;3]$;

б) $f(x)=\sqrt[5]{(x^2+2x)^2}$, $[-3;0]$.

Найдите экстремумы функций (3.5.17—3.5.19).

3.5.17.° а) $f(x)=8^x-32^x$; б) $f(x)=27^x-4\cdot 3^{x+1}$.

3.5.18.* а) $y=|x-1|-\sqrt{1-2x+4x^2}$;

б) $y=|x+1|-\sqrt{1-6x+9x^2}$.

3.5.19. а) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{2-3x}{3x+2}}-\frac{1}{4x}$; б) $y=\frac{1}{8x}+\ln\sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-3x}}$.

Найдите промежутки возрастания и убывания, а также экстремумы функций (3.5.20—3.5.26).

3.5.20.° а) $y=\frac{1}{4^x}-\frac{6}{2^x}+2\ln 16$; б) $y=\frac{1}{9^x}-\frac{4}{3^x}+3\ln 9$.

3.5.21.° а) $y=\ln(5-3x)+2x^2$; б) $y=\ln(4-3x)-2x^2$.

3.5.22. а) $y=(2x+1)e^{3x^2-4x+1}$; б) $y=(2x+3)e^{3x^2+2x-1}$.

3.5.23. а) $y=xe^{-3x}$; б) $y=(x+1)e^{2x}$.

3.5.24. а) $y=(x-1)e^{3x}$; б) $y=xe^{-5x}$.

3.5.25. а) $y=\frac{x}{\ln x}$; б) $y=\frac{x}{\ln^2 x}$.

3.5.26. а) $y=\frac{x^2}{\ln x}$; б) $y=\frac{1}{x\ln x}$.

3.5.27. Найдите значения a, при которых число 1 является точкой экстремума данной функции. Укажите вид экстремума в точке с абсциссой 1 при найденных значениях a:

а) $y = 8x^3 - 3a(a+4)x^2 + 6a^3x - 1$;

б) $y = 2x^3 - 3a^2x^2 + 3a(a^2-1)x + 1$.

3.5.28.* Для каждого числа b укажите все значения a (a зависит от b), при которых b является точкой указанного вида экстремума данной функции:

а) b — точка минимума,

$$y = 6x^3 - 3(a+3)x^2 + 4(a+1)x + 1;$$

б) b — точка максимума,

$$y = 6x^3 - 3(a-3)x^2 + 2(2-a)x - 1.$$

3.5.29.° а) Докажите, что касательные, проведенные к гиперболе $y = \dfrac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат, параллельны между собой.

б) Докажите, что касательные, проведенные к гиперболе $y = \dfrac{x-6}{x-3}$ в точках ее пересечения с осями координат, параллельны между собой.

3.5.30.° Составьте уравнения касательных к данной гиперболе, которые проходят через начало координат:

а) $y = \dfrac{x+9}{x+5}$; б) $y = \dfrac{x-9}{x-5}$.

3.5.31. Составьте уравнение касательной к графику данной функции, перпендикулярной к данной прямой:

а) $y = x^3 + 3x^2 - 5$, $2x - 6y + 1 = 0$;

б) $y = x^4 + x + 8$, $3x - 9y + 4 = 0$.

3.5.32.° Составьте уравнения касательных к графику данной функции в точках его пересечения с осью абсцисс:

а) $y = x - \dfrac{1}{x}$; б) $y = x - \dfrac{4}{x}$.

3.5.33. а) В декартовой прямоугольной системе координат Oxy к кривой $y = x^2 + x + 10$ проведена касательная в точке $A(x_0; y_0)$, где $x_0 = 1$, и эта касательная пересекает ось Ox в точке B. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

б) В декартовой прямоугольной системе координат Oxy к кривой $y = x^2 - x + 8$ проведена касательная в точке $A\,(x_0;\ y_0)$, где $x_0 = 1$, и эта касательная пересекает ось Ox в точке B. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

3.5.34. Найдите площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к графику данной функции в точке N:

а) $y = \sqrt{x^2 - 5}$, $N(3;\ 2)$; б) $y = \sqrt{x^2 - 7}$, $N(4;\ 3)$.

3.5.35. В произвольной точке графика данной функции проведена касательная. Докажите, что длина отрезка касательной от точки касания до пересечения с осью Oy равна ординате точки пересечения:

а) $y = \sqrt{2x - x^2}$; б) $y = \sqrt{4x - x^2}$.

3.5.36. В каких точках и под какими углами пересекает ось абсцисс график функции:

а) $f(x) = 4\sin^3 x - 12\sin^2 x + 11\sin x - 3$;

б) $f(x) = 4\cos^3 x + 12\cos^2 x + 11\sin x + 3$?

3.5.37. Через точку $A(-3;\ 1)$ проведена прямая, которая является касательной к графику данной функции. Определите угол наклона этой прямой к оси абсцисс:

а) $y = \sqrt{8 - x^2}$; б) $y = \sqrt{5 - x^2}$.

3.5.38. а) Найдите уравнение общей касательной к параболам $y = x^2 + 4x + 8$ и $y = x^2 + 8x + 4$.

б) При каких a и b парабола $y = x^2 + ax + b$ касается прямых $y = 5x + 1$ и $y = -x - 2$?

3.5.39. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A\,(x_0;\ y_0)$, касающейся графика функции $f(x)$ и пересекающей в двух различных точках график функции $g(x)$:

а) $A(0{,}5;\ 2)$, $f(x) = -0{,}5x^2 + 2$, $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

б) $A(1;\ 3)$, $f(x) = 8\sqrt{x} - 7$, $g(x) = x^2 + 4x - 1$.

3.5.40. а) Докажите, что касательная к графику функции $y = 2x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$ является асимптотой графика функции

$$y = \frac{6x^2 + 34x + 22}{x + 5}.$$

б) Докажите, что наклонная асимптота графика функции

$$y = \frac{2x^2 + 7x + 4}{x + 5}$$

параллельна касательной к графику $y = 2\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0{,}25$.

3.5.41. а) Найдите точку пересечения касательной к графику функции $y = x^2 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$ и наклонной асимптоты графика функции

$$y = \frac{4x^2 + 8x + 3}{2x + 4}.$$

б) Найдите точку пересечения касательной к графику функции $y = 3 - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$ и наклонной асимптоты графика функции

$$y = \frac{3x^2 + 3x + 4}{x^2 - 2x + 17}.$$

3.5.42. а) Найдите координаты точек пересечения касательной к графику функции $y = 7 - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$ с асимптотами графика функции

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 - 4x + 3}.$$

б) Найдите координаты точек пересечения касательной к графику функции $y = 5 - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$ с асимптотами графика функции

$$y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + x - 2}.$$

3.5.43.° а) Дана функция $f(x) = \frac{x + 2}{3 - x}$. К ее графику в точке $x_0 = 2$ проведена касательная l. Напишите уравнение касательной l. Существует ли касательная к графику функции $f(x)$, отличная от l и параллельная l? Если существует, напишите ее уравнение.

б) Дана функция $f(x) = \frac{1 - x}{x + 4}$. К ее графику в точке $x_0 = -3$ проведена касательная m. Напишите уравнение касательной m. Существует ли касательная к графику функции $f(x)$, отличная от m и параллельная m? Если существует, напишите ее уравнение.

3.5.44.° а) Через точку $M(0; 3)$ к графику функции $y = \frac{1}{x}$ проведена касательная. Напишите ее уравнение.

б) Через точку $M(2; 0)$ к графику функции $y = 3 - x^2$ проведены касательные. Напишите их уравнения.

3.5.45.° а) Через точку $M(-1; 0)$ к графику функции $y = \sqrt{2x - 1}$ проведена касательная. Напишите ее уравнение.

б) Через точку $M(2; 0)$ к графику функции $y = \sqrt{1 - x}$ проведена касательная. Напишите ее уравнение.

3.5.46. а) На графике функции $y = x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ найдите все точки, касательная в каждой из которых к этому графику отсекает от положительной полуоси Ox вдвое меньший отрезок, чем от отрицательной полуоси Oy. Определите длины отсекаемых отрезков.

б) На графике функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 22x - 28$ найдите все точки, касательная в каждой из которых к этому графику пересекает положительные полуоси координат, отсекая от них равные отрезки. Определите длины отсекаемых отрезков.

3.5.47. Напишите уравнение касательной к графику функции в точке ее минимума:

а) $y = x^2 - 3x + \ln x$; б) $y = xe^{2x^2 - 5x}$.

3.5.48.* а) Точки M_1 и M_2 лежат на графике функции $y = 2x^3 + 3x^2 - \frac{x}{2} - 1$ и имеют абсциссы, соответственно равные $-1{,}5$ и $1{,}5$. Найдите все точки этого графика, в каждой из которых касательная к этому графику параллельна отрезку M_1M_2.

б) На графике функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{14}{5}$ найдите все точки, касательная в каждой из которых к этому графику перпендикулярна прямой $5x - 3y + 2 = 0$.

3.5.49. Среди всех дифференцируемых на $\boldsymbol{R}$ функций f, удовлетворяющих при всех $x \in \boldsymbol{R}$ равенству $f'(x) = g(x)$, укажите такие, для которых прямая $y = kx + b$ является касательной к их графикам:

а) $g(x) = 3x^2 - 6x$, $k = 9$ и $b = 8$;

б) $g(x) = 3x^2 + 4x$, $k = 4$ и $b = 1$.

3.5.50. Составьте уравнения всех общих касательных к графикам функций y_1 и y_2:

а) $y_1 = x^2 + x + 1$, $y_2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + 3\right)$;

б) $y_1 = x^2 - x + 1$, $y_2 = 2x^2 - x + 0{,}5$.

3.5.51. Составьте уравнения касательных к графику данной функции, перпендикулярных к касательной в точке с абсциссой x_0:

а) $f(x) = \frac{1}{6}\left(2x^3 - 15x^2 + 30x + 1\right)$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = \frac{1}{6}\left(2x^3 + 15x^2 + 30x - 1\right)$, $x_0 = -1$.

3.5.52. а) Найдите точки экстремума функции $y = e^{-x}\cos x$ и угол между осью Ox и касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x = 0$.

б) Найдите точки экстремума функции $y = e^{-x}\sin x$ и угол между осью Ox и касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x = 0$.

3.5.53. а) Найдите точки экстремума функции $y = x - \ln(1 + x)$ и точку графика данной функции, в которой касательная к графику параллельна прямой, проходящей через точки $A(2;\ 3)$ и $B(-1;\ 4)$.

б) В точке пересечения графиков функций

$$y = \frac{6}{\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad y = 12x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$$

проведена касательная к каждому графику. Найдите разность углов, образованных этими касательными с положительным направлением оси Ox.

3.5.54. а) Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a + x\ln 2$ является касательной к графику функции $y = 4^x - 2^{x+2} + x\ln 8$.

б) Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a + x\ln 3$ является касательной к графику функции

$$y = \frac{1}{2}\cdot 9^x - 2\cdot 3^x + x\ln 9.$$

3.5.55.° а) Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса r.

б) Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса r (центр основания конуса лежит в центре шара).

3.5.56.° а) Какой должна быть высота конуса, вписанного в шар радиуса r, чтобы его боковая поверхность была наибольшей?

б) Около данного цилиндра описан конус наименьшего объема (плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают). Найдите отношение высоты конуса к высоте цилиндра.

3.5.57. На графике данной функции найдите точки с положительными координатами, такие, что произведение расстояний от каждой из которых до осей координат является наибольшим:

а) $y = 3 - x^2$; б) $y = 12 - x^2$.

3.5.58. Найдите точку графика функции $f(x)$, ближайшую к точке A:

а) $f(x) = x^2 - 2$, $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$; б) $f(x) = x^2 - 5$, $A\left(-4; -\frac{3}{2}\right)$.

3.5.59. На графике функции $f(x)$ найдите точки, ближайшие к точке $A(1; 1)$:

а) $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$; б) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

3.5.60.* а) Два точечных заряда $8 \cdot 10^{-6}$ Кл и $27 \cdot 10^{-6}$ Кл находятся в вакууме на расстоянии 0,2 м друг от друга. В какой точке отрезка, соединяющего заряды, напряженность создаваемого этими зарядами электрического поля наименьшая, если заряды разноименные? Напряженность поля в точке вычисляется по формуле

$$E = \frac{kq}{r^2}, \text{ где } k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2},$$

q — величина заряда, создающего поле, r — расстояние от точечного заряда до данной точки.

б) Два точечных заряда $81 \cdot 10^{-6}$ Кл и $16 \cdot 10^{-6}$ Кл находятся в вакууме на расстоянии 0,25 м друг от друга. В какой точке отрезка, соединяющего заряды, потенциал создаваемого этими зарядами электрического поля наименьший, если заряды одноименные? Потенциал электрического поля вычисляется по формуле

$$\varphi = \frac{kq}{r}, \text{ где } k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2},$$

q — величина заряда, создающего поле, r — расстояние от точечного заряда до данной точки.

3.5.61. а) Вездеход, находящийся на пересеченной местности в 27 км от прямолинейной шоссейной дороги, должен доставить геологов в населенный пункт, расположенный по шоссе. Расстояние от точки шоссе, ближайшей к вездеходу, до населенного пункта равно 45 км. По пересеченной местности вездеход идет со скоростью 44 км/ч, а по шоссе со скоростью 55 км/ч. На каком расстоянии от населенного пункта вездеход должен въехать на шоссе, чтобы время его движения было наименьшим?

б) Расстояние от песчаного карьера до кирпичного завода, расположенного на прямолинейной автомагистрали, равно 30 км. Песчаный карьер удален от этой магистрали на 24 км. Строительный кооператив взял подряд на строительство подъездной дороги от карьера до автомагистрали. На каком расстоянии от кирпичного завода должна находиться развилка дорог, чтобы время доставки грузов от карьера до завода было наименьшим, если известно, что машины могут развивать на магистрали скорость 52 км/ч, а на подъездной дороге — 20 км/ч?

3.5.62. Через данную точку проведите прямую так, чтобы сумма длин отрезков, отсекаемых ею на положительных координатных полуосях, была наименьшей:
а) $P(1; 4)$; б) $P(2; 6)$.

3.5.63. а) Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6 см. Найдите среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислите величину этого объема.

б) Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4 см^3, а основания являются квадратами. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и вычислите величину этого периметра.

3.5.64.* а) Определите координаты точки графика функции

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(2x + \frac{2}{x} + 1\right)},$$

расстояние от которой до начала координат наименьшее.

б) Определите координаты точки графика функции

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(1 + 6x - 8x^2\right)},$$

расстояние от которой до начала координат наибольшее.

3.5.65. Решите уравнение:

а) $f'(x) - \frac{5}{x} \cdot f(x) = 0$, если $f(x) = x^3 \ln x$;

б) $1 + 5f(x) + 6f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

3.5.66.° Решите неравенство:

а) $f'(x) < g'(x)$, если $f(x) = \frac{x^3+1}{3}$, $g(x) = 5x + \frac{1}{x}$;

б) $f'(x) + g'(x) \le 0$, если $f(x) = 2x^3 + 12x^2$, $g(x) = 9x^2 + 72x$.

3.5.67. Решите уравнение:

а) $f'(0) = f'(x)$, если $f(x) = 5\sin x + 3\cos x$;

б) $f'(x) = 2f(x)$, если $f(x) = e^{-x}\left(x^2 + 3x + 1\right)$.

3.6. Первообразная и интеграл

Вычислите (3.6.01—3.6.06).

3.6.01.* а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 3x \cos 2x\, dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 4x \cos x\, dx$.

3.6.02.° а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$.

3.6.03.* а) $\int\limits_{-1}^{\sqrt{8}} \frac{x}{\sqrt[3]{9-x^2}}\, dx$; б) $\int\limits_{1}^{\sqrt{12}} \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\, dx$.

3.6.04. а) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{1+\ln x}{x}\, dx$; б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{x^2+\ln x}{x}\, dx$.

3.6.05.* а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\, dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x\, dx$.

3.6.06. а) $\int\limits_0^{\ln 2} \left(e^x + e^{-x}\right) dx$; б) $\int\limits_0^{\log_3 2} \left(3^x - 1\right)^2 dx$.

Вычислите интегралы, используя геометрическую интерпретацию (3.6.07—3.6.08).

3.6.07.* а) $\int\limits_{0,5}^{2}\sqrt{2x-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{3}^{4}\sqrt{4x-x^2}\,dx$.

3.6.08.* а) $\int\limits_{-2}^{4}\big||x-2|-1\big|\,dx$; б) $\int\limits_{-4}^{2}\big||x|-1\big|\,dx$.

Найдите функцию $f(x)$, при данных условиях (3.6.09—3.6.10).

3.6.09. а) $f'(x)=x\sqrt{x}-\sin 3x+\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}$, $f(0)=0$;

б) $f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{3x^2+1}$, $f(1)=0$.

3.6.10. а) $f'(x)=x^2\sqrt{x}-\cos 5x-\frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}$, $f(0)=1$;

б) $f'(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}-\sin 3x+\frac{1}{4x^2+1}$, $f(-1)=0$.

Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ (3.6.11—3.6.12).

3.6.11. а) $F(x)=5x+\cos^2\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$, $f(x)=10\cos^2\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)$;

б) $F(x)=3x+\sin^2 3x$, $f(x)=6\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)$.

3.6.12. а) $F(x)=3x+2\sin 2x+0{,}25\sin 4x$, $f(x)=8\cos^4 x$;

б) $F(x)=3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x$, $f(x)=8\sin^4 2x$.

3.6.13.* Для функции $f(x)$ найдите первообразную F, график которой проходит через точку M. Постройте график первообразной:

а) $f(x)=\begin{cases}2x & \text{при } x<0,\\ \sin x & \text{при } x\ge 0,\end{cases}$ $M\left(\frac{\pi}{2};1\right)$;

б) $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{при } x<0,\\ 1 & \text{при } x\ge 0,\end{cases}$ $M(1;2)$.

3.6.14.* а) Найдите для функции $f(x)=(1-x)(x-4)^2$ первообразную, график которой касается прямой $y=16x$.

б) Найдите для функции $f(x)=(1+x)(x+4)^2$ первообразную, график которой касается прямой $y=16x$.

3.6.15. а) Найдите значения A и B, при которых функция $f(x) = A\cos 2\pi x + B$ удовлетворяет условиям:

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \quad \text{и} \quad \int_0^3 f(x)dx = 6.$$

б) Найдите значения A и B, при которых функция $f(x) = A\cos\frac{\pi x}{2} + B$ удовлетворяет условиям:

$$f'(1) = 1{,}5 \quad \text{и} \quad \int_0^2 f(x)dx = 3.$$

Решите неравенства (3.6.16—3.6.17).

3.6.16.* а) $\int_1^2 \left(\frac{24x}{y^2} - 9x^2\right)dy \geq 4$; б) $\int_1^2 \left(\frac{2y^2}{x^2} - \frac{4}{3}xy\right)dx > -1$.

3.6.17.* а) $\int_0^1 \left(2y + 3xy^2\right)dx > 2$; б) $\int_0^1 \left(x + \frac{16y^3}{x}\right)dy \leq 4$.

3.6.18. а) При каких значениях x, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, обращается в нуль та из первообразных функции

$$f(x) = 2\cos 2x - \sin x,$$

которая при $x = \pi$ имеет значение, равное -1?

б) При каких значениях x, $0 \leq x \leq 2\pi$, обращается в нуль та из первообразных функции

$$f(x) = \cos x - \sin x,$$

которая при $x = \frac{3\pi}{2}$ имеет значение, равное -2?

3.6.19.* а) Напишите уравнение касательной, параллельной оси абсцисс, к графику функции

$$y = \int_0^x (\sin t - \sin 2t)dt, \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right].$$

б) Напишите уравнение касательной к графику функции

$$y = \int_0^x (\cos 2t + \cos t)dt, \quad x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right],$$

параллельной прямой $x + y = 1$.

3.6.20.* а) Найдите максимумы функции

$$f(x) = \int_0^x (\sin 2t - \cos t)dt, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

б) Найдите минимумы функции

$$f(x) = \int_0^x \left(2\cos^2 t - \sin 2t\right) dt, \quad 0 \le x \le \pi .$$

3.6.21.* а) Найдите ту первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = 3x(x-2)$, график которой проходит через $M(1; 2)$. Найдите все значения x, для которых $F(x) \le 0$.

б) Найдите ту первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = 3x(x+2)$, график которой проходит через $M(-1; -2)$. Найдите все значения x, для которых $F(x) \ge 0$.

3.6.22. а) Найдите ту первообразную функции

$$f(x) = \frac{4}{(1-2x)^3}, \quad x > 0{,}5 ,$$

график которой касается прямой $y = 4 - 4x$.

б) Найдите ту первообразную функции

$$f(x) = \frac{8}{(2x-1)^5}, \quad x > 0{,}5 ,$$

график которой касается прямой $y = 8x - 8$.

Найдите общее решение дифференциального уравнения (3.6.23—3.6.24).

3.6.23.* а) $xy' = 2y$; б) $xy' = 5y$.

3.6.24.* а) $y' = y\cos x$; б) $y' = y\sin x$.

Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (3.6.25—3.6.26).

3.6.25.* а) $x^2y' = y^3$, $y(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $x^4y' = y^{-2}$, $y(1) = -1$.

3.6.26.* а) $y'\sin^2 x = \cos^2 y$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$;

б) $y'\cos^2 x = \sin^2 y$, $y(\pi) = \frac{3\pi}{2}$.

3.6.27.* а) Для функции $f(x) = -1 - \frac{1}{x\ln 4}$, где $x > 0$, найдите первообразную $F(x)$, которая при $x = 2$ принимает значение, равное 2,5. В каких точках кривая $y = F(x)$ пересекает ось Ox?

б) Для функции $f(x) = \frac{x+1}{x}$, где $x > 0$, найдите первообразную $F(x)$, которая при $x = e$ принимает значение, равное e. В каких точках кривая $y = F(x)$ пересекает ось Ox ?

3.6.28.* а) Найдите кривую, проходящую через точку $N(0;2)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен произведению координат точки касания.

б) Найдите кривую, проходящую через точку $M\left(2;\frac{1}{2}\right)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен отношению ординаты этой точки к ее абсциссе, взятому с противоположным знаком.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями (3.6.29—3.6.43).

3.6.29.* а) $y = x + 1$, $y = 1 - \frac{1}{3}x$, $y = 1 - (x-2)^3$;

б) $y = (x+2)^3 + 3$, $y = -4x$, $y = -\frac{2}{3}x$.

3.6.30. а) $y = 4 + \sqrt{x+2}$, $y = -0{,}6x + 2{,}8$, $x = \sqrt{10-y}$;

б) $y = \sqrt{4-x} + 4$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$, $x + \sqrt{6-y} = 0$.

3.6.31. а) $y = (x-2)^3$, $y = \frac{1}{3}x$, $y = 0$;

б) $y = (3-x)^3$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = 0$.

3.6.32.* а) $y = e^{2x}$, $y = 2 + e^x$, $x = 1$;

б) $y = e^{x+1}$, $y = e^{2x}$, $x = \ln 5$.

3.6.33. а) $y = 0{,}5x^2 - 2x - 1$, $y = 6{,}5 - 1{,}5|x-5|$;

б) $y = -0{,}5x^2 + x + 7{,}5$, $y = 1{,}5(|x+2| - 1)$.

3.6.34. а) $y^2 = x + 3$, $x + 2y = 5$; б) $y^2 = 3 - x$, $2y - x = 5$.

3.6.35. а) $y^2 = x$, $x + y = 2$; б) $y^2 = x$, $x - y = 2$.

3.6.36. а) $y = x^2 + 2|x| - 8$, $y = 4 - x^2$;

б) $y = x^2 - 2|x| - 3$, $y = 9 - x^2$.

3.6.37. а) $y = |0{,}5x^2 - x - 4|$, $y = 8$;

б) $y = |x^2 + 2x - 3|$, $y = 5$.

3.6.38. а) $y = |x^2 + 4x| - 2x$, $y = 10 - x$;

б) $y = |x^2 - 3x| + x$, $y = x + 4$.

3.6.39. а) $\left|4-x^2\right|-y=5$, $y=7$; б) $\left|x^2-4\right|+y=5$, $y=-7$.

3.6.40.* а) $y=-0{,}5x^2+7{,}5$, $x=\left|y-6\right|$;

б) $y=-0{,}5x^2+9{,}5$, $x=-\left|8-y\right|$.

3.6.41.* а) $y=0{,}5^{x-4}-6$, $y=-\frac{15}{4}\cdot x+10$, $(\ln 0{,}5\approx -0{,}69)$;

б) $y=2^{x+4}-5$, $y=\frac{15}{4}\cdot x+11$, $(\ln 2\approx 0{,}69)$.

3.6.42. а) $y=\frac{8}{x}+3$, $y=-x-6$, $(\ln 8\approx 2{,}08)$;

б) $y=-\frac{6}{x}-3$, $y=x+4$, $(\ln 6\approx 1{,}79)$.

3.6.43. а) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-2x}$, $y=2$;

б) $y=\sqrt{-x}$, $y=\sqrt{3x}$, $y=3$.

3.6.44.* а) Найдите все такие точки M графика функции $y=x^2-4x$, что площадь фигуры, ограниченной этим графиком, касательной к графику, проходящей через точку M, и осью ординат, равна 72.

б) Найдите все такие точки N графика функции $y=6x-x^2$, что площадь фигуры, ограниченной этим графиком, касательной к графику, проходящей через точку N, и осью ординат, равна $\frac{125}{3}$.

3.6.45. а) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{1-3x}$, касательной к ее графику в точке с абсциссой $x_0=-5$ и прямой $y=0$.

б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{2x-1}$, касательной к ее графику в точке с абсциссой $x_0=5$ и прямой $y=0$.

3.6.46.* а) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2+6x+9$ и графиком ее первообразной, проходящей через точку $K(-4;1)$.

б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2-4x+4$ и графиком ее первообразной, проходящей через точку $M(1;1)$.

3.6.47. а) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{x+6}{x}$, касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и прямой $x = 3$, $(\ln 3 \approx 1{,}3)$.

б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{x-4}{x}$, касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и прямой $x = 5$, $(\ln 5 \approx 1{,}6)$.

3.6.48. а) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 3\sqrt{4x+1}$, касательной к ней в точке с абсциссой $x_0 = 2$ и прямой $y = 0$.

б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 3\sqrt{5-2x}$, касательной к ней в точке с абсциссой $x_0 = -2$ и прямой $y = 0$.

3.6.49. а) Фигура, ограниченная линиями

$$y = -2x + 8, \quad x = -1, \quad y = 0,$$

делится параболой $y = x^2 - 4x + 5$ на две части. Найдите площадь каждой части.

б) Фигура, ограниченная линиями

$$y = x + 6, \quad x = 1, \quad y = 0,$$

делится параболой $y = x^2 + 2x + 4$ на две части. Найдите площадь каждой части.

3.6.50. а) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{2x+1}$ и прямой, проходящей через точки $A(2;2)$; $B(4;3)$.

б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{2-x}$ и прямой, проходящей через точки $A(1;1)$; $B(-5;3)$.

3.6.51. а) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 2x$, касательной к графику функции в точке с абсциссой $x_0 = 3$ и прямой $x = -1$.

б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 2x - x^2$, касательной к графику функции в точке с абсциссой $x_0 = -1$ и прямой $x = 3$.

3.6.52.* а) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции

$$y = \frac{2}{(2x-1)^2},$$

касательной к графику функции в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и прямой $x = 2$.

б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции

$$y = \frac{2}{(2x+1)^2},$$

касательной к графику функции в точке с абсциссой $x_0 = 0$ и прямой $x = 1$.

3.6.53. а) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4\sqrt{-x}$, $y = 3\sqrt{x}$ и касательной к графику функции $y = 4\sqrt{-x}$ в точке $M(-4;8)$.

б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{5x}$, $y = 2\sqrt{-x}$ и касательной к графику функции $y = \sqrt{5x}$ в точке $M(5;5)$.

3.6.54.* а) Найдите все значения параметра a (где $a \in [1;4]$), при каждом из которых площадь фигуры, лежащей в полуплоскости $x \geq 0$ и ограниченной прямыми $y = 1$, $y = 2$ и кривыми $y = ax^2$, $y = \frac{a}{2}x^2$, будет наибольшей. Найдите эту площадь S.

б) Найдите все значения параметра a (где $a \in [4;7]$), при каждом из которых площадь фигуры, лежащей в полуплоскости $x \geq 0$ и ограниченной прямыми $y = 1$, $y = 2$ и кривыми $y = \sqrt{ax}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{ax}$, будет наибольшей. Найдите эту площадь S.

3.6.55.* При каких значениях a, площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями будет наименьшей:

а) $y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{x^2}$, $x = a$, $x = 2a$, $y = 0$ (где $a < 0$);

б) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{10}{x^2}$, $x = a$, $x = 2a$, $y = 0$ (где $a > 0$) ?

Примерные тексты экзаменационных работ по математике

Профильное обучение «Курс А» (3 ч в неделю)

Вариант 1

1. Вычислите $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$.
2. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$.
3. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{x-4}{x-3} \le 0$.
4. Докажите, что график функции $y = -2x^2 + 3x - 2$ лежит в нижней координатной полуплоскости.
5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = (x+3)^2(x-1)^2$ на промежутке $\left[-\frac{7}{2};\ 2\right]$.
6. Фигура, ограниченная линиями $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, делится прямой $x = 2$ на две части. Равны ли их площади?

Вариант 2

1. Вычислите $\frac{\log_3 3 + \log_3 12}{\log_3 12 - \log_3 2}$.
2. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
3. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{x-2}{x+1} \le 0$.
4. Докажите, что график функции $y = 3x^2 - 2x + 1$ лежит в верхней координатной полуплоскости.
5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = (x-3)^2(x+2)^2$ на промежутке $\left[-3;\ \frac{7}{2}\right]$.
6. Фигура, ограниченная линиями $y = \frac{2}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, делится прямой $x = 2$ на две части. Равны ли их площади?

Профильное обучение «Курс В» и общеобразовательный курс

Вариант 1

1. Докажите $\frac{1-\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.
2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\log_4(x+2y)=1,\\ 2^{x-y}=8.\end{cases}$$
3. Решите неравенство $4^x-3\cdot 2^x-4<0$.
4. Найдите наибольшее или наименьшее значение функции
$$y=\frac{1}{2x-x^2-2}.$$
5. При каких значениях a минимум функции $y=(3a+x)\sqrt{x}$ равен $6\sqrt{3}$?
6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=2x-x^2$ и касательными, проведенными к ней через точки пересечения параболы с осью абсцисс.

Вариант 2

1. Докажите $\frac{2\cos^2\alpha-\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.
2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\log_3(x+y)=1,\\ 4^{x+2y}=2^{7+y}.\end{cases}$$
3. Решите неравенство $0{,}04^x-4\cdot 0{,}2^x\le 5$.
4. Найдите наибольшее или наименьшее значение функции
$$y=\frac{1}{-x^2+x-1}.$$
5. При каких значениях b максимум функции $y=2x\sqrt{b-x}$ равен 4?
6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+4x+\frac{9}{4}$ и касательными к ней, проведенными через ее точки с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=4$.

Углубленное изучение математики

Вариант 1

1. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z+1-i| \le 1$, найдите число с наименьшим положительным аргументом.
2. Для каждого значения параметра a решите уравнение
$$2 \cdot 3^{x-3} - 4 = a + a \cdot 3^{x-3}.$$
3. При каких значениях параметра a данное уравнение имеет три различных действительных корня:
$$x^3 + 9x + 6a = a^2 + 6x^2 + 9?$$
4. Решите неравенство $\log_{2x-1}(x-1) \ge -1$.
5. Найдите экстремумы функции
$$y = |x-1| - \sqrt{1-2x+4x^2}.$$
6. Напишите уравнение касательной, параллельной оси абсцисс, к графику функции
$$y = \int_0^x (\sin t - \sin 2t)\,dt, \quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right].$$

Вариант 2

1. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z-5i| \le 3$, найдите число с наибольшим модулем.
2. Для каждого значения параметра a решите уравнение
$$a \cdot 4^{x-2} - 11 = 4^{x-1} - a.$$
3. При каких значениях параметра a данное уравнение имеет три различных действительных корня:
$$x^3 + 9x + a^2 + 6a + 5 = 6x^2?$$
4. Решите неравенство $\log_{2x+3}(x+1) \ge -1$.
5. Найдите экстремумы функции
$$y = |x+1| - \sqrt{1-6x+9x^2}.$$
6. Напишите уравнение касательной к графику функции
$$y = \int_0^x (\cos 2t + \cos t)\,dt, \quad x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right],$$
параллельной прямой $x + y = 1$.

ОТВЕТЫ

Раздел 1

1.1

1.1.01. а) 4; б) 9. **1.1.02.** а) $\frac{1}{2}$; б) 6. **1.1.03.** а) 3; б) 4. **1.1.04.** а) 3; б) 32. **1.1.05.** а) 2; б) 2. **1.1.06.** а) 3; б) -4. **1.1.07.** а) 22; б) -6. **1.1.08.** а) 8; б) 20,5. **1.1.09.** а) 27,5; б) -83. **1.1.10.** а) 2,5; б) 1. **1.1.11.** а) 1; б) 20. **1.1.12.** а) 18; б) 0,4. **1.1.13.** а) 2; б) 27. **1.1.14.** а) 8; б) $\frac{1}{6}$. **1.1.15.** а) $3-2\sqrt{5}$; б) $5-3\sqrt{11}$. **1.1.16.** а) $10-4\sqrt{5}$; б) $3\sqrt{14}-10$. **1.1.17.** а) $4\sqrt{3}$; б) $5\sqrt{2}$. **1.1.26.** а) 2; б) 1. **1.1.27.** а) $\frac{20}{9}$; б) 0,4. **1.1.28.** а) $\frac{2}{27}$; б) $\frac{1}{4}$. **1.1.29.** а) 0,8; б) 1,5. **1.1.30.** а) 2; б) $1\frac{2}{3}$. **1.1.31.** а) $3\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{9}$. **1.1.32.** а) 0; б) $2\sqrt{3}$. **1.1.33.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **1.1.34.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1.1.35.** а) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{3}$. **1.1.36.** а) $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$; б) $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$. **1.1.37.** а) $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$; б) $\sin\alpha=\frac{3}{4}$. **1.1.45.** а) 3,5; б) 12. **1.1.46.** а) $\frac{25}{7}$; б) 441. **1.1.47.** а) 2; б) $\sqrt{2}$. **1.1.48.** а) 2; б) 2. **1.1.49.** а) 1; б) -2. **1.1.50.** а) $-\frac{1}{3}$; б) -5. **1.1.51.** а) $\frac{7}{5}$; б) 1. **1.1.52.** а) 2; б) $-\frac{1}{2}$. **1.1.53.** а) 1; б) 1. **1.1.54.** а) 39; б) 19. **1.1.55.** а) $\frac{3}{2}$; б) $\sqrt{3}$. **1.1.56.** а) 0; б) -1. **1.1.57.** а) 2; б) $-\frac{1}{2}$. **1.1.58.** а) 3; б) -2. **1.1.59.** а) $2\frac{1}{3}$; б) $\frac{13}{12}$. **1.1.60.** а) 0; б) 0. **1.1.61.** а) 1; б) 1. **1.1.62.** а) 1,5; б) 1. **1.1.63.** а) 2; б) $\frac{1}{2}$. **1.1.64.** а) $-\frac{5}{2}$; б) $\frac{2}{3}$. **1.1.65.** а) 1; б) -1. **1.1.66.** а) $\frac{1}{2}$; б) 1. **1.1.67.** а) $-\frac{1}{2}$; б) -1. **1.1.68.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$. **1.1.69.** а) $-\frac{3}{2}$; б) 1. **1.1.80.** а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{11}{12}$.

1.2

1.2.01. а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. **1.2.02.** а) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$. **1.2.03.** а) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$. **1.2.04.** а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$. **1.2.05.** а) $\pi k,\ k\in Z$; б) $\pi k,\ k\in Z$. **1.2.06.** а) $-\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. **1.2.07.** а) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$; б) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. **1.2.08.** а) $2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. **1.2.09.** а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k,$

$2\pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.10.** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.11.** а) $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **1.2.12.** а) $2\pi k$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\pi + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.13.** а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $-\pi + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.14.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.15.** а) $\frac{\pi}{12} + \pi k$, $\frac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, $\frac{2\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$. **1.2.16.** а) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{8} + \pi k$, $\frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in Z$. **1.2.17.** а) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **1.2.18.** а) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. **1.2.19.** а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.20.** а) $2\pi k$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\pi + 2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.21.** а) $\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi k}{3}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **1.2.22.** а) 0, $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{2}$; б) 0, $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{3\pi}{4}$. **1.2.23.** а) $\frac{\pi}{8} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{8} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.24.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.25.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.26.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.27.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.28.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. **1.2.29.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; б) πk, $k \in Z$. **1.2.30.** а) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **1.2.31.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. **1.2.32.** а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **1.2.33.** а) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. **1.2.34.** а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $2\pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **1.2.35.** а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.36.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. **1.2.37.** а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$. **1.2.38.** а) πk, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{6}$. **1.2.39.** а) $\frac{5\pi}{6}$, π, $\frac{7\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$. **1.2.40.** а) πk, $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; 2π; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; 3π. **1.2.41.** а) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.42.** а) $0°$, $\pm 22{,}5°$, $\pm 60°$, $\pm 67{,}5°$; б) $0°$, $36°$, $45°$, $72°$. **1.2.43.** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.2.44.** а) $-\frac{7\pi}{6} + 7\pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{5\pi}{6} + 5\pi k$, $k \in Z$. **1.2.45.** а) πk, $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$.

1.2.46. а) $-\frac{\pi}{2}+6\pi k$, $\frac{3\pi}{2}+6\pi k$, $k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}$, $-\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}$, $k\in Z$. **1.2.47.** а) $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$, $-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{12}+\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. **1.2.48.** а) πk, $-\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$; б) $\frac{2\pi k}{3}$, $\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$. **1.2.49.** а) πk, $\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$; б) $\frac{3\pi}{2}+4\pi k$, $\frac{\pi}{2}+4\pi k$, $k\in Z$. **1.2.50.** а) $[-4;-3]$; б) $[-4;-3]$. **1.2.51.** а) $[-2;-1{,}2]$; б) $\left[-\frac{11}{6};-\frac{7}{6}\right]$. **1.2.52.** а) 7; б) 27. **1.2.53.** а) 19; б) 83. **1.2.54.** а) 25; б) 126. **1.2.55.** а) 1; б) 5. **1.2.56.** а) 6; б) 3. **1.2.57.** а) 1; б) 1. **1.2.58.** а) 1; б) $\frac{1}{3}$. **1.2.59.** а) Решений нет; б) решений нет. **1.2.60.** а) 2; б) -1. **1.2.61.** а) 5; б) 0. **1.2.62.** а) 8; б) 2. **1.2.63.** а) 1; б) 1. **1.2.64.** а) -1; б) -2. **1.2.65.** а) 1; б) 1. **1.2.66.** а) 0; 3; б) -2; 2. **1.2.67.** а) -1; б) -1. **1.2.68.** а) $-\frac{1}{2}$; б) 2,5. **1.2.69.** а) 0; б) -1. **1.2.70.** а) -1; б) 0; -1. **1.2.71.** а) -4; б) 1. **1.2.72.** а) 1,5; б) 0,25. **1.2.73.** а) -4; б) 0,5. **1.2.74.** а) 3; 4; б) 2; 6. **1.2.75.** а) $\frac{7}{6}$; б) 0,4. **1.2.76.** а) -1; 3; б) -1; 3. **1.2.77.** а) 3; -1; б) 1; 5. **1.2.78.** а) 2; б) 3. **1.2.79.** а) 4; б) 2. **1.2.80.** а) 2; б) 3. **1.2.81.** а) 0; $\log_7 5$; б) 0; $\log_3 5$. **1.2.82.** а) 7; б) 27. **1.2.83.** а) 19; б) 83. **1.2.84.** а) 1; б) 3; 6. **1.2.85.** а) 2; б) 2. **1.2.86.** а) -3; 1; б) -3; 1. **1.2.87.** а) 1; б) 0,25. **1.2.88.** а) 60; б) 14. **1.2.89.** а) -1; б) -7. **1.2.90.** а) $-\frac{1}{2}$; б) -1; 2. **1.2.91.** а) 50; б) -2. **1.2.92.** а) 2; б) -1; 3. **1.2.93.** а) -3; -1; б) -7; 1. **1.2.94.** а) 1; б) 2; 1. **1.2.95.** а) $-\frac{1}{7}$; б) 0,4. **1.2.96.** а) 4; б) 1. **1.2.97.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $2\pi k$, $k\in Z$. **1.2.98.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$. **1.2.99.** а) 64; б) 216. **1.2.100.** а) 8; б) 5. **1.2.101.** а) $(-\infty;\ 0]$; б) $(-\infty;\ 0]$. **1.2.102.** а) 2; б) 1,5. **1.2.103.** а) 27; б) 25. **1.2.104.** а) 9; б) 8. **1.2.105.** а) 12; б) 81. **1.2.106.** а) -8; 1; б) -25; 5. **1.2.107.** а) 4; б) -1. **1.2.108.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **1.2.109.** а) $\frac{1}{10}$; б) $10^{-\frac{1}{2}}$; 10. **1.2.110.** а) Решений нет; б) 1. **1.2.111.** а) 0; 3; б) 0. **1.2.112.** а) 16; б) 27. **1.2.113.** а) (125; -47); б) $(-5;\ 5)$. **1.2.114.** а) (1; 2); б) (1; 2). **1.2.115.** а) $(a;\ 2a-1)$, $a\in R$; б) решений нет. **1.2.116.** а) (0; 1); б) $(-2;-1)$, $(-5;\ 2)$. **1.2.117.** а) (0; -1); б) (0; 3), (4; 1). **1.2.118.** а) $(-1;\ 4)$, $(4;-1)$; б) (3; 2), (2; 3). **1.2.119.** а) $(-5;-4)$, $(4;\ 5)$; б) (5; 4), (4; 5). **1.2.120.** а) (29; 20); б) (48; 39). **1.2.121.** а) (36; 25); б) (36; 1). **1.2.122.** а) (9; 9); б) (25; 16). **1.2.123.** а) (2; 3), (5; -3); б) (1; 3), $\left(-\frac{10}{3};\ 16\right)$. **1.2.124.** а) (1; 2); б) (2; 3).

1.3

1.3.01. а) $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{11\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **1.3.02.** а) $\left[\frac{\pi}{4}+\right.$ $\left.+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$; б) $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$. **1.3.03.** а) $(\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k)$, $k\in Z$; б) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **1.3.04.** а) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **1.3.05.** а) $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{2\pi}{3}+\right.$ $\left.+2\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. **1.3.06.** а) $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\right.$ $\left.\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **1.3.07.** а) $\left[\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, $k\in Z$. **1.3.08.** а) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k\in Z$. **1.3.09.** а) $x\neq-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $x\neq\pi+2\pi k$, $k\in Z$. **1.3.10.** а) 2; б) 6. **1.3.11.** а) 4; б) 2. **1.3.12.** а) 4; б) 3. **1.3.13.** а) 1; б) 2. **1.3.14.** а) $(-\infty;-6)\cup$ $\cup(3;+\infty)$; б) $(-\infty;-5)\cup(-1;+\infty)$. **1.3.15.** а) $(-\infty;-6)\cup[-1;+\infty)$; б) $(-\infty;-5)\cup$ $\cup[-2;+\infty)$. **1.3.16.** а) $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$; б) $(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$. **1.3.17.** а) $(-\infty;-1)\cup$ $\cup(0;3)$; б) $(-3;-1)\cup(1;+\infty)$. **1.3.18.** а) $[-2;0)\cup[1;+\infty)$; б) $[-1;1)\cup[2;+\infty)$. **1.3.19.** а) $(-6;6]$; б) $(-\infty;-9]\cup(2;+\infty)$. **1.3.20.** а) $(-\infty;-12)\cup(-4;+\infty)$; б) $(9;11)$. **1.3.21.** а) $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(1;+\infty)$; б) $(-3;1)\cup(1;2)$. **1.3.22.** а) $(-\infty;-4)\cup(0;2)$; б) $(-1;0)\cup(4;+\infty)$. **1.3.23.** а) -6; б) 4. **1.3.24.** а) 4; б) 2. **1.3.25.** а) 6; б) 2; 4; 5; 6. **1.3.26.** а) -8; б) 4. **1.3.27.** а) -1; б) 2. **1.3.28.** а) -1; б) 2. **1.3.29.** а) 0; б) 0. **1.3.30.** а) -2; б) -2. **1.3.31.** а) 4; б) -4. **1.3.32.** а) -31; б) 6. **1.3.33.** а) $(-5;1)\cup(2;3)$; б) $(-2;-1)\cup(3;4)$. **1.3.34.** а) $(1;6)$; б) $(-\infty;1)\cup(8;+\infty)$. **1.3.35.** а) $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$; б) $(-\infty;2{,}5]$. **1.3.36.** а) $(-\infty;3)$; б) $(-\infty;-1)$. **1.3.37.** а) $(-\infty;1]$; б) $(2;+\infty)$. **1.3.38.** а) $(-\infty;-4)$; б) $(-\infty;0]$. **1.3.39.** а) $(-\infty;5)$; б) $(-\infty;3]$. **1.3.40.** а) $(-\infty;-4]$; б) $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right)$. **1.3.41.** а) $(-\infty;2)$; б) $(1;+\infty)$. **1.3.42.** а) $(-\infty;2)$; б) $(-\infty;1)$. **1.3.43.** а) $[0;5]$; б) $(-\infty;0]\cup\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$. **1.3.44.** а) $(1;+\infty)$; б) $(-\infty;9]$. **1.3.45.** а) -1; б) 6. **1.3.46.** а) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$. **1.3.47.** а) $(1;+\infty)$; б) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **1.3.48.** а) $(2;+\infty)$; б) $(-\infty;3)$. **1.3.49.** а) $(-\infty;1)$; б) $(2;+\infty)$. **1.3.50.** а) $(\log_5 2;+\infty)$;

б) $(\log_6 7; +\infty)$. **1.3.51.** а) $(-4; +\infty)$; б) $(-\infty; 2)$. **1.3.52.** а) $(-\infty; 1)$; б) $(-\infty; -2)$. **1.3.53.** а) $(-\infty; -2)$; б) $(-\infty; 2)$. **1.3.54.** а) $[-4; +\infty)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **1.3.55.** а) $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$. **1.3.56.** а) $\left[-\frac{1}{5}; +\infty\right)$; б) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **1.3.57.** а) $(1; +\infty)$; б) $(-1; +\infty)$. **1.3.58.** а) $(-1; 3)$; б) $[-3; 2]$. **1.3.59.** а) $\left[-\sqrt{3}; -1\right) \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$; б) $[-3,5; 0) \cup [1; +\infty)$. **1.3.60.** а) $\left(1\frac{2}{3}; 2\right)$; б) $(1; 4)$. **1.3.61.** а) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$. **1.3.62.** а) $(-3; 3)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **1.3.63.** а) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. **1.3.64.** а) $(-3; 3)$; б) $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$. **1.3.65.** а) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; -5) \cup$ $\cup (5; +\infty)$. **1.3.66.** а) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; б) $(-2; 2)$. **1.3.67.** а) $(-\infty; 1)$; б) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **1.3.68.** а) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; б) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **1.3.69.** а) $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$; б) $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$. **1.3.70.** а) $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$; б) $(2,5; 7)$. **1.3.71.** а) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$; б) $\left[2; 2\frac{1}{3}\right)$. **1.3.72.** а) $(-2; 7)$; б) $(-1; 1,5)$. **1.3.73.** а) $(3; 11]$; б) $\left(\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4}\right]$. **1.3.74.** а) $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$; б) $\left(\frac{3}{4}; 2\right)$. **1.3.75.** а) $(1; +\infty)$; б) $(3; +\infty)$. **1.3.76.** а) $(-3; 1)$; б) $(0; 1)$. **1.3.77.** а) $(3; 28)$; б) $(2; 3)$. **1.3.78.** а) $(1,5; 4)$; б) $\left(3; \frac{13}{4}\right)$. **1.3.79.** а) $(-1; 2]$; б) $(1; +\infty)$. **1.3.80.** а) $(1,5; 15)$; б) $(-5; -3)$. **1.3.81.** а) $(-2; 2)$; б) $(8; +\infty)$. **1.3.82.** а) $(2; 3) \cup [11; +\infty)$; б) $(4; 5) \cup$ $\cup [13; +\infty)$. **1.3.83.** а) $(0,68; 0,7)$; б) $\left(0,65; \frac{2}{3}\right)$. **1.3.84.** а) $(1,5; 2)$; б) $\left(\frac{4}{3}; 3\right)$. **1.3.85.** а) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; б) $(-1; -0,5) \cup (-0,5; 0)$. **1.3.86.** а) $(4; +\infty)$; б) $(-1; 8)$. **1.3.87.** а) $(2; +\infty)$; б) $(4,8; 6)$. **1.3.88.** а) $(3; +\infty)$; б) $(-7; -1) \cup (2; +\infty)$. **1.3.89.** а) 6; б) 1. **1.3.90.** а) -9; б) 4. **1.3.91.** а) $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$; б) $(2; +\infty)$. **1.3.92.** а) 3; б) 3. **1.3.93.** а) 1; б) 1. **1.3.94.** а) $(-\infty; -1,5)$; б) $(-\infty; -4)$. **1.3.95.** а) $(-3; 1,5)$; б) $(4,5; +\infty)$. **1.3.96.** а) $(-\infty; -6]$; б) $[1; 3)$. **1.3.97.** а) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; б) $\left(\frac{1}{11}; +\infty\right)$. **1.3.98.** а) $(-2; 1)$; б) $\left[\frac{2}{7}; \frac{5}{9}\right]$. **1.3.99.** а) Множество решений изображено на рисунке 1 ; б) множество решений изображено на рисунке 2 .

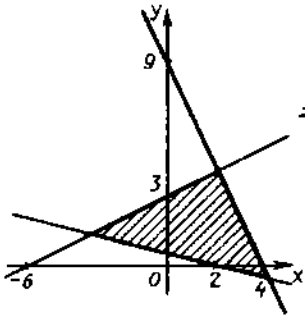


Рис. 1

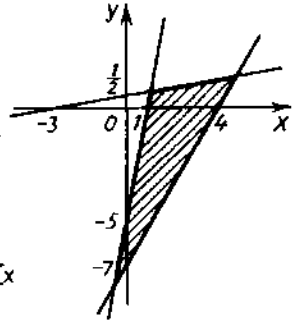


Рис. 2

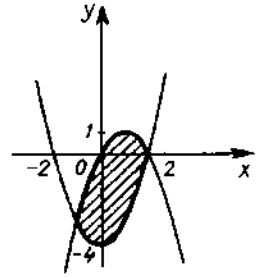


Рис. 3

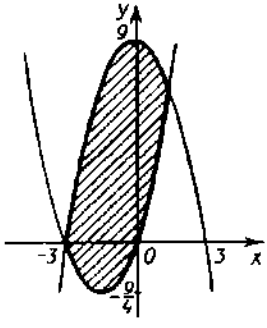


Рис. 4

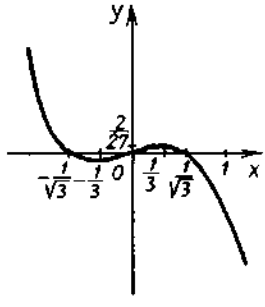


Рис. 5

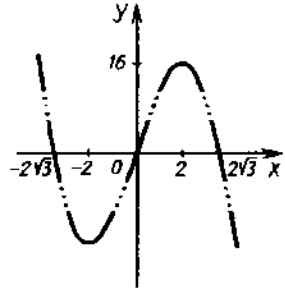


Рис. 6

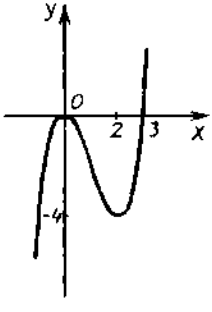


Рис. 7

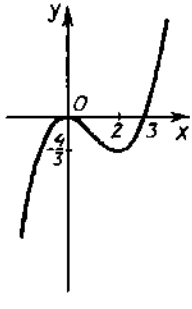


Рис. 8

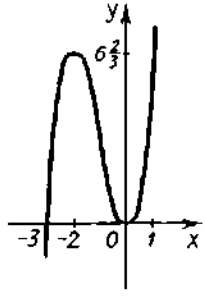


Рис. 9

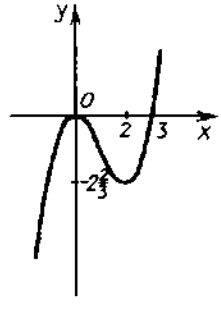


Рис. 10

1.4

1.4.01. а) $(-\infty; 0)\cup(0,2; +\infty)$; б) $(-5; 2)$. **1.4.02.** а) $(-\infty; -3]\cup[-2; 3]$; б) $(-\infty; -4]\cup$ $\cup[-2; 2]$. **1.4.03.** а) $(0; 2)$; б) $(-\infty; 0)\cup(3; +\infty)$. **1.4.04.** а) $(0; 1)$; б) $(-\infty; -3)\cup(0; +\infty)$. **1.4.05.** а) $(-\infty; -5)\cup(-1; +\infty)$; б) $(-\infty; 1)\cup(5; +\infty)$. **1.4.06.** а) $(-\infty; 4)\cup(4; +\infty)$; б) $(-\infty; 6)\cup(6; +\infty)$. **1.4.07.** а) $[0; 81]$; б) $[16; +\infty)$. **1.4.08.** а) $[2; 2,5)$; б) $(-\infty; 2)\cup$ $\cup\left[2\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **1.4.09.** а) $(3; 13)\cup(13; +\infty)$; б) $\left(-2; -1\frac{7}{8}\right)\cup\left(-1\frac{7}{8}; +\infty\right)$. **1.4.10.** а) $[0; 4)$; б) $[0; 25)$. **1.4.11.** а) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)\cup(1; +\infty)$; б) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **1.4.12.** а) $[-2; 2]$; б) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$. **1.4.13.** а) $(-\infty; -2)\cup(2; +\infty)$; б) $(-4; 4)$. **1.4.14.** а) $[0,8; 1)\cup$ $\cup(6; +\infty)$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right]\cup(2; 3)$. **1.4.15.** а) $\left[\frac{2}{3}; 2\right)\cup(2; +\infty)$; б) $[-2; -1)\cup(-1; +\infty)$. **1.4.16.** а) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **1.4.17.** а) $(-\infty; -1)\cup$ $\cup[2; +\infty)$; б) $(-\infty; 2)\cup[4; +\infty)$. **1.4.18.** а) $(0; 1]$; б) $(-\infty; 1)\cup[2; +\infty)$. **1.4.19.** а) $(0; 2,5)\cup$ $\cup(3; +\infty)$; б) $(0; 2)\cup(5; +\infty)$. **1.4.20.** а) Все действительные числа, за исключением чисел вида $\frac{\pi}{3}+2\pi k, \frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; б) все действительные числа, за исключением чисел вида $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$. **1.4.21.** а) $[0; 2]$; б) $[0; 2]$. **1.4.22.** а) $[-1; 5]$; б) $[1; 7]$. **1.4.23.** а) $[4; 5]$; б) $[5; 6]$. **1.4.24.** а) $[4; 5]$; б) $[2; 3]$. **1.4.25.** а) -1; 3; $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; б) -1; 3; πk, $k\in Z$. **1.4.26.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. **1.4.27.** а) $(2,5; 3)$; б) $(-\infty; -3)\cup(2; +\infty)$. **1.4.28.** а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; б) $[0; \pi]$. **1.4.29.** а) $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; б) $(-\pi; 0)$; $(0; \pi)$; $(\pi; 2\pi)$. **1.4.30.** а) $[0; \pi]$; б) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. **1.4.31.** а) $(-\pi; 0)$; $(0; \pi)$; $(\pi; 2\pi)$; б) $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. **1.4.33.** а) $\left(-\infty; -\frac{9}{8}\right)$; б) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **1.4.34.** а) $\left(\frac{9}{8}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. **1.4.35.** а) Рис.3; б) рис.4. **1.4.41.** а) $[-1; 3]$; б) $[-3; 1]$. **1.4.42.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **1.4.43.** а) -7; $-7,8$; б) 13; 9. **1.4.44.** а) 3; б) 2. **1.4.45.** а) 4; б) 4. **1.4.46.** а) 0; б) 1. **1.4.47.** а) $\log_2 5$; б) $\log_3 4$. **1.4.48.** а) $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$; б) $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$. **1.4.49.** а) $(0; 1)$; б) $(-2; 2)$. **1.4.50.** а) $(2; 3)$; б) $(4; 2)$.

1.5

1.5.01. а) $2\pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.5.02.** а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. **1.5.03.** а) 0,5; 3,5; б) $\frac{1}{3}; 3\frac{1}{3}$. **1.5.04.** а) -1; 1; б) 0; 6. **1.5.05.** а) -2; $1-\sqrt{5}$; 0; $1+\sqrt{5}$; б) -1; $3-\sqrt{10}$; 1; $3+\sqrt{10}$. **1.5.06.** а) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi(1+k)$, $k \in Z$. **1.5.07.** а) $f'(1) < 0$; б) $f'(0,5) < 0$. **1.5.08.** а) $f'\left(\frac{1}{3}\right) < 0$; б) $f'(-1) < 0$. **1.5.09.** а) $-\frac{1}{3\ln 2}$; б) 0; $-\frac{1}{\ln 3}$. **1.5.10.** а) 0; 3; б) 0; $-\frac{1}{2}$. **1.5.11.** а) (3,5; $+\infty$); б) (2; $+\infty$). **1.5.12.** а) Возрастает на $(-\infty; -2]$ и на $[0{,}4; +\infty)$, убывает на $[-2; 0{,}4]$; б) возрастает на $(-\infty; -5]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $[-5; 1]$. **1.5.13.** а) Возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[2; +\infty)$, убывает на $[-1; 2]$; б) возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[5; +\infty)$, убывает на $[-1; 5]$. **1.5.14.** а) Возрастает на $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$, убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ и на $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) возрастает на $[-4; 4]$, убывает на $(-\infty; -4]$ и на $[4; +\infty)$. **1.5.15.** а) Возрастает на $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right]$ и на $[0; +\infty)$, убывает на $\left[-\frac{4}{3}; 0\right]$; б) возрастает на $(-\infty; 0]$ и на $[2; +\infty)$, убывает на $[0; 2]$. **1.5.16.** а) Возрастает на $\left[\sqrt{2}; 0\right]$ и на $\left[\sqrt{2}; +\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right]$ и на $\left[0; \sqrt{2}\right]$; б) возрастает на $\left[-\sqrt{3}; 0\right]$ и на $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$, убывает на $\left[-\infty; -\sqrt{3}\right]$ и на $\left[0; \sqrt{3}\right]$. **1.5.17.** а) Убывает на $(-\infty; +\infty)$; б) возрастает на $[-1; 2]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[2; +\infty)$. **1.5.18.** а) Возрастает на $(-\infty; 0]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $[0; 1]$; б) возрастает на $(-\infty; 0]$ и на $[2; +\infty)$, убывает на $[0; 2]$. **1.5.19.** а) Возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[0; 1]$; б) возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[0; 1]$, убывает на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$. **1.5.20.** а) Возрастает на $(-\infty; -3]$ и на $[3; +\infty)$, убывает на $[-3; 3]$; б) возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $[-1; 1]$. **1.5.21.** а) Возрастает на $(-\infty; 0]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $[0; 1]$; б) возрастает на $\left(-\infty; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ и на $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, убывает на $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. **1.5.22.** а) Возрастает на $(-\infty; -4]$ и на $[4; +\infty)$, убывает на $[-4; 0)$ и на $(0; 4]$; б) возрастает на $(-\infty; -3]$ и на $[3; +\infty)$, убывает на $[-3; 0)$ и на $(0; 3]$. **1.5.23.** а) Возрастает на $[0; 2)$ и на $(2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2)$ и на $(-2; 0]$; б) возрастает на $(0; 1]$, убывает на $(-\infty; 0)$ и на $[1; +\infty)$. **1.5.24.** а) Возрастает на $(-\infty; -2)$, на $(-2; 2)$ и на $(2; +\infty)$; б) убывает на $(-\infty; -1)$,

на $(-1; 1)$ и на $(1; +\infty)$. **1.5.25.** а) $f_{\min} = f\left(-\sqrt{5}\right) = f\left(\sqrt{5}\right) = -16$, $f_{\max} = f(0) = 9$; б) $f_{\min} = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1\frac{1}{4}$, $f_{\max} = f(0) = 2$. **1.5.26.** а) $f_{\min} = f(-1) = 0$, $f_{\min} = f(4) = -125$, $f_{\max} = f(0) = 3$; б) $f_{\min} = f(0) = f(2) = -3$, $f_{\max} = f(1) = -1$. **1.5.27.** а) $f_{\min} = f(-1) = f(1) = 0$, $f_{\max} = f(0) = 2$; б) $f_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{3}{4}$, $f_{\max} = f(0) = 3$. **1.5.28.** а) $f_{\min} = f(0) = f(4) = 0$, $f_{\max} = f(2) = 4$; б) $f_{\min} = f(1) = -1$, $f_{\max} = f(0) = f(2) = 0$. **1.5.29.** а) $f_{\min} = f(-2) = f(2) = -9$, $f_{\max} = f(0) = 7$; б) $f_{\min} = f(-1) = f(1) = 2$, $f_{\max} = f(0) = 3$. **1.5.30.** а) $f_{\min} = f(6) = 3$, $f_{\max} = f(-6) = -3$; б) $f_{\min} = f(2) = 4$, $f_{\max} = f(-2) = -4$. **1.5.31.** а) $x_{\min} = -1 + \sqrt{2}$, $x_{\max} = -1 - \sqrt{2}$; б) $x_{\min} = -1 + \sqrt{3}$, $x_{\max} = -1 - \sqrt{3}$. **1.5.32.** а) $x_{\min} = 1 + \sqrt{2}$, $x_{\max} = 1 - \sqrt{2}$; б) $x_{\min} = 1 + \sqrt{3}$, $x_{\max} = 1 - \sqrt{3}$. **1.5.33.** а) $x_{\min} = \sqrt{2}$, $x_{\max} = -\sqrt{2}$; б) $x_{\min} = \sqrt{3}$, $x_{\max} = -\sqrt{3}$. **1.5.34.** а) $x_{\min} = -1 + \sqrt{2}$, $x_{\max} = -1 - \sqrt{2}$; б) $x_{\min} = 1 + \sqrt{3}$, $x_{\max} = 1 - \sqrt{3}$. **1.5.35.** а) 4 — наибольшее, -8 — наименьшее; б) 4 — наибольшее, -8 — наименьшее. **1.5.36.** а) 25 — наибольшее, 0 — наименьшее; б) $39\frac{1}{16}$ — наибольшее, 0 — наименьшее. **1.5.37.** а) 75 — наибольшее, 23 — наименьшее; б) 266 — наибольшее, -6 — наименьшее. **1.5.38.** а) 0 — наибольшее, -25 — наименьшее; б) $5\frac{1}{4}$ — наибольшее, -1 — наименьшее. **1.5.39.** а) 0 — наибольшее, -64 — наименьшее; б) 48 — наибольшее, -6 — наименьшее. **1.5.40.** а) 6 — наибольшее, -6 — наименьшее; б) 4 — наибольшее, -24 — наименьшее. **1.5.41.** а) 13 — наибольшее, -68 — наименьшее; б) 13 — наибольшее, 4 — наименьшее. **1.5.42.** а) $1\frac{1}{16}$ — наибольшее, $-9\frac{15}{16}$ — наименьшее; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; б) $-2\frac{1}{3}$ — наибольшее, $-10\frac{15}{16}$ — наименьшее; -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2. **1.5.43.** а) 4 — наибольшее, 0 — наименьшее; 0; 1; 2; 3; 4; б) $6\frac{3}{4}$ — наибольшее, 4 — наименьшее; 4; 5; 6. **1.5.44.** а) $6\frac{2}{3}$ — наибольшее, $4\frac{1}{3}$ — наименьшее; 5; 6; б) $8\frac{2}{7}$ — наибольшее, $6\frac{1}{4}$ — наименьшее; 7; 8. **1.5.45.** а) При $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; б) при $a \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$. **1.5.46.** а) При $a \in (0; 4)$; б) при $a \in \left(0; 1\frac{5}{27}\right]$. **1.5.47.** а) 5; 5; б) 6; 6. **1.5.48.** а) 6; 2; б) 9; 3. **1.5.49.** а) 12; 24; 18; б) 16; 16; 16. **1.5.50.** а) Рис. 5; б) рис. 6. **1.5.51.** а) Рис. 7; б) рис. 8. **1.5.52.** а) Рис. 9; б) рис. 10. **1.5.53.** а) $7e^4$ — наибольшее, $-3e^2$ — наименьшее; б) $2e^3$ — наибольшее, $-e^4$ — наименьшее. **1.5.54.** а) $\frac{17}{4\ln 2}$ — наи-

большее, $\frac{2}{\ln 2}$ — наименьшее; б) $\frac{82}{9\ln 3}$ — наибольшее, $\frac{2}{\ln 3}$ — наименьшее. **1.5.55.** а) $y = 2x - 4$; б) $y = 3x - 9$. **1.5.56.** а) $y = -4x + 3$; б) $y = 4x + 3$. **1.5.57.** а) $y = 4x - 1$; б) $y = 8x - 9$. **1.5.58.** а) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi - \sqrt{2}$; б) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi + \sqrt{2}$. **1.5.59.** а) $y = 4x$, $y = -4x + 16$; б) $y = -9x + 81$, $y = 9x$. **1.5.60.** а) $y = 4x + 2$; б) $y = -4x + 7$. **1.5.61.** а) (2; 3); б) (1; 1). **1.5.64.** а) Возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(0; 1]$, $y_{\min} = y(1) = 1$; б) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(0; 1]$, $y_{\min}(1) = 1 - 3\ln 2$. **1.5.65.** а) Возрастает на $[-\infty; 0)$ и на $(0; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $y_{\max} = y(1) = e^{-3}$; б) возрастает на $[-\infty; -2]$ и на $[0; +\infty)$, убывает на $[-2; 0]$, $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(-2) = \frac{4}{e^2}$. **1.5.66.** а) Возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(0; 1]$, $y_{\min} = y(1) = 0{,}5$; б) возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$, $y_{\max} = y(0) = 4$.

1.6

1.6.02. а) При $a = -2$; б) при $a = 0{,}6$. **1.6.03.** а) $a \in R$; б) $a \in R$. **1.6.04.** а) $F(x) = \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{7}{8}$; б) $F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{13}{6}$. **1.6.05.** а) $F(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{12}{5}$; б) $F(x) = \frac{1}{2}x^6 + \frac{5}{2}$. **1.6.06.** а) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}$; б) $F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{3}$. **1.6.07.** а) $F(x) = -\frac{1}{3}x^{-3} - \frac{71}{24}$; б) $F(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + \frac{5}{8}$. **1.6.08.** а) $F(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{5}$; б) $F(x) = \frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} - \frac{14}{9}$. **1.6.09.** а) $F(x) = 4x^{\frac{5}{2}} + 1$; б) $F(x) = x^{-\frac{1}{2}} + 1$. **1.6.10.** а) $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - 9x^{-1} - 35$; б) $F(x) = x^3 + 4x^{-1} - 22$. **1.6.11.** а) $F(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 7$; б) $F(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{9}{4}$. **1.6.12.** а) $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$, $F(x) = -x^{-1} + C$; б) $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 3x + C$, $F(x) = -x^{-2} + C$. **1.6.13.** а) $F(x) = x^{\frac{1}{2}} + C$, $F(x) = -x^{-1} - 2\ln|x| + 2x + C$; б) $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$, $F(x) = x - \ln|x| - 2x^{-1} + C$. **1.6.14.** а) $F(x) = -2\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} + C$; б) $F(x) = 3\cos\frac{x}{3} + 3\sin\frac{x}{3} + C$. **1.6.15.** а) $F(x) = -\operatorname{ctg} x + 3$, не принадлежит; б) $F(x) = \operatorname{tg} x - 1$, принадлежит. **1.6.16.** а) $F(x) = \operatorname{tg} x + 1$, не принадлежит; б) $F(x) = -\operatorname{ctg} x + 1$, не принадлежит. **1.6.17.** а) $\frac{\pi}{12} + \pi k$; $\frac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$; $-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$. **1.6.18.** а) 6; б) 4. **1.6.19.** а) 2; б) -3. **1.6.20.** а) $\frac{21}{2}$; б) $2\sin 1$. **1.6.21.** а) $145\frac{1}{5}$; б) 20. **1.6.22.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$; б) 0. **1.6.23.** а) $\frac{1}{2}$; б) -9. **1.6.24.** а) $\frac{31}{480}$;

б) $\frac{5}{14}$. **1.6.25.** а) $2-\frac{1}{2}\pi^2$; б) $\frac{\pi^2}{8}+1$. **1.6.26.** а) 4; б) $12\frac{2}{3}$. **1.6.27.** а) $\frac{3}{5}$; б) $2\sqrt{2}$. **1.6.28.** а) $\frac{5}{6}$; б) $-\frac{2}{3}$. **1.6.29.** а) $\frac{1}{5}$; б) 0. **1.6.30.** а) 1; б) 1. **1.6.31.** а) -6; б) 2. **1.6.32.** а) $\frac{7}{2}$; б) $\frac{7}{6}$. **1.6.33.** а) -2; б) 2. **1.6.34.** а) -1; 1; б) -2; 2. **1.6.35.** а) -2; -1; б) -4; 3. **1.6.36.** а) $\frac{1\pm\sqrt{65}}{2}$; б) $3\pm\sqrt{23}$. **1.6.37.** а) $[-4;\ 4]$; б) $(-\infty;\ -3]\cup[3;\ +\infty)$. **1.6.38.** а) $\left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right]$; б) $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$. **1.6.39.** а) $\left[-3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2}\right)$; б) $(-\infty;\ -3]\cup[3;\ +\infty)$. **1.6.40.** а) 4,5; б) 1. **1.6.41.** а) $2-\frac{\pi}{3}$; б) 1. **1.6.42.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{4}$. **1.6.43.** а) $\frac{32}{3}$; б) $\frac{32}{3}$. **1.6.44.** а) 4,5; б) 4,5. **1.6.45.** а) $\frac{1}{24}$; б) $\frac{125}{54}$. **1.6.46.** а) 6; б) $\frac{10}{3}$. **1.6.47.** а) 4,5; б) $\frac{4}{3}$. **1.6.48.** а) $\frac{41}{3}$; б) $\frac{46}{3}$. **1.6.49.** а) $\frac{32}{3}$; б) 36. **1.6.50.** а) $\frac{20}{3}$; б) $\frac{8}{3}$. **1.6.51.** а) 4,25; б) 0,75. **1.6.52.** а) 0,75; б) 0,25. **1.6.53.** а) $\frac{4}{3}$; б) 18. **1.6.54.** а) $\frac{8}{3}$, рис. 11; б) $\frac{8}{3}$, рис. 12. **1.6.55.** а) $\frac{1}{2}$, рис. 13; б) 1, рис. 14. **1.6.56.** а) $6-4\ln 2$, рис. 15; б) $2-\ln 3$, рис. 16. **1.6.57.** а) $10\frac{2}{3}$, рис. 17; б) $10\frac{2}{3}$, рис. 18. **1.6.58.** а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{4}{3}$. **1.6.59.** а) 4,5; б) $20\frac{5}{6}$. **1.6.60.** а) 2; б) 3. **1.6.61.** а) Да; б) да. **1.6.62.** а) Нет; б) нет. **1.6.63.** а) $a=4$; б) $a=2$. **1.6.64.** а) $a=\frac{\pi}{4}$; б) $a=\frac{\pi}{6}$.

Раздел 2

2.1

2.1.01. а) 0; б) 0. **2.1.02.** а) $\sqrt{2}$; б) 2. **2.1.03.** а) 0,6; б) $10\frac{1}{3}$. **2.1.04.** а) 3; б) -2. **2.1.05.** а) $-1,4$; б) $-6,6$. **2.1.06.** а) 3; б) 2. **2.1.07.** а) 2,5; б) -4. **2.1.08.** а) 22; б) 22. **2.1.09.** а) 10; б) 8. **2.1.10.** а) 0; б) 0. **2.1.11.** а) 0; б) 1. **2.1.12.** а) -4; б) -3. **2.1.13.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{6}$. **2.1.14.** а) Первое; б) второе. **2.1.15.** а) Второе; б) второе. **2.1.16.** а) Второе; б) первое. **2.1.17.** а) Первое; б) второе. **2.1.18.** а) Второе; б) второе. **2.1.19.** а) Первое; б) первое. **2.1.20.** а) Первое; б) второе. **2.1.21.** а) Второе; б) второе. **2.1.22.** а) Первое; б) первое. **2.1.23.** а) Второе; б) первое. **2.1.24.** а) Второе; б) первое. **2.1.32.** а) $-\frac{1}{3}$; б) -5. **2.1.33.** а) 2; б) 1. **2.1.34.** а) $-\frac{1}{4}$; б) $-1,5$. **2.1.35.** а) 2; б) 1. **2.1.36.** а) 1; б) 0,75. **2.1.37.** а) 1; б) 1. **2.1.38.** а) 2,5; б) 1,6. **2.1.39.** а) 8,5; б) 0. **2.1.40.** а) 10; б) 5. **2.1.41.** а) 3; б) 2. **2.1.42.** а) 1,5; б) 0,04. **2.1.43.** а) 2; б) 3. **2.1.44.** а) 1; б) 8. **2.1.45.** а) $\frac{5}{12}\lg 3-\frac{1}{2}\lg 2$; б) $\frac{1}{12}\lg 2-\frac{1}{2}\lg 3$. **2.1.46.** а) 1,5; б) 0,75. **2.1.47.** а) $\frac{4a-2}{6-3a}$; б) $\frac{6+a}{12-2a}$. **2.1.48.** а) Равно; б) больше. **2.1.49.** а) Меньше;

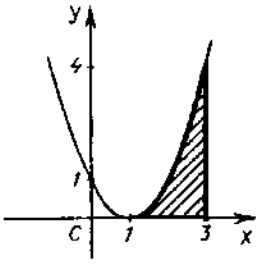


Рис. 11

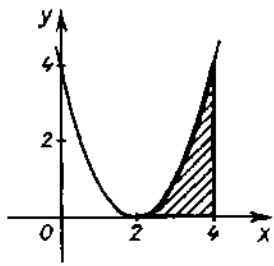


Рис. 12

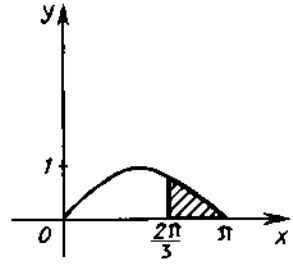


Рис. 13

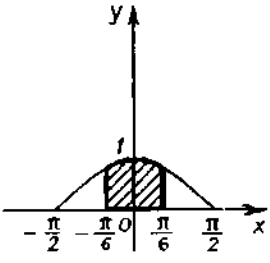


Рис. 14

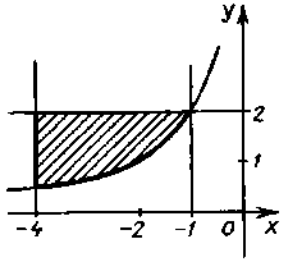


Рис. 15

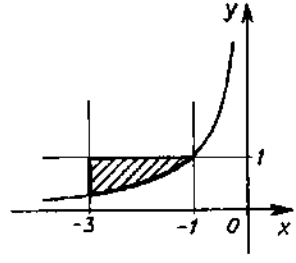


Рис. 16

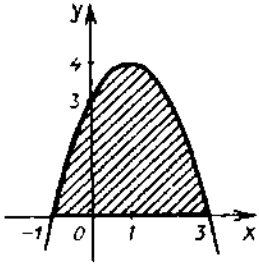


Рис. 17

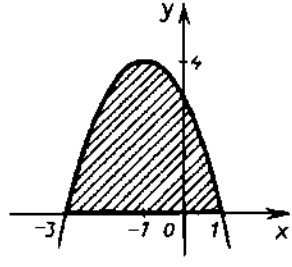


Рис. 18

б) равно. **2.1.50.** а) Больше; б) больше. **2.1.51.** а) Меньше; б) меньше. **2.1.52.** а) Плюс; б) минус. **2.1.53.** а) -723; б) -11. **2.1.54.** а) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; $\log_3 \frac{1}{3}$; $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; 2^0; б) $\log_{\frac{1}{5}} 25$; $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; $4^{\frac{1}{2}}$; $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$. **2.1.55.** а) $\log_a \sqrt[5]{a^{-2}}$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; $5^{\frac{1}{2}}$; б) $\log_{\frac{1}{a}} a^2$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $\operatorname{arctg}(-1)$; $4^{\frac{1}{3}}$. **2.1.56.** а) π; б) π. **2.1.57.** а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{6}$. **2.1.58.** а) $\frac{13}{85}$; б) $\frac{24}{25}$. **2.1.59.** а) $\frac{8\sqrt{5}}{81}$; б) -1. **2.1.60.** а) $\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$; б) $\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **2.1.61.** а) $\frac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{3}}$; б) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2}$. **2.1.62.** а) $8\sqrt{3}$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.1.63.** а) Равно; б) равно. **2.1.64.** а) Больше; б) меньше. **2.1.65.** а) Больше; б) больше. **2.1.66.** а) Больше; б) больше. **2.1.67.** а) Больше; б) меньше. **2.1.68.** а) Больше; б) меньше. **2.1.77.** а) $-2\cos x$; б) $-\frac{2\cos^2 2x}{\sin 2x}$. **2.1.78.** а) $\frac{\cos 2x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$; б) $2\sin 2x$. **2.1.79.** а) $-\frac{1}{\sin^2\beta}$; б) $-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}-1$. **2.1.80.** а) 1; б) 1. **2.1.81.** а) -1; б) 1. **2.1.82.** а) $\operatorname{tg}^3\alpha$; б) $\operatorname{ctg}^3\alpha$. **2.1.83.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$; б) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$. **2.1.84.** а) -1; б) $-\sqrt{3}$. **2.1.85.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.1.86.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.1.87.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{3}{4}$. **2.1.88.** а) $1+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$; б) $1+$ $+\cos x-\sin x$. **2.1.89.** а) $-2\cos 2\alpha$; б) $-2\cos 2\alpha$. **2.1.92.** а) 5; б) 3. **2.1.93.** а) -2; б) -3. **2.1.94.** а) $x-1$; б) $a^{\frac{1}{2}}-1$. **2.1.95.** а) $\frac{2a+2}{a-1}$; б) $\frac{2x+2}{1-x}$. **2.1.96.** а) $-\frac{7}{5}$; б) -2. **2.1.97.** а) $\log_3\frac{1}{5}$; б) $\log_{\frac{1}{5}}2$. **2.1.98.** а) $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}(a-c)}$; б) $\frac{b^{\frac{3}{4}}(b+a)}{a^{\frac{1}{4}}}$. **2.1.99.** а) $\frac{1}{2}$; б) -1.

2.2

2.2.01. а) 0; б) 0. **2.2.02.** а) $\frac{3}{2}$; б) $1\frac{1}{3}$. **2.2.03.** а) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **2.2.04.** а) $\frac{\sqrt{13}-3}{2}$; б) 2. **2.2.05.** а) $\frac{8}{9}$; б) $3\frac{1}{4}$. **2.2.06.** а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$. **2.2.07.** а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{6}$. **2.2.08.** а) 0; б) 0. **2.2.09.** а) -5; б) 1. **2.2.10.** а) $\pm\sqrt{7}$; б) ± 3. **2.2.11.** а) ± 2; б) ± 3. **2.2.12.** а) 2; 3; б) 2; -2; 7. **2.2.13.** а) -3; 1; б) 1; -2. **2.2.14.** а) 6; б) 3. **2.2.15.** а) (2; 3); б) (5; 1). **2.2.16.** а) (2; 1); б) (4; 1). **2.2.17.** а) 1; б) 2. **2.2.18.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{4}{9}$. **2.2.19.** а) $a=-8$; нет; б) $a=9$; да, $8\frac{1}{2}$. **2.2.20.** а) (3; 3); $\left(\frac{1-2\sqrt{7}}{3};\frac{2\sqrt{7}-1}{3}\right)$; б) $(-1;\ 1)$; $(-5;\ -5)$. **2.2.21.** а) $\left(\frac{-5+\sqrt{33}}{2};\frac{-5+\sqrt{33}}{2}\right)$; $\left(\frac{-9-\sqrt{89}}{2};\frac{9+\sqrt{89}}{2}\right)$; $\left(\frac{-9+\sqrt{89}}{3};\frac{9-\sqrt{89}}{3}\right)$; б) $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$; $(-2;\ 2)$. **2.2.22.** а) (29; 20); б) $(-186;\ -195)$. **2.2.23.** а) (36; 25); б) (25; 64). **2.2.24.** а) (0; 0); (3; 3); $\left(-\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{9}{4};\frac{9}{2}\right)$; б) (0; 0); (6;3); $(-3;\ 3)$; (3; 6). **2.2.25.** а) $\left(28;\ 16\sqrt{3}\right)$; б) (41; 40). **2.2.26.** а) $\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; б) (0; 0); (2; 2). **2.2.27.** а) $(-8{,}5;\ 3)$; $\left(-\frac{17}{3};\ 2\right)$; б) $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$; $(-2;\ -3)$. **2.2.28.** а) (4; 2);

б) (2,25; −5,25). **2.2.29.** а) $2\pi k$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $\pi+2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **2.2.30.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **2.2.31.** а) πk, $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. **2.2.32.** а) $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. **2.2.33.** а) $\frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $\frac{\pi k}{4}$, $(-1)^{k-1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **2.2.34.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. **2.2.35.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in Z$; б) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$, $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$. **2.2.36.** а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi k$, $k\in Z$. **2.2.37.** а) $(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; б) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. **2.2.38.** а) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$; б) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. **2.2.39.** а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **2.2.40.** а) πk, $\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **2.2.41.** а) πk, $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; да; б) $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; нет. **2.2.42.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; нет; б) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; нет. **2.2.43.** а) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $2\pi k$, $-\arccos\frac{3}{5}+2\pi k$, $k\in Z$. **2.2.44.** а) $2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{5\pi}{12}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{12}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\arcsin\frac{4}{5}+\pi(2k+1)$, $k\in Z$. **2.2.45.** а) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $\pi+2\pi k$, $k\in Z$. **2.2.46.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\{1;2\}$; б) πk, $k\in\{-1;0;1;2\}$; $\frac{\pi}{2}$. **2.2.47.** а) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$. **2.2.48.** а) 0; π; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; б) $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$. **2.2.49.** а) 12; б) 11. **2.2.50.** а) 0; б) 2. **2.2.51.** а) 24; б) 25. **2.2.52.** а) 0; $\pm\frac{\pi}{3}$; ±2; б) 0; ±3. **2.2.53.** а) −1; 7; $\frac{\pi k}{2}$, $k\in\{0;1;2;3;4\}$; б) −1; 5; $\frac{\pi}{3}$; π. **2.2.54.** а) $\pm\sqrt{2}$; $-\sqrt{6}$; −3; 2; б) −3; −1; $-\sqrt{\frac{3}{2}}$; $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $-\sqrt{\frac{15}{2}}$. **2.2.55.** а) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k-n);\ \frac{\pi}{3}+\pi(k+n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k-n);\ \frac{2\pi}{3}+\pi(k+n)\right)$, $k,n\in Z$; б) $\left(\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k+n);\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi(k-n)\right)$, $k,n\in Z$. **2.2.56.** а) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $k,n\in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $k,n\in Z$. **2.2.57.** а) 1; $-\frac{5}{3}$; б) −1; $-\frac{3}{4}$. **2.2.58.** а) 3; б) 4. **2.2.59.** а) 2; $\log_3 2-1$; б) 2; −1. **2.2.60.** а) $-\frac{2}{5}$; б) $\frac{5}{4}$. **2.2.61.** а) 1; б) −2. **2.2.62.** а) 2; $2\log_2 7$; б) 1; $2\log_2 3$. **2.2.63.** а) 0; б) 0. **2.2.64.** а) 4; б) 0. **2.2.65.** а) $\frac{1}{2\cdot(1-\log_3 2)}$; б) $\frac{1}{2-\log_2 5}$. **2.2.66.** а) 3; 2; б) 1; 3. **2.2.67.** а) $\sqrt{\frac{10}{7}}$; б) $\frac{10}{3}$. **2.2.68.** а) 40; б) 6. **2.2.69.** а) 2; б) 64. **2.2.70.** а) 0; $\frac{1}{2}$; б) 0. **2.2.71.** а) 0; $-\log_2 3$; б) 0; $\log_3 2$.

2.2.72. а) (4; 0); б) (1; 2); (2; 1). **2.2.73.** а) (1; 2); б) (2; 3). **2.2.74.** а) (3; 2); б) (2; 2). **2.2.75.** а) (3; 3); (5; 1); б) (2; −2); (5; 1). **2.2.76.** а) $\left(\frac{13}{5};-\frac{4}{5}\right)$; б) $\left(-\frac{5}{3};\frac{7}{6}\right)$. **2.2.77.** а) −3; б) 1. **2.2.78.** а) 7; б) 5. **2.2.79.** а) 10^3; 10^{-6}; б) $\frac{1}{3}$; 81. **2.2.80.** а) 2; б) 2. **2.2.81.** а) 5; б) 6. **2.2.82.** а) 1; $-\frac{1}{3}$; б) 3,5. **2.2.83.** а) −1; б) −1. **2.2.84.** а) 1; б) 1. **2.2.85.** а) −4; 2; б) 3. **2.2.86.** а) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **2.2.87.** а) $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{3}{4}$. **2.2.88.** а) (3; 5); б) (1; 1). **2.2.89.** а) $\left(3;\frac{7}{2}\right)$; б) (11; 7). **2.2.90.** а) $\left(\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$; б) (2;1). **2.2.91.** а) (10; 1); б) $\left(\frac{1}{10};1000\right),\left(1000;\frac{1}{10}\right)$. **2.2.92.** а) (3; 3); б) (2; 32), (32; 2). **2.2.93.** а) $\left(\frac{9}{2};\frac{1}{2}\right)$; б) (3; −3). **2.2.94.** а) (4; 3); (3; 4); б) (3; 2). **2.2.95.** а) (3; 5); (5; 3); б) (3; 1). **2.2.96.** а) $(-\infty;0)\cup\{1\}$; б) $\{-1\}\cup[0;+\infty)$.

2.3

2.3.01. а) $[-5;1]\cup[3;+\infty)$; б) $\{1;2\}\cup[8;+\infty)$. **2.3.02.** а) [0; 2]; б) решений нет. **2.3.03.** а) $(-2;+\infty)$; б) [−7; 2). **2.3.04.** а) $\{-2\}\cup[3;+\infty)$; б) $[-2;-1]\cup[1;2]$. **2.3.05.** а) $[-8,5;-3)$; б) $(-\infty;1)\cup(3;7)$. **2.3.06.** а) $(7;+\infty)\cup\{5\}$; б) $\{-6\}\cup(2;+\infty)$. **2.3.07.** а) $[-7;2)\cup\left(\sqrt{\frac{17}{2}};3\right]$; б) $\left[-2\sqrt{2};\frac{2-\sqrt{39}}{5}\right)\cup\left(0;2\sqrt{2}\right]$. **2.3.08.** а) $\left(-\frac{1}{2};1\right)$; б) (−3; 1). **2.3.09.** а) $(-\infty;-1)\cup\{3\}$; б) $(-\infty;1)\cup\{2\}$. **2.3.10.** а) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(4;+\infty)$; б) $\left(1;\frac{4}{3}\right)$. **2.3.11.** а) $[-1;1)\cup(3;5]$; б) $[-1;2)\cup(5;7]$. **2.3.12.** а) $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$; б) (0; 2). **2.3.13.** а) (1;3), $x=2$; б) [1;3], $x=3$. **2.3.14.** а) $(-1;1)\cup(1;+\infty)$; б) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)$. **2.3.15.** а) 2; б) 3. **2.3.16.** а) При $a\in(-\infty;0]$ $x\in[5;+\infty)$; при $a\in(5;+\infty)$ $x\in[a;+\infty)$; при $a\in[0;5]$ $x\in[5;+\infty)\cup\{a\}$; б) при $a\in(-\infty;2]$ $x\in[2;+\infty)$; при $a\in(2;+\infty)$ $x\in[a;+\infty)\cup\{2\}$. **2.3.17.** а) При $a\in(-\infty;0]$ решений нет; при $a\in(0;+\infty)$ $x\in(2-a;2+a)$, рис.19; б) при $a\in(0;+\infty)$ решений нет; при $a\in(-\infty;0]$ $x\in(-\infty;a-1)\cup(-a-1;+\infty)$, рис. 20. **2.3.18.** а) При $a\in(-\infty;+\infty)$ $x\in(a-2;a+2)$, рис. 21; б) при $a\in(-\infty;0]$ $x\in(-\infty;+\infty)$; при $a\in(0;+\infty)$ $x\in\left(\frac{a}{2};+\infty\right)$, рис. 22. **2.3.19.** а) При $a\in(-\infty;0]$ $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; при $a\in(0;+\infty)$ $x\in\left(-\frac{1}{a};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{a}\right)$, рис. 23; б) при $a\in(-\infty;-1)$ $x\in\left(-\infty;\frac{1}{a+1}\right)$, при $a\in[-1;0]$ решений нет; при $a\in(0;1)$ $x\in\left(\frac{1}{a+1};\frac{1}{1-a}\right)$,

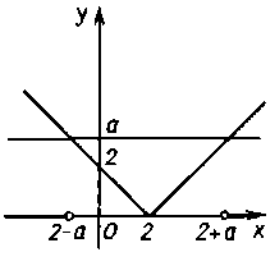


Рис. 19

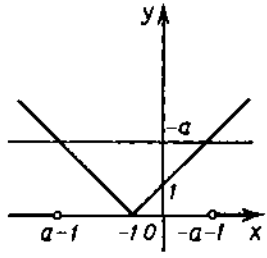


Рис. 20

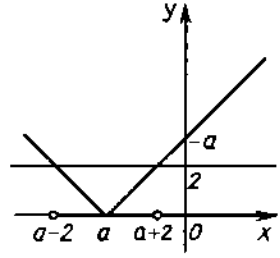


Рис. 21

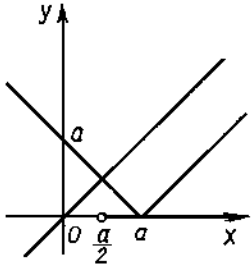


Рис. 22

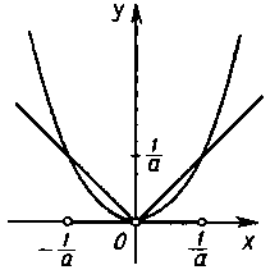


Рис. 23

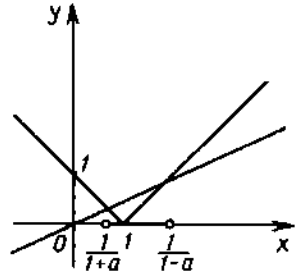


Рис. 24

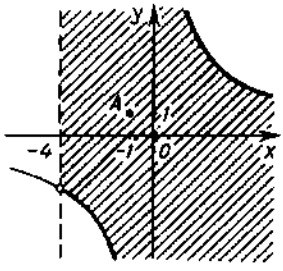


Рис. 25

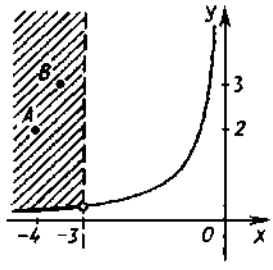


Рис. 26

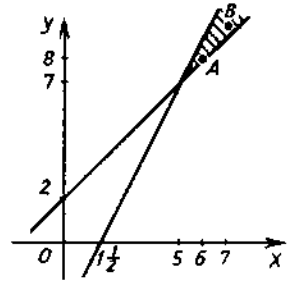


Рис. 27

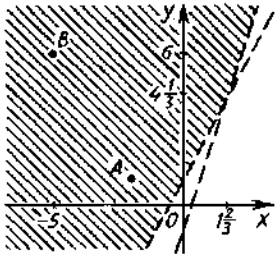


Рис. 28

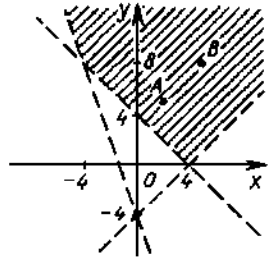


Рис. 29

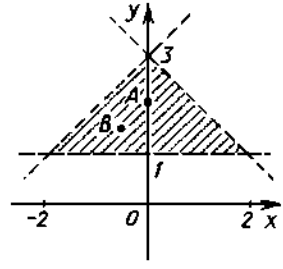


Рис. 30

при $a \in [1;+\infty)$ $x \in \left(\frac{1}{a+1}; +\infty\right)$, рис. 24. **2.3.20.** а) $[4;+\infty)$; б) $(-5;-1)$. **2.3.21.** а) $(-\infty; -6)$; б) $\left(-1;\frac{3}{4}\right)$. **2.3.22.** а) $A(-1; 1)$, $O(0; 0)$, рис. 25; б) $A(-4; 2)$, $B(-3{,}5; 3)$, рис. 26. **2.3.23.** а) $A(6; 8)$, $B(7; 9{,}5)$, рис. 27; б) $A(-2; 1)$, $B(-5; 6)$, рис. 28. **2.3.24.** а) $A(2; 5)$, $B(5; 8)$, рис. 29; б) $A(0;2)$, $B(-0{,}5; 1{,}5)$, рис. 30. **2.3.25.** а) $A(0;1)$, $B(1;2)$, рис. 31; б) $A(2; 2)$, $B(3;3)$, рис. 32. **2.3.26.** а) $(-\infty; -1]$, рис. 33; б) $[-6; 3]$, рис. 34.**2.3.27.** а) $(-1; 3)$, рис. 35; б) $(-\infty; -1) \cup (0;+\infty)$, рис. 36. **2.3.28.** а) $[-1; 0]$, рис. 37; б) $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, рис. 38. **2.3.29.** а) $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; б) $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$. **2.3.30.** а) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k \in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in Z$. **2.3.31.** а) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in Z$; б) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k; -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k \in Z$. **2.3.32.** а) $\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}; \frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)$, $k \in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{7\pi}{8}+\pi k\right)$, $k \in Z$. **2.3.33.** а) Решений нет; б) решений нет. **2.3.34.** а) $\left[\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$, $k \in Z$; б) $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi k; \frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in Z$. **2.3.35.** а) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in Z$; б) $\left(\pi k; \frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in Z$. **2.3.36.** а) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in Z$. **2.3.37.** а) $(2\pi k; \pi+2\pi k)$, $k \in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in Z$. **2.3.38.** а) Решений нет; б) решений нет. **2.3.39.** а) $\left(\frac{\pi}{20}+\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{5}; \frac{3\pi}{20}+\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{5}\right)$, $k \in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{8}+3+\pi k; \frac{7\pi}{8}+3+\pi k\right)$, $k \in Z$. **2.3.40.** а) $(-\infty; 4]$; б) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$. **2.3.41.** а) $(-\infty; -3]$; б) $(-\infty; -2]$. **2.3.42.** а) $(2{,}5; 12)$; б) $[1; 5]$. **2.3.43.** а) $\left(-\infty;\log_3\frac{135}{4}\right]$; б) $(-\infty; 1]$. **2.3.44.** а) $(-\infty; -5) \cup (5;+\infty)$; б) $(-3; 3)$. **2.3.45.** а) $(-\infty; -0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$; б) $(-5; 5)$. **2.3.46.** а) $(0; 1] \cup [3;+\infty)$; б) $(-\infty;0) \cup [1; 2]$. **2.3.47.** а) $(-\infty;3]$; б) $(-\infty; 2]$. **2.3.48.** а) $(0; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$. **2.3.49.** а) $(-\infty; -1] \cup [1;+\infty)$; б) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$ **2.3.50.** а) $[0; 1]$; б) $(-1;+\infty)$. **2.3.51.** а) $(-\infty; 2)$; б) $[-1;+\infty)$. **2.3.52.** а) $(-\infty; 0)$; б) $(0; +\infty)$. **2.3.53.** а) $(-\infty; 2]$; б) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **2.3.54.** а) 6; б) -1. **2.3.55.** а) $\left(\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$; б) $\left(-3;\frac{3}{2}\right)$. **2.3.56.** а) $(3; 4) \cup (6; +\infty)$; б) $(-1; 0] \cup (1; 3]$. **2.3.57.** а) $\left(\frac{3}{4}; 2\right]$; б) $(-4; -3) \cup (3; 4)$. **2.3.58.** а) $\left(\frac{2}{3};\frac{9}{10}\right]$; б) $(-\infty; 1]$. **2.3.59.** а) $[-1; 1) \cup (6; 8]$; б) $(2; 4] \cup [5; 7)$.

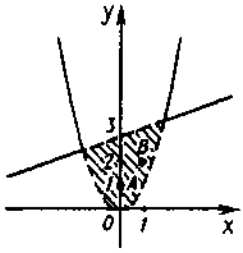


Рис. 31

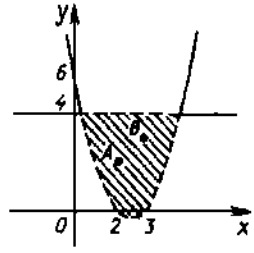


Рис. 32

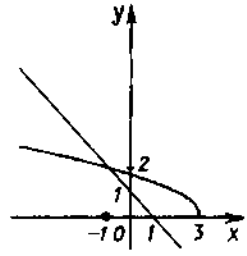


Рис. 33

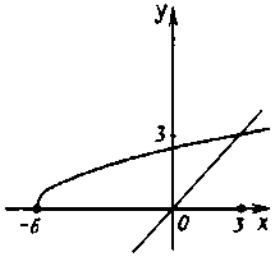


Рис. 34

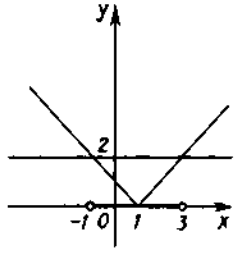


Рис. 35

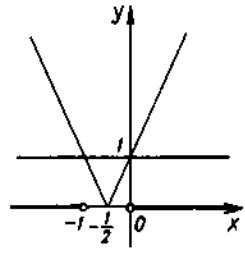


Рис. 36

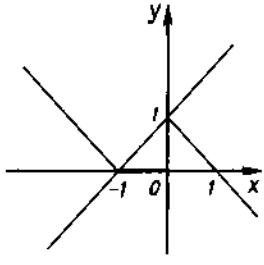


Рис. 37

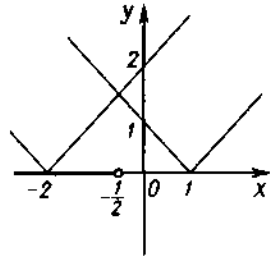


Рис. 38

2.3.60. а) $(1;+\infty)$; б) $\left(\frac{2}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$. **2.3.61.** а) $(0;2)$; б) $(1;+\infty)$. **2.3.62.** а) $\left(-1;1+2\sqrt{2}\right)$; б) $\left(-\frac{17}{9};-1\right)\cup(7;+\infty)$. **2.3.63.** а) $(1;3)$; б) $(-2;-1]\cup[2;3)$. **2.3.64.** а) $(3;4)\cup(5;+\infty)$; б) $(1;2)$. **2.3.65.** а) $\left(\frac{1}{2};8\right)$; б) $\left(\frac{1}{125};\frac{1}{25}\right)$. **2.3.66.** а) $(-\infty;3)$; б) $(-\infty;4)$. **2.3.67.** а) $(1;2]\cup$ $\cup[3;4)$; б) $[4;9]$. **2.3.68.** а) $(3;+\infty)$; б) $\left(\frac{3}{2};4\right)$. **2.3.69.** а) 2; б) 6. **2.3.70.** а) $(0;1)\cup$ $\cup(3;+\infty)$, $x=4$; б) $(-\infty;-8)\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$, $x=1$. **2.3.71.** а) $\left(-4;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$; б) $\left[\frac{2}{3};1\right)\cup\left(\frac{5}{3};2\right]\cup(5;+\infty)$. **2.3.72.** а) $\left[-5;\frac{-9+\sqrt{77}}{2}\right)\cup\left(\frac{-9+\sqrt{77}}{2};0\right]$; б) $(0;1)\cup(3;+\infty)$. **2.3.73.** а) $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$; б) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. **2.3.74.** а) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;

б) $(-2; 2)$. **2.3.75.** а) $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \pi+2\pi k\right)$, $k \in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi k\right)\cup$ $\cup\left(2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$. **2.3.76.** а) $(-\infty; 3)\cup(3; 4)$; б) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2}; -1\right)\cup\left(1; \sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

2.4

2.4.01. а) $(-\infty; -3)\cup[-2; 0)\cup(0; 3)\cup(5; +\infty)$; б) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)\cup[3; +\infty)\cup\{0\}$. **2.4.02.** а) $\left[\frac{3}{4}; 2\right)$; б) $[0; 1)$. **2.4.03.** а) $[-4; 2)\cup(2; 3)\cup(3; 4]$; б) $(-\infty; -4)\cup$ $\cup\left(-4; \frac{1-\sqrt{77}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{77}}{2}; 5\right)\cup(5; +\infty)$. **2.4.04.** а) $(2; 4]$; б) $(-2; 1]$. **2.4.05.** а) $(4; 5)\cup$ $\cup(5; +\infty)$; б) $(-3; 4)$. **2.4.06.** а) $\left(\frac{1}{2}; 3\right]$; б) $\left(-3; \frac{1}{2}\right]$. **2.4.07.** а) $(-\infty; -2]$; б) $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)\cup$ $\cup\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$. **2.4.08.** а) $\left(2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k; \pi+2\pi k\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k; \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k \in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in Z$. **2.4.09.** а) $\left(\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in Z$; б) $\left(\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in Z$. **2.4.10.** а) $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]\cup$ $\cup\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right]\cup\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k \in Z$; б) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)\cup$ $\cup\left(\frac{11\pi}{6}+2\pi k; 2\pi+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\pi+2\pi k; \frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in Z$. **2.4.11.** а) Все действительные числа, за исключением чисел вида $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; б) все действительные числа, за исключением чисел вида $\frac{\pi k}{3}, \frac{\pi k}{5}, \frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in Z$. **2.4.12.** а) Все действительные числа, за исключением чисел вида $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; б) все действительные числа, за исключением чисел вида $\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. **2.4.13.** а) -1; б) 0. **2.4.14.** а) -5; б) -1. **2.4.15.** а) 2; б) -4. **2.4.16.** а) 2; б) 6. **2.4.17.** а) Убывает на $(-\infty; -1)$ и на $(-1; 0]$, возрастает на $[0; 1)$ и на $(1; +\infty)$; б) возрастает на $(-\infty; -3)$ и на $(-3; 0]$, убывает на $[0; 3)$ и на $(3; +\infty)$. **2.4.18.** а) Возрастает на всей области определения $(-\infty; 1]$; б) возрастает на всей области определения $[-2; +\infty)$. **2.4.19.** а) Возрастает на $(-\infty; +\infty)$; б) убывает на $(-\infty; +\infty)$. **2.4.20.** а) Убывает на $(-\infty; 1)$ и на $(1; +\infty)$; б) возрастает на $(-\infty; 2)$ и на $(2; +\infty)$. **2.4.21.** а) -1; б) $-\frac{4}{3}$. **2.4.22.** а) 1; б) 1. **2.4.23.** а) $a = 3$, $b = -36$, $c = 96$; б) $a = 2$,

$b = 8$, $c = 15$. **2.4.24.** а) 1; б) 0. **2.4.25.** а) $p = -10$, $q = 26$; б) $p = -6$, $q = 11$. **2.4.26.** а) $\left[-\frac{\sqrt{2}+1}{2}; \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$; б) $[-1; 1]$. **2.4.27.** а) $\left[1; \sqrt{2}\right]$; б) $\left[0; \frac{3}{2}\right]$. **2.4.28.** а) $[-3; +\infty)$; б) $\left(-\infty; \frac{85}{4}\right]$. **2.4.29.** а) Рис. 39; б) рис. 40. **2.4.30.** а) Рис. 41; б) рис. 42. **2.4.31.** а) Рис. 43; б) рис. 44. **2.4.32.** а) Рис. 45; б) рис. 46. **2.4.33.** а) Рис. 47; б) рис. 48. **2.4.34.** а) Рис. 49; б) рис. 50. **2.4.35.** а) Рис. 51; б) рис. 52. **2.4.36.** а) Рис. 53; б) рис. 54. **2.4.37.** а) Рис. 55; б) рис. 56. **2.4.38.** а) Рис. 57; б) рис. 58. **2.4.39.** а) Рис. 59; б) рис. 60. **2.4.40.** а) Рис. 61; б) рис. 62. **2.4.41.** а) Рис. 63; б) рис. 64. **2.4.42.** а) Рис. 65; б) рис. 66. **2.4.43.** а) $(9; +\infty)$; б) -3 . **2.4.44.** а) -6; б) $\{0\} \cup$ $\cup (3; +\infty)$. **2.4.45.** а) 3; б) 1. **2.4.46.** а) -8; 8; б) $(-5; 5)$. **2.4.47.** а) $(0; 4)$;

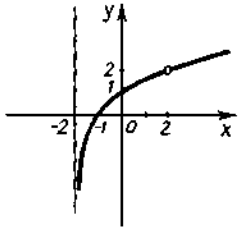


Рис. 39

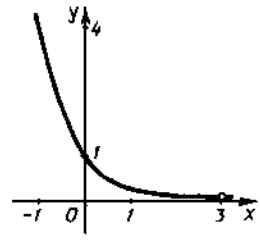


Рис. 40

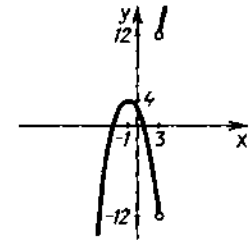


Рис. 41

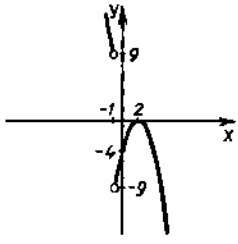


Рис. 42

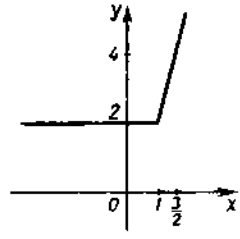


Рис. 43

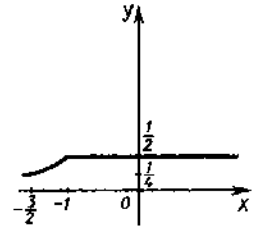


Рис. 44

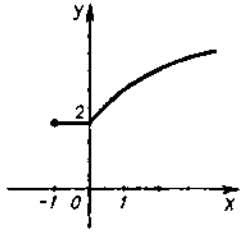


Рис. 45

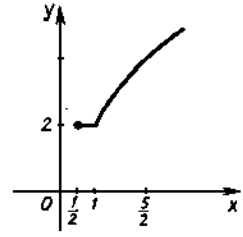


Рис. 46

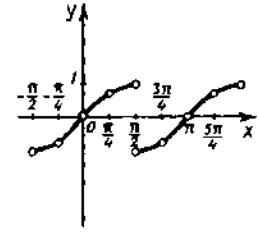


Рис. 47

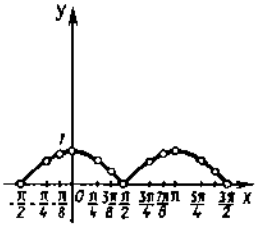


Рис. 48

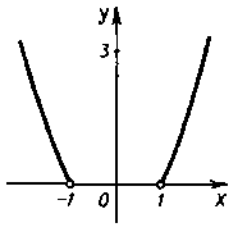


Рис. 49

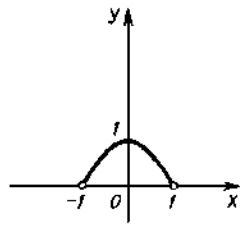


Рис. 50

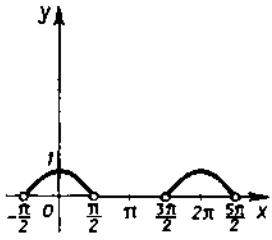


Рис. 51

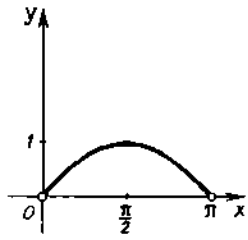


Рис. 52

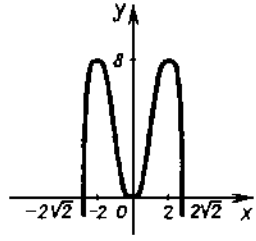


Рис. 53

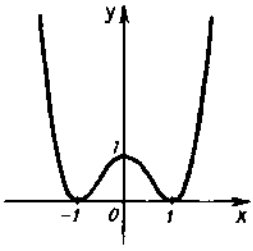


Рис. 54

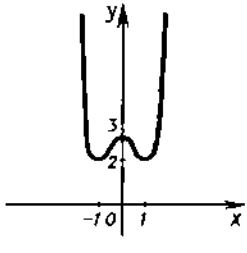


Рис. 55

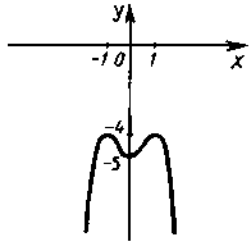


Рис. 56

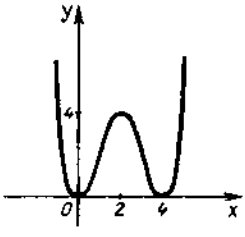


Рис. 57

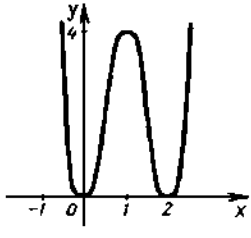


Рис. 58

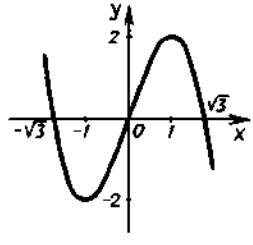


Рис. 59

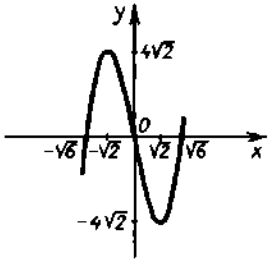


Рис. 60

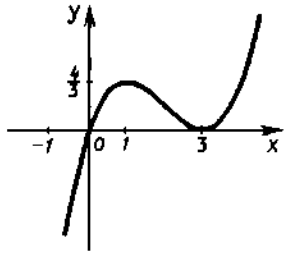


Рис. 61

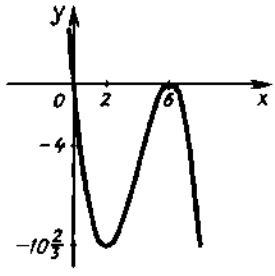


Рис. 62

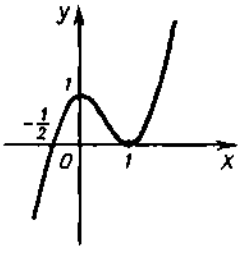


Рис. 63

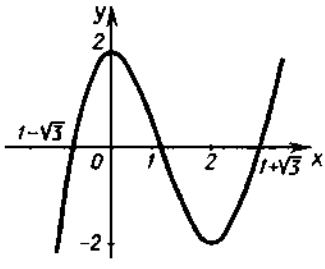


Рис. 64

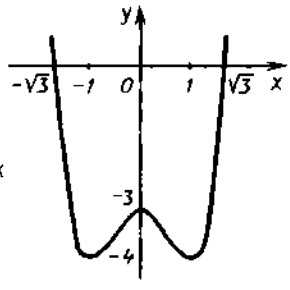


Рис. 65

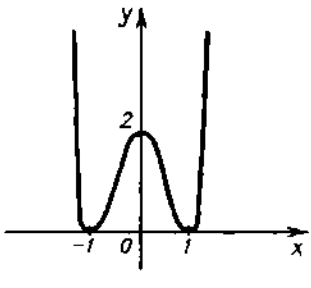


Рис. 66

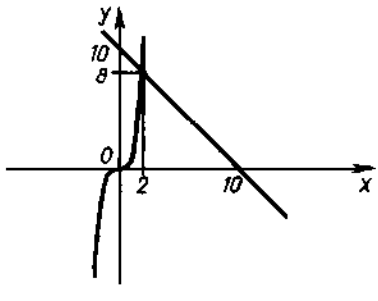


Рис. 67

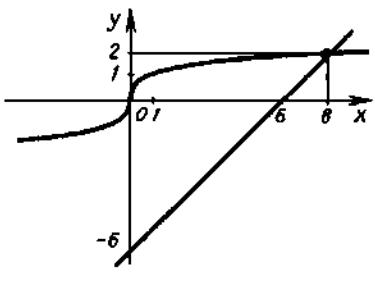


Рис. 68

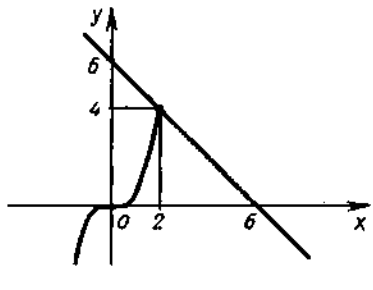


Рис. 69

б) 1;−1. **2.4.48.** а) При $a \in (-\infty; 1) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$ решений нет, при $a = 1$ и при $a = \sqrt{2}$ четыре решения, при $a \in \left(1; \sqrt{2}\right)$ восемь решений; б) при $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$ решений нет, при $a = \frac{1}{2}$ и при $a = 1$ четыре решения, при $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ восемь решений. **2.4.49.** а) При $|a| > 2\sqrt{2}$ решений нет, при $|a| = 2\sqrt{2}$ одно решение, при $|a| < 2\sqrt{2}$ два решения; б) при $|a| > \sqrt{2}$ решений нет, при $|a| = \sqrt{2}$ одно решение, при $|a| < \sqrt{2}$ два решения. **2.4.50.** а) $\frac{1}{4}$; б) 2. **2.4.51.** а) $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right]$; б) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$. **2.4.52.** а) (6; 10]; б) (4; 7]. **2.4.53.** а) 2; рис. 67; б) 8; рис. 68. **2.4.54.** а) 2; рис. 69; б) 1; рис. 70. **2.4.55.** а) 0; рис. 71; б) 1; рис.72. **2.4.56.** а) 0; 2; рис. 73; б) 0; 1; рис. 74. **2.4.57.** а) 2; рис. 75; б) 2; рис.76. **2.4.58.** а) 2; рис. 77; б) 3; рис.78. **2.4.59.** а) −1; рис. 79; б) 1; рис.80. **2.4.60.** а) $(-\infty; -5)$ и $(3; +\infty)$; б) $(-1; 4)$. **2.4.61.** а) $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$; б) $(-\infty; 1)$ и $(4; +\infty)$. **2.4.62.** а) (1; 4); б) $(\infty; -7)$ и $(2; +\infty)$. **2.4.63.** а) Рис. 81; б) рис. 82. **2.4.64.** а) Рис. 83; б) рис. 84. **2.4.65.** а) Рис. 85; б) рис. 86. **2.4.66.** а) Рис. 87; б) рис. 88. **2.4.67.** а) $[-2; 2)$; рис. 89; б) $[2; 6]$; рис. 90. **2.4.68.** а) $(8; +\infty)$; рис. 91; б) $\left(\frac{7}{9}; +\infty\right)$; рис. 92. **2.4.69.** а) $[1; 2) \cup (2; +\infty)$, рис. 93; б) $(-\infty; 1)$, рис. 94. **2.4.70.** а) При $a \in (-\infty; 0)$ решений нет, при $a=0$ и при $a=2$

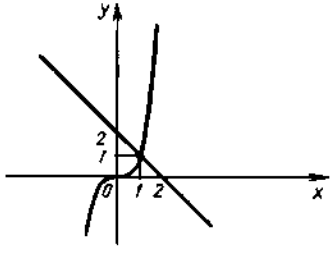


Рис. 70

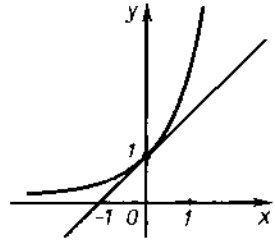


Рис. 71

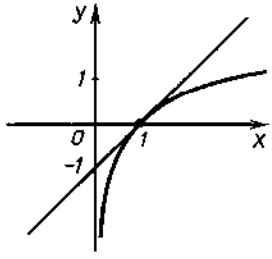


Рис. 72

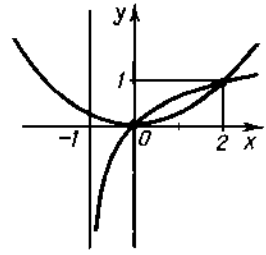


Рис. 73

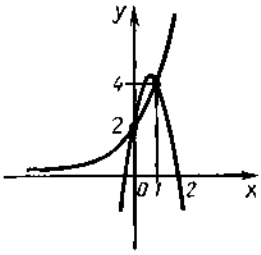


Рис. 74

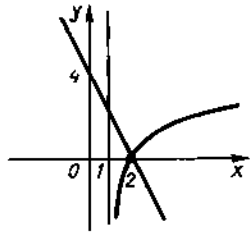


Рис. 75

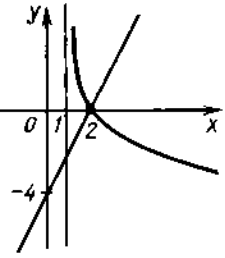


Рис. 76

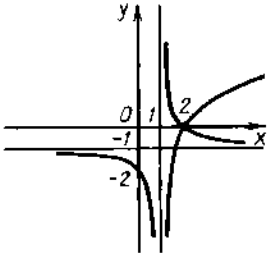


Рис. 77

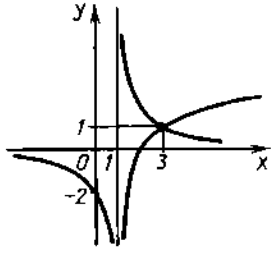


Рис. 78

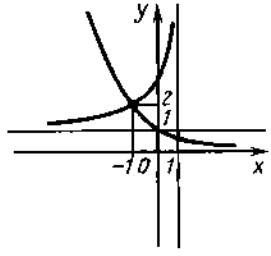


Рис. 79

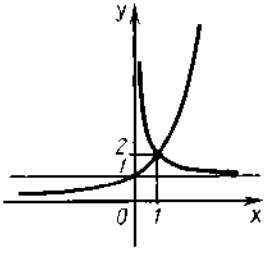


Рис. 80

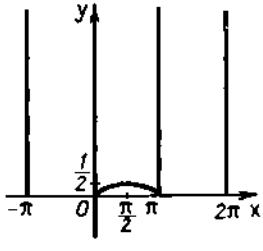


Рис. 81

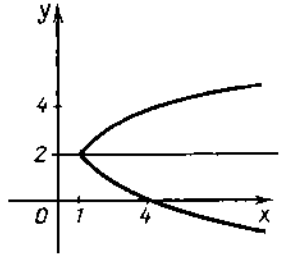


Рис. 82

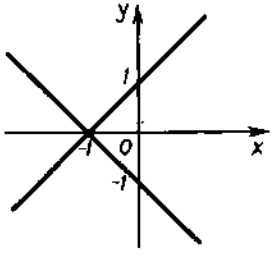


Рис. 83

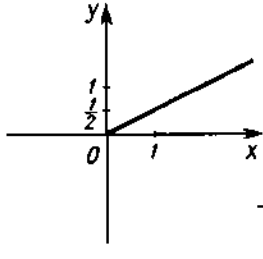


Рис. 84

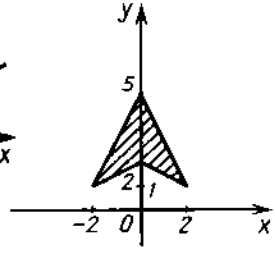


Рис. 85

одно решение, при $a \in (0; 2) \cup (2;+\infty)$ два решения; б) при $a \in (-\infty; 0)$ решений нет, при $a = 0$ и при $a = 2$ одно решение, при $a \in (0; 2) \cup (2;+\infty)$ два решения. **2.4.71.** а) При $a \in (-\infty;+\infty)$ два решения; б) при $a \in (-\infty; 0)$ решений нет, при $a=0$ одно решение, при $a \in (0;+\infty)$ два решения. **2.4.72.** а) При $a \in (-\infty; 1)$ решений нет, при $a=1$ уравнение не имеет смысла, при $a \in (1;+\infty)$ два решения; б) при $a \in (-\infty; 2)$ решений нет, при $a=2$ уравнение не имеет смысла, при $a \in \left(2;\frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3};+\infty\right)$ два решения, при $a = \frac{7}{3}$ три решения. **2.4.73.** а) При

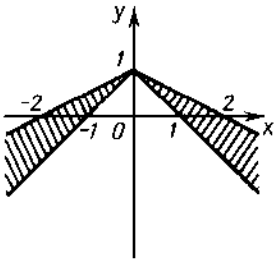


Рис. 86

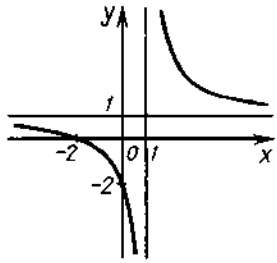


Рис. 87

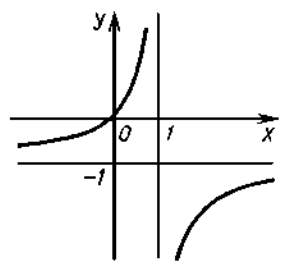


Рис. 88

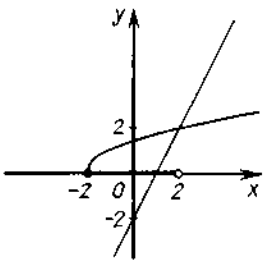


Рис. 89

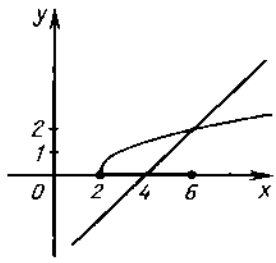


Рис. 90

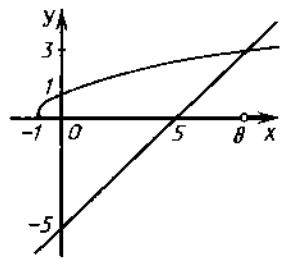


Рис. 91

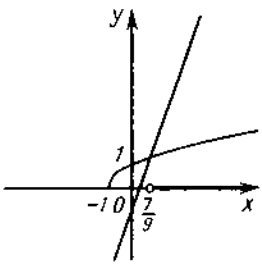


Рис. 92

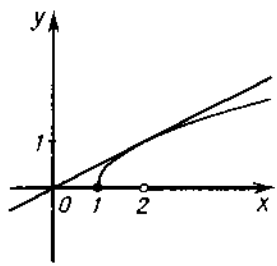


Рис. 93

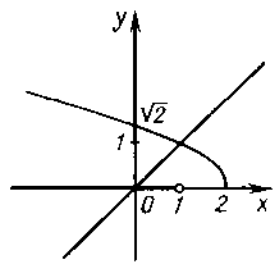


Рис. 94

$a \in [-2;0)$ решений нет, при $a=0$ уравнение не имеет смысла, при $a \in (-\infty;-2) \cup$ $\cup (2;+\infty)$ одно решение, при $a \in (0;2)$ два решения; б) при $a \in (-\infty;0)$ решений нет, при $a=0$ уравнение не имеет смысла, при $a=4$ одно решение, при $a \in (0;4) \cup (4;+\infty)$ два решения. **2.4.74.** а) При $a \in (-\infty;-2) \cup (-2;-1] \cup (0;+\infty)$ решений нет, при $a=0$ одно решение, при $a=-2$ уравнение не имеет смысла, при $a \in (-1;0)$ два решения; б) при $a \in (-\infty;-1)$ решений нет, при $a=-1$ уравнение не имеет смысла, при $a \in (-1;+\infty)$ два решения. **2.4.75.** а) При $a \in \left(-\infty;-\frac{1}{4}\right\}$ решений нет, при $a=2$ уравнение не имеет смысла, при $a \in \left\{-\frac{1}{4}\right\} \cup (6;+\infty)$ два решения, при $a=6$ три решения, при $a \in \left(-\frac{1}{4};2\right) \cup (2;6)$ четыре решения; б) при $a \in \left(\frac{1}{4};+\infty\right)$ решений нет, при $a=-1$ уравнение не имеет смысла, при $a \in (-\infty;-2) \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$ два решения, при $a=-2$ три решения, при $a \in (-2;-1) \cup \left(-1;\frac{1}{4}\right)$ четыре решения.

2.4.76. а) При $a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ решений нет, при $a \in (-1;1)$ одно решение, при $a = \pm 1$ множество решений; б) при $a \in (-\infty;2)$ решений нет, при $a=2$ множество решений, при $a \in (2;+\infty)$ два решения. **2.4.77.** а) При $a \in (-\infty;-1)$ решений нет, при $a \in \{-1\} \cup \left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$ два решения, при $a=-\frac{3}{4}$ три решения, при $a \in \left(-1;-\frac{3}{4}\right)$ четыре решения; б) при $a \in (-\infty;2)$ решений нет, при $a \in \{2\} \cup \left(\frac{9}{4};+\infty\right)$ два решения, при $a=\frac{9}{4}$ три решения, при $a \in \left(2;\frac{9}{4}\right)$ четыре решения.

2.5

2.5.01. а) $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{5}{2}$; б) $a=0$, $b=\frac{2}{\sqrt{3}}$. **2.5.02.** а) $\left(0;\frac{3}{2}\right]$; б) $(0;2)$. **2.5.03.** а) $\left(0;\frac{1}{2}\right]$; б) $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. **2.5.04.** а) $f'(2)<0$; б) $f'(3)<0$. **2.5.05.** а) $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)>0$; б) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$. **2.5.06.** а) $f'\left(-\frac{2\pi}{3}\right)<0$; б) $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)>0$. **2.5.07.** а) ± 2, $x_{\max}=-2$; б) $\pm\frac{1}{4}$, $x_{\max}=-\frac{1}{4}$. **2.5.08.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \pi+2\pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{3}$; б) $2\pi k$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$; $\frac{2\pi}{3}$. **2.5.09.** а) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{6}$; б) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $2\pi k$, $k \in Z$; $-\frac{2\pi}{3}$. **2.5.10.** а) $\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}$; б) 0; $\pm\frac{\pi}{3}$. **2.5.11.** а) 0; б) 0. **2.5.12.** а) $y(x) \geq 0$; б) $y(x) \leq 0$. **2.5.13.** а) При $a=1$ точка максимума; б) при $a=1$ точка минимума. **2.5.14.** а) $x_{\min}=-6$; б) $x_{\max}=13$. **2.5.15.** а) $x_{\max}=\frac{1}{e}$, $x_{\min}=e$;

б) $x_{\min}=e$, $x_{\max}=1$, $x_{\min}=\frac{1}{e}$. **2.5.16.** а) 13,5; б) $\frac{11}{54}$. **2.5.17.** а) 5; б) 3. **2.5.18.** а) -3; б) $-\frac{487}{96}$. **2.5.19.** а) -18; б) $-\frac{37}{12}$. **2.5.20.** а) Убывает на $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; возрастает на $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; б) убывает на $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\frac{7\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; возрастает на $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **2.5.21.** а) 2; б) 1. **2.5.22.** а) $(-\infty;-1]\cup$ $\cup[3;+\infty)$; б) $(-\infty;-6]\cup[2;+\infty)$. **2.5.23.** а) $y=4x-6$, $y=4x$; б) $y=-3x-5$, $y=-3x$. **2.5.24.** а) $y=4x-4$, $y=2x$; б) $y=4x-4$, $y=7x-10$. **2.5.25.** а) -4; б) 3. **2.5.26.** а) 2; -10; б) 3; -13. **2.5.27.** а) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $y=\frac{1}{\sqrt{2e}}$; б) $(0;0)$, $\left(2;\frac{4}{e^2}\right)$, $y=0$. **2.5.28.** а) $(2;1)$, $y=4x-7$; б) $(-3;-6)$, $y=-5x-21$. **2.5.29.** а) $(3;-16)$; б) $\left(\frac{7}{10};-9\right)$. **2.5.30.** а) $y=8x-1$, $y=-8x+15$; б) $y=-2x+1$, $y=-18x-15$. **2.5.31.** а) 2; б) 2. **2.5.32.** а) ±3; б) 1; $1+\sqrt{2}$. **2.5.33.** а) 4; б) $8\ln 2-4$. **2.5.34.** а) $(2;-2)$, $(-4;52)$; б) $(6;48)$, $(-3;3)$. **2.5.35.** а) $a=-1$, $(2;15)$; б) $a=2$, $(1;3)$. **2.5.36.** а) $y=\frac{1}{2}x^2-1$, $y=2x-3$; б) $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-2x-2$. **2.5.37.** а) $y=x-3$; б) $y=-x$. **2.5.38.** а) $y=5-\sqrt{3}x$; б) $y=\sqrt{3}x-2$. **2.5.39.** а) $y=7x-3$; б) $y=-3x+3$. **2.5.40.** а) $y=2x-4$; б) $y=-5x-5$. **2.5.41.** а) $\left(\frac{3}{2};-2\right)$; б) $(1;-9)$. **2.5.42.** а) $\operatorname{arctg}(-2)$; б) $\operatorname{arctg}(-5)$. **2.5.43.** а) 135°; б) 45°. **2.5.44.** а) $(1;-1)$; б) $(1;2)$. **2.5.45.** Например, а) $\left(\frac{\pi}{2};-1\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{4};1\right)$. **2.5.46.** а) $\frac{8}{3};-\frac{8}{3}$; б) 5; 9. **2.5.47.** а) $-1;-\frac{3}{2}$; б) 4,5; -9. **2.5.48.** а) $(1;-1)$; б) $(2;6)$. **2.5.49.** а) $\left(\sqrt{\frac{5}{2}};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};-\frac{1}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)$. **2.5.50.** а) $(3;7)$; б) $(-3;5)$. **2.5.51.** а) $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\sqrt{\ln\left(e\sqrt{5}+e\right)}\right)$; б) $\left(\frac{1}{2};\sqrt{\ln 2}\right)$. **2.5.52.** а) -3; б) 3. **2.5.53.** а) Возрастает на $(-\infty;0]$ и на $[2;+\infty)$, убывает на $[0;2]$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=2$; б) возрастает на $[-1;0]$ и на $[1;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-1]$ и на $[0;1]$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=-1$, $x_{\min}=1$. **2.5.54.** а) Возрастает на $[-1;0]$ и на $[1;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-1]$ и на $[0;1]$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=-1$, $x_{\min}=1$; б) возрастает на $(-\infty;-2]$ и на $[0;+\infty)$, убывает на $[-2;0]$, $x_{\max}=-2$, $x_{\min}=0$. **2.5.55.** а) Возрастает на $[0;4]$, убывает на $(-\infty;0]$ и на $[4;+\infty)$, $x_{\max}=4$, $x_{\min}=0$; б) возрастает на $(-\infty;-1]$ и на $[0;1]$, убывает на $[-1;0]$

и на $[1; +\infty)$, $x_{max} = -1$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = 0$. **2.5.56.** а) Возрастает на $[0; 1]$ и на $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$ и на $[1; 2]$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = 0$, $x_{min} = 2$; б) возрастает на $[0; 2]$ и на $[4; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$ и на $[2; 4]$, $x_{max} = 2$, $x_{min} = 0$, $x_{min} = 4$. **2.5.57.** а) Возрастает на $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ и на $[3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$ и на $\left[\frac{3}{2}; 3\right]$, $x_{max} = \frac{3}{2}$, $x_{min} = 0$, $x_{min} = 3$; б) возрастает на $\left[-3; -\frac{3}{2}\right]$ и на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -3]$ и на $\left[-\frac{3}{2}; 0\right]$, $x_{max} = -\frac{3}{2}$, $x_{min} = -3$, $x_{min} = 0$. **2.5.58.** а) Возрастает на $(0; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$; б) возрастает на $(-\infty; -2]$ и на $[0; +\infty)$, убывает на $[-2; 0]$, $x_{max} = -2$, $x_{min} = 0$. **2.5.59.** а) Возрастает на $(-\infty; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$; б) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(0; 1]$, $x_{min} = 1$. **2.5.64.** а) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$. **2.5.65.** а) 0; ± 1; б) 0; ± 1. **2.5.66.** а) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$. **2.5.68.** а) 16; 16; б) 9; 9. **2.5.69.** а) 40; 40; б) $\frac{3}{2}; \frac{3}{2}$. **2.5.70.** а) 4; б) 1.

2.6

2.6.01. а) 4,5; б) 4,5. **2.6.02.** а) 4,5; б) 4,5. **2.6.03.** а) 4,5; б) 4,5. **2.6.04.** а) $\frac{1}{6}$; б) $1\frac{5}{6}$. **2.6.05.** а) 4,5; б) $20\frac{5}{6}$. **2.6.06.** а) $57\frac{1}{6}$; б) $10\frac{2}{3}$. **2.6.07.** а) 4,5; б) $1\frac{1}{3}$. **2.6.08.** а) $\frac{2}{3}$; б) 4,5. **2.6.09.** а) $10\frac{2}{3}$; б) $2\frac{1}{4}$. **2.6.10.** а) $2\frac{2}{3}$; б) $4\frac{7}{12}$. **2.6.11.** а) $3\frac{1}{3}$; б) $3\frac{1}{3}$. **2.6.12.** а) 13,5; б) $18\frac{2}{3}$. **2.6.13.** а) 4,5; б) $5\frac{1}{3}$. **2.6.14.** а) $5\frac{1}{3}$; б) $6\frac{2}{3}$. **2.6.15.** а) $3\frac{1}{12}$; б) $3\frac{1}{12}$. **2.6.16.** а) 2; б) $4\frac{1}{2}$. **2.6.17.** а) $4 - 3\ln 3$; б) $12 - 5\ln 5$. **2.6.18.** а) $12 - 5\ln 5$; б) $7\frac{1}{2} - 8\ln 2$. **2.6.19.** а) $10 - 2{,}5\ln 5$; б) $3\ln 1{,}5 - 0{,}5$. **2.6.20.** а) $b^2 \ln 3$; б) $a^2 \ln 2$. **2.6.21.** а) $5\frac{1}{3}$; б) 8. **2.6.22.** а) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi} - 2$; б) $2 - \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}$. **2.6.23.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{(\pi - 3)^3 - 27}{81}$; б) 4. **2.6.24.** а) $\frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$; б) $e^2 - 1$. **2.6.25.** а) $\frac{2}{\ln 3}$; б) $\frac{1}{2\ln 2}$. **2.6.26.** а) $\frac{(e-1)^2}{2}$; б) $\frac{1}{6}(e-1)^2(2e+1)$. **2.6.27.** а) $8 - \frac{15}{8\ln 2}$; б) $9 - \frac{26}{9\ln 3}$. **2.6.28.** а) $16 - \frac{6}{\ln 2}$; б) $36 - \frac{16}{\ln 3}$. **2.6.29.** а) $6 - 4\ln 2$; б) $60 - 16\ln 2$. **2.6.30.** а) $\frac{8}{9}$; б) $3\sqrt{3}$. **2.6.31.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$. **2.6.32.** а) 9; б) 9. **2.6.33.** а) $\frac{1}{3}$; б) 9. **2.6.34.** а) $10\frac{2}{3}$; б) $2\frac{1}{4}$. **2.6.35.** а) $\frac{2}{3}$; б) $5\frac{1}{3}$. **2.6.36.** а) $1\frac{1}{3}$; б) $1\frac{1}{3}$. **2.6.37.** а) $1\frac{1}{3}$; б) $1\frac{1}{3}$. **2.6.38.** а) $S = 4 - \cos 2t$; б) $S = \frac{1}{4}\sin 4t + 1$. **2.6.39.** а) $S = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2$;

б) $S=-\frac{1}{3}t^3+4t^2+3$. **2.6.40.** а) $y=x^4+\frac{1}{2}x^2-4x+4$; б) $y=x^3-\frac{1}{2}x^2-x+1$. **2.6.41.** а) $a=4$, $b=\frac{1}{\pi}$; б) $a=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$, $b=\left(2-\frac{9}{\pi^2}\right)\sqrt{3}$. **2.6.42.** а) $a=3$, $b=1$; б) $a=1$, $b=-1$. **2.6.43.** а) $a=4$, $b=2$; б) $a=-\frac{7}{17}$, $b=4\frac{4}{17}$. **2.6.44.** а) $y=-5x-15$, $y=5x-10$; б) $y=-4x-12$, $y=4x-4$. **2.6.45.** а) πk, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; б) πk, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **2.6.46.** а) $(-3;\ 1)$; б) $(-3;\ 2)$. **2.6.47.** а) $(-\infty;\ -20]\cup[0;\ +\infty)$; б) $[0;\ 5]$. **2.6.48.** а) 1; б) $\frac{1}{2}$. **2.6.49.** а) $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{27}$; б) $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{16}$. **2.6.50.** а) 4,5; 8; б) 4,5; $\left(8\sqrt{6}-4{,}5\right)$. **2.6.51.** а) 5; 3; б) 4,5; $6\frac{1}{6}$. **2.6.52.** а) $y=\frac{1}{2}x^2+3x$, $S=\frac{14}{15}$; б) $y=\frac{1}{2}x^2$, $S=\frac{1}{3}$. **2.6.53.** а) $F(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+5$, $S=9\frac{3}{4}$; б) $F(x)=-\frac{1}{4}x^2+4$, $S=1\frac{1}{6}$. **2.6.54.** а) $y=-2x+4$; $S=\frac{1}{3}$; б) $y=-2x+16$, $S=6\frac{2}{3}$. **2.6.55.** а) $y=2x-9$, $S=9$; б) $y=-2x+8$, $S=\frac{1}{3}$.

Раздел 3

3.1

3.1.01. а) 15386; б) 12265. **3.1.04.** а) -10; б) -6. **3.1.05.** а) $a=-1$, $b=6$, $c=-4$; б) $a=2$, $b=-16$, $c=24$. **3.1.15.** а) -13; б) $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. **3.1.16.** а) $19x^2-14x+3=0$; б) $21x^2-23x+6=0$. **3.1.17.** а) 56; б) $\frac{18}{7}$. **3.1.18.** а) $\frac{120}{169}$; б) $\frac{527}{625}$. **3.1.19.** а) $\frac{7}{25}$; б) $\frac{120}{169}$. **3.1.20.** а) $\frac{7\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{4}$. **3.1.22.** а) $\alpha=\frac{\pi}{4}$; б) $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **3.1.23.** а) $\frac{1+a}{1-a}$; б) $\frac{2-b}{4(1-b)}$. **3.1.24.** а) $\frac{1}{8000}$; б) 25. **3.1.25.** а) $-\frac{5}{3}-4i$; б) $4+3i$. **3.1.26.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}+i$; б) $2-\frac{3}{2}i$. **3.1.27.** а) $a=-0{,}16$, $b=-0{,}12$; б) $a=-0{,}2$, $b=2$. **3.1.28.** а) $-\frac{i}{12^6}$; б) $-2^{18}i$. **3.1.29.** а) -2^6; б) 2^9i. **3.1.30.** а) 0; $\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{24}\right)\right)$; б) 0; $\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$. **3.1.31.** а) z_2, z_1, z_3, z_0, где $z_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right)\right)$ при $k=0;\ 1;\ 2;\ 3$; б) z_2, z_1, z_3, z_0, где $z_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right)\right)$ при $k=0;\ 1;\ 2;\ 3$. **3.1.32.** а) -5; б) $4i$. **3.1.33.** а) -1; б) 1. **3.1.34.** а) Рис. 95; б) рис. 96. **3.1.35.** а) Рис. 97; б) рис. 98. **3.1.36.** а) Рис. 99; б) рис. 100. **3.1.37.** а) 10; б) 13. **3.1.38.** а) 1; б) 2. **3.1.39.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}$; б) $-\frac{1}{2}\pm\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **3.1.40.** а) $-2\cos\alpha$; б) $-2\sin\alpha$. **3.1.41.** а) $\frac{1}{2}(-1)^{k+1}\arcsin\frac{4}{5}+\frac{\pi k}{2}$, где

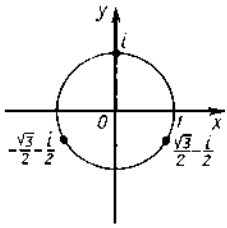


Рис. 95

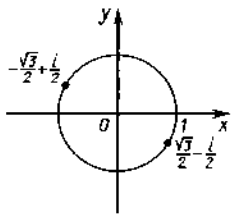


Рис. 96

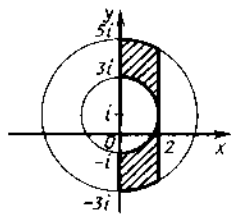


Рис. 97

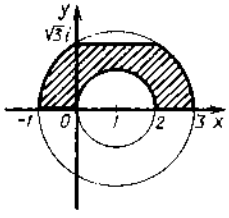


Рис. 98

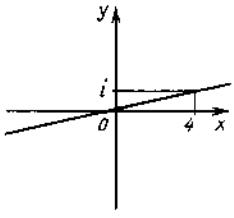


Рис. 99

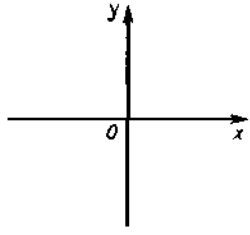


Рис. 100

$k = -1; 0; 1; 2$; б) $\frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi k}{2}$, где $k = -2; -1; 0; 1$. **3.1.42.** а) $z = 4\sqrt{3} + 12i$; б) $z = 27 + 9\sqrt{3}i$. **3.1.43.** а) $-2\cos\alpha\left(\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)\right)$; б) $-2\sin\alpha\left(\cos(\alpha - \pi) + i\sin(\alpha - \pi)\right)$. **3.1.44.** а) $1+i$; $3-4i$; б) $-3+4i$; $1-i$. **3.1.45.** а) -2; $1 + i\sqrt{3}$; $-i$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; б) -1; $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; i; $\pm\sqrt{3} - i$. **3.1.46.** а) 1; $\pm i$; $-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$; б) ± 1; $\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$. **3.1.47.** а) $4 + 4i$; б) $6 - 12i$. **3.1.48.** а) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i$; $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i$; $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$. **3.1.49.** а) $-\frac{i}{2\sqrt{3}}$; б) $-\frac{i}{2\sqrt{3}}$. **3.1.50.** а) $\frac{27}{5} - \frac{36}{5}i$; $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$; б) $-\frac{44}{5} + \frac{33}{5}i$. **3.1.51.** а) $16x^4 - 40x^3 + 17x^2 - 26x - 17$; б) $4x^4 - 12x^4 + 5x^2 - 2x - 10$. **3.1.52.** а) $a = -1$, $x \in \left\{\pm i; \frac{1}{2}\right\}$; б) $a = 1$, $x \in \left\{\pm i; -\frac{1}{2}\right\}$. **3.1.53.** а) $a = -1$, $x \in \{\pm i; 3\}$; б) $a = -1$, $x \in \{\pm i; 2\}$. **3.1.54.** а) $x = 1$, $y = 2$; б) $x = 2$, $y = 1$. **3.1.55.** а) $x = 1$, $y = -1$, $z = -1$ или $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$; б) $x = 1$, $y = -1$, $z = -1$ или $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$. **3.1.56.** а) $x = (-1)^k \cdot 2$, $y = \frac{1}{6} + k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $x = \frac{1}{3} + k$, $y = (-1)^k \cdot 2$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. **3.1.57.** а) $(-1; 1)$, $(1; -1)$; б) $(-1; 1)$, $(1; -1)$. **3.1.58.** а) 2; 4; б) 3; 5. **3.1.59.** а) $\pm\frac{5\pi}{6}$; б) $\pm\frac{\pi}{6}$. **3.1.60.** а) $3m + 2ni$; б) $\frac{1}{\sqrt{a} + i\sqrt{b}}$. **3.1.61.** а) $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$; б) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \varphi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \varphi\right)\right)$. **3.1.62.** а) $x = 1$, $y = 2$; б) $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$.

3.1.63. а) $-2^9\cdot\left(1+i\sqrt{3}\right)$; б) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **3.1.64.** а) -27166; б) -236. **3.1.65.** а) $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$; б) $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$. **3.1.66.** а) $-\frac{\sqrt{3}+i}{2^{40}}$; б) $\frac{\sqrt{3}-i}{2^{58}}$. **3.1.67.** а) $\pm\left(1+i\sqrt{3}\right)$; $\pm\left(\sqrt{3}-i\right)$; б) $\pm\left(\sqrt{3}+i\right)$; $\pm\left(1-i\sqrt{3}\right)$. **3.1.68.** а) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi$; б) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-\pi$. **3.1.69.** а) $-\sqrt{3}$; б) -1. **3.1.70.** а) $-\left(\frac{2}{3}\right)^6$; б) $-\left(\frac{2}{3}\right)^6$. **3.1.71.** а) 1; б) $-10-9\sqrt{3}i$. **3.1.72.** а) -2; б) 7. **3.1.73.** а) 6; б) $\frac{1}{2}$. **3.1.74.** а) $-2^7\cdot i$; б) $\frac{i}{2^9}$. **3.1.75.** а) $2^5\cdot\sqrt{2}(1+i)$; б) $\frac{-1+i}{2^6\sqrt{2}}$. **3.1.76.** а) $-2\cos\alpha\cdot\left(\cos(\alpha-\pi)+i\sin(\alpha-\pi)\right)$; б) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\right)$. **3.1.77.** а) $x=1$, $y=11$; б) $x=0$, $y=-1$ или $x=\frac{7}{2}$, $y=\frac{5}{2}$. **3.1.78.** а) $a=\pm\sqrt{5}$, $b=0$ или $a=3$, $b=\pm2$; б) $a=0$, $b=4$. **3.1.79.** а) ±1; б) 1; $-\frac{4}{3}$. **3.1.80.** а) -1; $1-2i$; б) $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$; $-\frac{3}{2}-\frac{i}{2}$. **3.1.81.** а) 1; 2; $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-1\pm\sqrt{3}i$; б) -1; 2; $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-1\pm\sqrt{3}i$. **3.1.82.** а) 0; 4; $\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}i$; б) 0; -3; $\pm\sqrt{3}i$; $-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **3.1.83.** а) 1; б) 1. **3.1.84.** а) $\cos\alpha+i\sin\alpha$ при $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in Z$; б) $2^4(1+\sin\varphi)^4\left(\cos(-4\varphi)+i\sin(-4\varphi)\right)$ при $\varphi\neq-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. **3.1.85.** а) $\cos7x=\cos^7x-21\cos^5x\cdot\sin^2x+35\cos^3x\times\times\sin^4x-7\cos x\cdot\sin^6x$; $\sin7x=7\cos^6x\cdot\sin x-35\cos^4x\cdot\sin^3x+21\cos^2x\cdot\sin^5x-\sin^7x$; б) $\cos5x=\cos^5x-10\cos^3x\cdot\sin^2x+5\cos x\cdot\sin^4x$; $\sin5x=5\cos^4x\cdot\sin x-10\cos^2x\cdot\sin^3x+\sin^5x$. **3.1.86.** а) $\frac{1}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$ и $\frac{1}{2}+i\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ соответственно; б) $\frac{1}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$ **3.1.87.** а) i; б) $8i$. **3.1.88.** б) $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3.2

3.2.01. а) 2; $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{3}}$; б) -2; $\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{8}}$. **3.2.02.** а) $2+\sqrt{3}$; б) $2-\sqrt{3}$. **3.2.03.** а) $40+8\sqrt{22}$; б) $41+8\sqrt{22}$. **3.2.04.** а) 1; б) 0. **3.2.05.** а) 0; ±1; б) 1. **3.2.06.** а) -3; б) -6; 3. **3.2.07.** а) 4,5; б) $\frac{11}{3}$. **3.2.08.** а) 2; б) 1. **3.2.09.** а) $\frac{1}{2}$; -2; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; б) -1; 4; $-\frac{\pi}{2}$; π. **3.2.10.** а) 7; -7; $\sin7>0$; $\sin(-7)<0$; б) 2; $\cos2<0$. **3.2.11.** а) 0; -2; $-1\pm\sqrt{\frac{33}{2}}$; б) 0; -3; $\frac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$. **3.2.12.** а) 8; $8\pm\frac{12}{7}\sqrt{21}$; б) 1; $\frac{3}{2}$; 2. **3.2.13.** а) 15; б) -10. **3.2.14.** а) При $a\in\left(-\infty;\frac{11}{4}\right)$ решений нет, при $a\in\left[\frac{11}{4};3\right]$ $x=\frac{2a+1\pm\sqrt{4a-11}}{2}$, при $a\in(3;+\infty)$ $x=\frac{2a+1+\sqrt{4a-11}}{2}$; б) при $a\in\left(-\infty;\frac{7}{4}\right)$ решений нет, при $a\in\left[\frac{7}{4};2\right]$ $x=\frac{2a+1\pm\sqrt{4a-7}}{2}$, при $a\in(2;+\infty)$ $x=\frac{2a+1-\sqrt{4a-7}}{2}$.

3.2.15. а) -2; б) -1; 2. **3.2.16.** а) При $a \in \left[-\frac{1}{12}; 0\right]$; б) $x = \frac{1}{2}\left(1 - 2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a + \frac{3}{4}}\right)$.

3.2.17. а) (1; 1); $(-1; -1)$; б) (2; 1); (1; 2). **3.2.18.** а) (3; 1); $(-1; -3)$; б) $(-1; -2)$; (2; 1). **3.2.19.** а) (1; 4); б) $(-1; -4)$. **3.2.20.** а) $(1 - 2y; y)$, где $y \in R$, при $m = 1$; $(1+y; y)$, где $y \in R$, при $m = -2$; (1; 0) при $m \neq 1$, $m \neq -2$; б) решений нет при $m = 1$; $(-1+y; y)$, где $y \in R$, при $m = -1$; $\left(-\frac{1}{1-m}; \frac{1}{1-m}\right)$ при $m \neq \pm 1$. **3.2.21.** а) $b=0$; б) $b=1$. **3.2.22.** а) 0; 2; -2; б) 0; -1. **3.2.23.** а) $(1; -1; -1)$; б) $(-1; -1; 1)$. **3.2.24.** а) (2; 1); (0; 3); $(-3; 0)$; б) $(1; -2)$; $(0; -5)$; $(-5; 0)$. **3.2.25.** а) $\frac{\pi k}{4}, (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; б) $\frac{2\pi k}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. **3.2.26.** а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **3.2.27.** а) $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$. **3.2.28.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. **3.2.29.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $2\pi k$, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k$, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$. **3.2.30.** а) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\frac{3\pi}{2}$; б) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\frac{13\pi}{6}$. **3.2.31.** а) $-\frac{\pi}{20}$; $\frac{39\pi}{20}$; б) $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$. **3.2.32.** а) $\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\pm\arcsin\frac{\sqrt{2}-1}{2} + \pi k$, $k \in Z$. **3.2.33.** а) 0; $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in N$. **3.2.34.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, один корень на $[0; \pi]$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, один корень на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. **3.2.35.** а) $\pi + 2\pi k$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$. **3.2.36.** а) $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. **3.2.37.** а) $\pm\arccos\frac{5}{6} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **3.2.38.** а) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **3.2.39.** а) $\frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{3}}{4} + \pi k$, $k \in Z$; б) πk, $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{6}{7}\right) + \pi k$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **3.2.40.** а) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; б) $\frac{\pi k}{6}$, $k \in Z$. **3.2.41.** а) $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 2 + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. **3.2.42.** а) $\sin\frac{5-\sqrt{17}}{2}$; б) $\cos\frac{7-\sqrt{37}}{2}$. **3.2.43.** а) $\pm\sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} 1}}$; б) $\pm\sqrt{2\operatorname{ctg} 1}$. **3.2.44.** а) 0; б) 0. **3.2.45.** а) $(-1; -2)$; (1; 2); б) $(-1; -2)$; $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **3.2.46.** а) 0; $\pm\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$. **3.2.47.** а) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$. **3.2.48.** а) $\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}; -\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{\pi}{6}}; -\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\left(-\sqrt{\frac{\pi}{3}}; -\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{\pi}{3}}; \frac{\pi}{3}\right)$; $\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}; -\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}; \frac{\pi}{3}\right)$. **3.2.49.** а) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi n\right)$ $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $k, n \in Z$;

б) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $(2\pi k;2\pi n)$, $k,\ n\in Z$. **3.2.50.** а) $\left(2\pi k;\pi\cdot(1-2k)\right)$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. **3.2.51.** а) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; б) $\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi k;-\frac{5\pi}{6}-2\pi k\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;-\frac{7\pi}{6}-2\pi k\right)$, $k\in Z$. **3.2.52.** а) $-\arccos\frac{4}{5}+$ $+2\pi k$, $k\in Z$; б) $-\arccos\frac{12}{13}+\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. **3.2.53.** а) 1; б) -1. **3.2.54.** а) 0; б) 0. **3.2.55.** а) 0; б) 0. **3.2.56.** а) 2; $\log_3 2-4$; б) 1; $\log_2 3-3$. **3.2.57.** а) 1; 3; б) 1; 4. **3.2.58.** а) 0; 2; б) -1. **3.2.59.** а) -2; 2; б) -2; 2. **3.2.60.** а) При $a\in(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$ решений нет, при $a\in(-4;2)$ $x=3+\log_3\frac{a+4}{2-a}$; б) при $a\in(-\infty;4]\cup[11;+\infty)$ решений нет, при $a\in(4;11)$ $x=2+\log_4\frac{11-a}{a-4}$. **3.2.61.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **3.2.62.** а) 2, $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$; б) 1, πk, $k\in Z$. **3.2.63.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$. **3.2.64.** а) $\log_2\pi k$, $k\in N$; б) $\log_3\frac{\pi k}{2}$, $k\in N$. **3.2.65.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $2\pi k$, $k\in Z$. **3.2.66.** а) 4; б) 14. **3.2.67.** а) Решений нет; б) решений нет. **3.2.68.** а) 3; б) $\frac{1}{25}$. **3.2.69.** а) 3; б) 2. **3.2.70.** а) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$. **3.2.71.** а) 4, πk, $k\in N$; б) 9; 81; $-\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in N$. **3.2.72.** а) $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{29\pi}{12}$; б) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{25\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{29\pi}{12}$. **3.2.73.** а) $\{4\}\cup(-\infty;0)$; б) $\{-17\}\cup[-16;-8]$. **3.2.74.** а) $\log_2 3$; 2; -2; б) -5; 4; $\log_3 4$. **3.2.75.** а) (125; 4); (625; 3); б) (243; 3); (27; 5). **3.2.76.** а) (4; 1); б) (4; -1). **3.2.77.** а) (8; 2); $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right)$; б) $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$; (3; 9). **3.2.78.** а) $\frac{1}{a+1}$ при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; $\frac{1}{a+1}$ и $-\frac{5}{a-1}$ при $a\in\left(-\frac{2}{3};1\right)$; решений нет при $a\in\left[-1;-\frac{2}{3}\right]$ и при $a=1$; б) $\frac{5}{a-1}$ при $a\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(1;+\infty)$; $\frac{1}{a+1}$ при $a\in\left(-\frac{3}{2};-1\right)$; решений нет при $a\in[-1;1]$ и при $a=-\frac{3}{2}$. **3.2.79.** а) $\{-16\}\cup\{4\}\cup[4{,}25;\ 8{,}5]$; б) $\left(\frac{7}{8};\frac{7}{4}\right]\cup\{2\}$. **3.2.80.** а) $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$; б) (1; 6]. **3.2.81.** а) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{11\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$.

3.3

3.3.01. а) $(-1;\ 1]\cup\{2\}\cup(3;+\infty)$; б) $(-\infty;-1)\cup(2;\ 3]\cup\{1\}$. **3.3.02.** а) 0; 5; б) -1; 3. **3.3.03.** а) $(-\infty;3)\cup\{5\}\cup(6;+\infty)$; б) $(-\infty;-1)\cup\{1\}\cup(2;+\infty)$. **3.3.04.** а) $\left(-\frac{8}{3};-1\right)\cup$ $\cup[4;+\infty)$; б) $\left(-\frac{13}{3};-3\right)\cup[1;+\infty)$. **3.3.05.** а) $\{2\}\cup[3;+\infty)$; б) $[2;+\infty)\cup\{1\}$. **3.3.06.** а) $\{-1\}\cup[3;+\infty)$; б) $(-\infty;-1]\cup\{4\}$. **3.3.07.** а) $(-1;1]$; б) $\left[-7;-\frac{5}{2}\right]\cup[2;+\infty)$. **3.3.08.** а) 4; -6; б) 3; -7. **3.3.09.** а) Да; б) да. **3.3.10.** а) Нет; б) нет. **3.3.11.** а) 1; 3; б) 2; 4. **3.3.12.** а) (0; 1), (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (3; 1), рис. 101; б) $(-1;\ -1)$, $(0;\ -1)$, $(0;\ -2)$, $(1;\ -1)$, $(1;\ -2)$, $(2;\ -1)$, рис. 102. **3.3.13.** а) $(3;\ -1)$, $(3;\ 0)$, рис. 103; б) $(1;\ -2)$, $(1;\ -3)$, рис. 104. **3.3.14.** а) Рис. 105; б) рис. 106. **3.3.15.** а) Рис. 107; б) рис. 108. **3.3.16.** а) Рис. 109; б) рис. 110. **3.3.17.** а) При $a=0$ $x=1$, при $a\neq 0$ решений нет; б) при $a=0$ $x=2$, при $a\neq 0$ решений нет. **3.3.18.** а) При $|a|<1$ $x\in[-4;\ 2]$, при $1\le|a|<2$ $x\in\left(-1-\sqrt{9-\left(a^2-1\right)^2};\right.$ $\left.-1+\sqrt{9-\left(a^2-1\right)^2}\right)$, при $|a|\ge 2$ решений нет; б) при $|a|<1$ $x\in[-5;\ 1]$, при $1\le|a|<2$ $x\in\left(-2-\sqrt{9-\left(a^2-1\right)^2};-2+\sqrt{9-\left(a^2-1\right)^2}\right)$, при $|a|\ge 2$ решений нет.

3.3.19. а) При $a<1$ $x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$, при $1\le a\le 2$ $x\in(-\infty;0]\cup[2-a;a]\cup$ $\cup[2;\ +\infty)$, при $a>2$ $x\in(-\infty;2-a]\cup[0;2]\cup[a;+\infty)$; б) при $a<-2$ $x\in(-\infty;a]\cup$ $\cup[-2;\ 0]\cup[-2-a;+\infty)$, при $-2\le a\le -1$ $x\in(-\infty;-2]\cup[a;-2-a]\cup[0;+\infty)$, при $a>-1$ $x\in(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$. **3.3.20.** а) $\left[-\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right]$, $k\in Z$; б) $\left[-\pi+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **3.3.21.** а) $\left[-\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{2\pi k}{3};\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3};\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi}{3}(1+2k)\right]$, $k\in Z$; б) $\left(\pi+6\pi k;\ 3\pi-3\arccos\frac{1}{4}+6\pi k\right]\cup\left[6\pi k+3\pi+3\arccos\frac{1}{4};\ 5\pi+6\pi k\right)$, $k\in Z$. **3.3.22.** а) $\left[-\frac{\pi}{12}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right]\cup\left[\frac{7\pi}{12}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]\cup$ $\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **3.3.23.** а) $\left[-2\arccos\frac{3}{4}+4\pi k;2\arccos\frac{3}{4}+4\pi k\right]\cup$ $\cup\{2\pi+4\pi k\}$, $k\in Z$; б) $\left[2\arcsin\frac{3}{4}+2\pi(2k-1);\ -2\arcsin\frac{3}{4}+4\pi k\right]\cup\{\pi+4\pi k\}$, $k\in Z$. **3.3.24.** а) $\left[\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{\pi k}{2};-\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{\pi}{2}(k+1)\right]$, $k\in Z$; б) $\left[\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\pi k}{2};\right.$

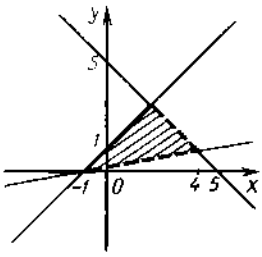


Рис. 101

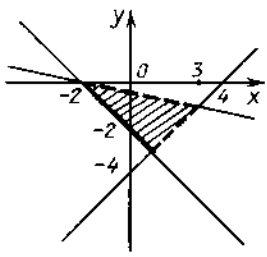


Рис. 102

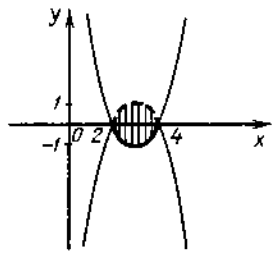


Рис. 103

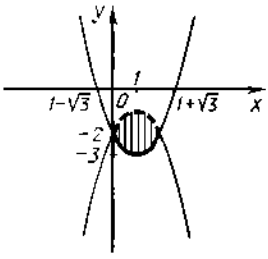


Рис. 104

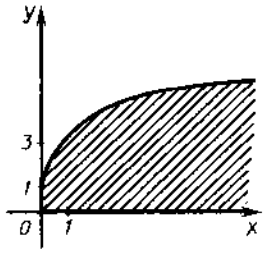


Рис. 105

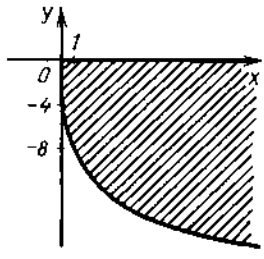


Рис. 106

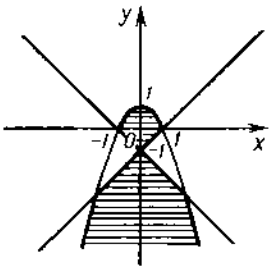


Рис. 107

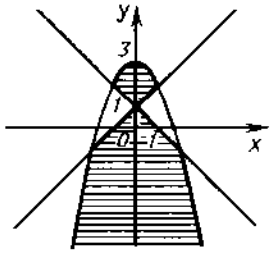


Рис. 108

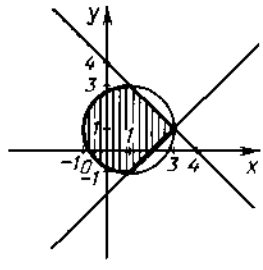


Рис. 109

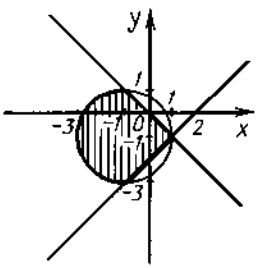


Рис. 110

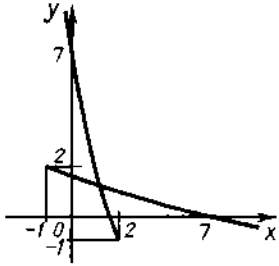


Рис. 111

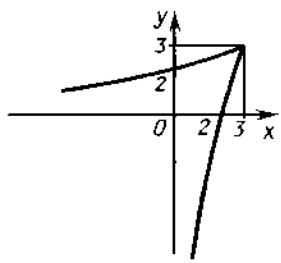


Рис. 112

$-\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\pi}{2}(k+1)\Big]$, $k\in Z$. **3.3.25.** а) $\left[-\frac{23\pi}{28}+2\pi k;\frac{5\pi}{28}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left[\frac{9\pi}{28}+\right.$ $\left.+2\pi k;\frac{9\pi}{28}+\pi(2k+1)\right]$, $k\in Z$. **3.3.26.** а) $[-2\operatorname{arctg}3+2\pi k;\ 2\operatorname{arctg}2+2\pi k]$, $k\in Z$; б) $\left[2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k;2\operatorname{arctg}3+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **3.3.27.** а) $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}\right)\ \cup\ \left[-\frac{\pi}{8}+\right.$ $\left.+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right]$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]\ \cup\ \left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. **3.3.28.** а) $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **3.3.29.** а) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\operatorname{arctg}3{,}5+\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $(\pi k;\operatorname{arcctg}2{,}5+\pi k]\cup\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k\right\}$, $k\in Z$. **3.3.30.** а) $\left[\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left[\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi+\pi k\right]$, $k\in Z$. **3.3.31.** а) $\left[\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3};\right.$ $\left.\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\right]\cup\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}\right\}$, $k\in Z$; б) $\left[-\frac{7\pi}{30}+\frac{2\pi k}{5};\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi k}{5}\right]\cup\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right\}$, $k\in Z$. **3.3.32.** а) $\left[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; б) $\left[\frac{1}{2};1\right]$. **3.3.33.** а) $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}};\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right]$; б) $\left[2-2\sqrt{3};2+2\sqrt{3}\right]$. **3.3.34.** а) $\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left[\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$, $k\in Z$. **3.3.35.** а) $\left(-\pi;-\frac{5\pi}{6}\right]\ \cup\ \left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]\cup\left[\frac{23\pi}{6};5\pi\right]$, $k=0,\ 1$; б) $\left(-5\pi;-\frac{13\pi}{3}\right]\ \cup$ $\cup\left[\frac{\pi}{3};\pi\right)\cup\ \left[-\frac{5\pi}{3}+2\pi k;-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k=0,\ -1$. **3.3.36.** а) $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$; б) $\left[\arccos\frac{1}{4}+2\pi k;\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. **3.3.37.** а) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;-\frac{\pi}{3}+\pi k\right)\cup$ $\cup\left(\pi k;\frac{\pi}{12}+\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left[\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3};\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3};\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}\right)$, $k\in Z$. **3.3.38.** а) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;-\frac{\pi}{4}+\pi k\right]\cup\ \left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;-\frac{\pi}{6}+\pi k\right]\ \cup$ $\cup\left[\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k\in Z$. **3.3.39.** а) $\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\ \cup\ \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; б) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]\ \cup\ \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **3.3.40.** а) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;-\frac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$. **3.3.41.** а) $\left[\frac{\pi}{6}+\right.$ $\left.+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. **3.3.42.** а) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{5\pi}{3}+\right.$ $\left.+2\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **3.3.43.** а) $[-1;+\infty)$; б) $[-1;+\infty)$. **3.3.44.** а) $(-1;0]\cup(1;2]$; б) $(-2;0]\cup(2;3]$. **3.3.45.** а) $(-1;0)$; б) $(-2;-1)\cup\{0\}$.

3.3.46. а) $1+\log_2 3$; б) $[0;1]\cup\{-1\}$. **3.3.47.** а) $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$; б) $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **3.3.48.** а) $\{2\}\cup[2\log_2 5;+\infty)$; б) $[2\log_3 6;+\infty)\cup\{2\}$. **3.3.49.** а) $\left[\frac{2}{1-\log_2 3};0\right]$; б) $\left[\frac{1}{\log_2 3-1};\frac{\log_2 5}{\log_2 3-1}\right)$. **3.3.50.** а) $(-2;-1)\cup(0;1)$; б) $(-1;0)\cup(1;2)$. **3.3.51.** а) $\{0\}\cup[4\log_3 2;+\infty)$; б) $[2\log_2 5;+\infty)\cup\{2\}$. **3.3.52.** а) $(-\infty;0)\cup[1;+\infty)$; б) $(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$. **3.3.53.** а) $[0;\log_3 2]$; б) $[1;\log_2 3]$. **3.3.54.** а) При $a\in(0;1)$ $x\in\left[\log_a\frac{3}{2};0\right]$, при $a\in(1;+\infty)$ $x\in\left[0;\log_a\frac{3}{2}\right]$, при $a=1$ $x\in R$; б) при $a\in(0;1)$ $x\in\left[\log_a\frac{4}{3};0\right]$, при $a\in(1;+\infty)$ $x\in\left[0;\log_a\frac{4}{3}\right]$, при $a=1$ $x\in R$. **3.3.55.** а) $[-1;2]$; б) $[-2;1]$. **3.3.56.** а) $\left[\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in Z$. **3.3.57.** а) $\left[\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+\pi k;\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$; б) $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi k;-\frac{\pi}{4}+\pi k\right]\cup\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right]$, $k\in Z$. **3.3.58.** а) $[-1;0)\cup(1;2]$; б) $[-3;-2)\cup(0;1]$. **3.3.59.** а) $(1;2)\cup(3;+\infty)$; б) $(0;2)$. **3.3.60.** а) $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left(\frac{5}{4};\sqrt[3]{2}\right]$; б) $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left[\sqrt{3};\frac{7}{4}\right)$. **3.3.61.** а) $(3;4)$; б) $(4;5)$. **3.3.62.** а) $(-5;-4)\cup(6;7)$; б) $(-6;8)$. **3.3.63.** а) $(-\infty;-3)\cup(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(1;+\infty)$; б) $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;2)\cup(3;+\infty)$. **3.3.64.** а) $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$; б) $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **3.3.65.** а) $(-\infty;0)\cup\left(\frac{13}{9};\frac{3}{2}\right)$; б) $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{23}{8};3\right)$. **3.3.66.** а) $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(16;+\infty)$; б) $\left(\frac{1}{9};27\right)$. **3.3.67.** а) $(1;2)\cup(2;+\infty)$; б) $(0;1)\cup(1;+\infty)$. **3.3.68.** а) $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)\cup(1;3)$; б) $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right)\cup(1;2)$. **3.3.69.** а) $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$; б) $(3;+\infty)$. **3.3.70.** а) $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{4};0\right)$; б) $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[-\frac{1}{9};0\right)$. **3.3.71.** а) $[-28;-2)\cup\left[-\frac{4}{3};-1\right)\cup\left(-1;-\frac{2}{3}\right]\cup(0;26]$; б) $[-7;0)\cup\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right]\cup(2;9]$. **3.3.72.** а) $\left(0;\frac{1}{16}\right)\cup(1;2)\cup(8;+\infty)$; б) $\left(\frac{1}{27};1\right)\cup(3;9)$. **3.3.73.** а) $\left[\frac{4}{5};1\right)\cup\left(1;\frac{6}{5}\right]$; б) $\left[-\frac{4}{3};-1\right)\cup\left(-1;-\frac{2}{3}\right]$. **3.3.74.** а) $[2;+\infty)$; б) $(0;2)$. **3.3.75.** а) $(-\infty;-2)\cup(-1;2)$; б) $(-\infty;-1)\cup(0;3)$ **3.3.76.** б) $\left[4;2^{4,56}\right)$; б) $\left[3;3^{3,56}\right)$. **3.3.77.** а) $[-1;0]$; б) $[-1;0]$.

3.3.78. а) $(-\infty;-4)\cup\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(4;+\infty)\cup\left\{\pm\sqrt{2}\right\}$; б) $(-\infty;-3)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup$ $\cup\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup(3;+\infty)\cup\left\{\pm\sqrt[3]{3}\right\}$. **3.3.79.** а) $(1-\log_3 4;0)\cup(0;1)\cup(2;+\infty)$; б) $(1-\log_2 3;0)\cup$ $\cup(0;2)\cup(3;+\infty)$. **3.3.80.** а) $\left(-2;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};0\right)\cup\left(1;\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$; б) $\left(-3;-2\sqrt{2}\right)\cup$ $\cup\left(-2\sqrt{2};0\right)\cup\left(1;2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};3\right)$. **3.3.81.** а) $y>0$ при $x\in(\log_3 2;\ 2)\cup(8;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(0;\log_3 2)\cup(2;8)$; б) $y>0$ при $x\in(2;3)\cup(9;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(0;2)\cup$ $\cup(3;9)$. **3.3.85.** а) $(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{3}{2};-1\right)\cup(0;1)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$; б) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(-1;0)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup$ $\cup(2;+\infty)$. **3.3.86.** а) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;-\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k\in Z$; б) $\left(\frac{2\pi}{3}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$, $k\in Z$. **3.3.87.** а) При $a\in(1;+\infty)$ $x\in\left(0;\frac{1}{a^2}\right]\cup\left[a^2;+\infty\right)$; при $a\in(0;1)$ $x\in\left(0;a^2\right]\cup$ $\cup\left[\frac{1}{a^2};+\infty\right)$; б) при $a\in(1;+\infty)$ $x\in\left(0;\frac{1}{a^3}\right]\cup\left[a^3;+\infty\right)$; при $a\in(0;1)$ $x\in\left(0;a^3\right]\cup$ $\cup\left[\frac{1}{a^3};+\infty\right)$. **3.3.88.** а) При $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ $x\in\left[\sqrt[6]{a^2-3};+\infty\right)$; при $a=\pm2$ $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$; при $a\in\left(-2;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$ $x\in\left(0;\sqrt[6]{a^2-3}\right]$; б) при $a\in(-\infty;-3)\cup$ $\cup(3;+\infty)$ $x\in\left[\sqrt[4]{a^2-8};+\infty\right)$; при $a=\pm3$ $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$; при $a\in\left(-3;-2\sqrt{2}\right)\cup$ $\cup\left(2\sqrt{2};3\right)$ $x\in\left(0;\sqrt[4]{a^2-8}\right]$. **3.3.89.** а) (2; 2); б) (0; 2). **3.3.90.** а) $\left(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}};-\frac{1}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{2};e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$.

3.4

3.4.01. а) 120π; б) 160π. **3.4.02.** а) Иррациональные $x=\frac{\pi(1+2k)}{2+\pi}$, рациональные $x=2k$, $k\in Z$; б) иррациональные $x=\frac{2\pi k}{2+\pi}$, рациональные $x=2k$, $k\in Z$. **3.4.03.** а) $y=3-\sqrt{x+2}$; графики данной и обратной функций изображены на рисунке 111; б) $y=4-\sqrt{4-x}$; графики данной и обратной функций изображены на рисунке 112. **3.4.04.** а) $y=\sqrt{\sqrt{x+1}-1}$ при $x\ge0$; б) $y=\sqrt{\sqrt{9-4x}-3}$ при $x\le0$.

3.4.05. а) $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}} & \text{при } x\ge2,\\ 2-x \text{ при } x<2;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}2-\sqrt{12-4x} & \text{при } x<2,\\ x-2 \text{ при } x\ge2.\end{cases}$

3.4.06. а) $y=3+\sqrt{x-1}$ при $x\ge1$; графики данной и обратной функций изображены на рисунке 113; б) $y=-4-\sqrt{4+x}$ при $x\ge-4$; графики данной и обратной

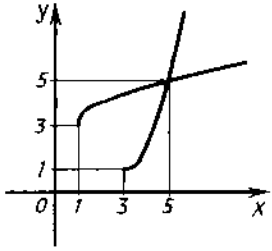


Рис. 113

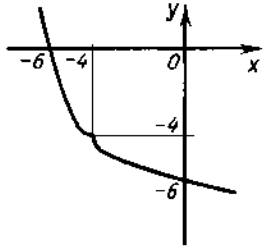


Рис. 114

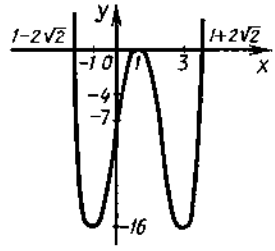


Рис. 115

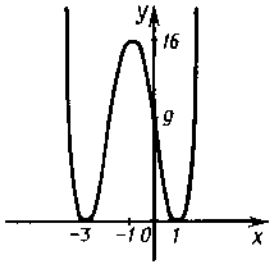


Рис. 116

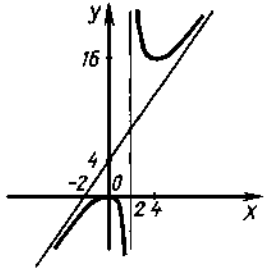


Рис. 117

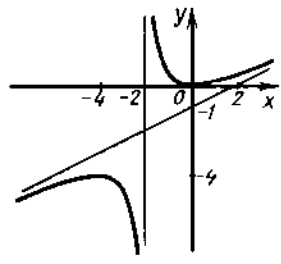


Рис. 118

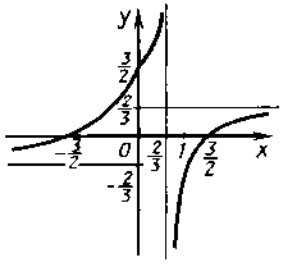


Рис. 119

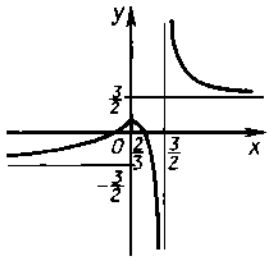


Рис. 120

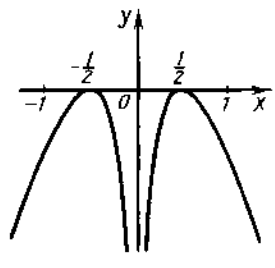


Рис. 121

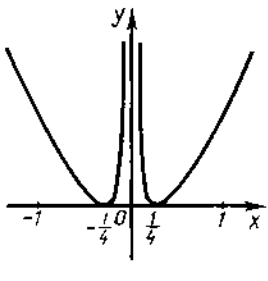


Рис. 122

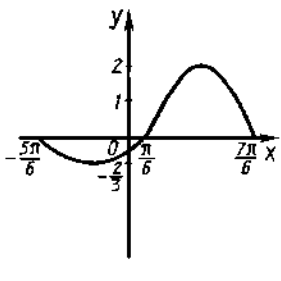


Рис. 123

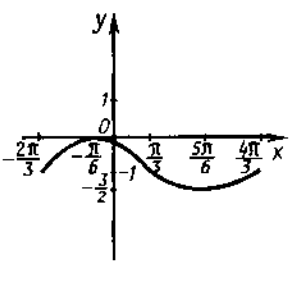


Рис. 124

функций изображены на рисунке 114. **3.4.07.** а) $(-\infty;2)\cup(2;5)\cup(5;+\infty)$; б) $(-\infty;-2)\cup(-2;3)\cup(3;+\infty)$. **3.4.08.** а) $(-\infty;-1)\cup(-1;2)\cup(2;+\infty)$; б) $(-\infty;-1)\cup\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$. **3.4.09.** а) $(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$; б) $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$. **3.4.10.** а) $a\in(-\infty;-3]\cup\{2\}\cup[4;+\infty)$; б) $(-\infty;-2]\cup\{1\}\cup[3;+\infty)$. **3.4.11.** а) 1; 3; б) 1; -2. **3.4.12.** а) Нечетная; б) нечетная. **3.4.13.** а) Четная; б) нечетная. **3.4.15.** а) $\left(-1-\sqrt{2};1\right)$; б) $\left(-3;-1+\sqrt{2}\right)$. **3.4.16.** а) При $a=\frac{3\pi}{2}+3\pi k$, $k\in Z$, функция нечетная; при $a=0$ функция четная; б) при $a=0$ функция четная; при $a=\pi+2\pi k$, $k\in Z$, функция нечетная. **3.4.17.** а) $E(y)=\left(1;\frac{23}{3}\right]$; б) $E(y)=\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$. **3.4.18.** а) Ограничена сверху, $E(y)=(-\infty;0]$; б) ограничена снизу $E(y)=[-1;+\infty)$. **3.4.19.** а) Неограничена; б) ограничена, $E(y)\subset[-1;1]$. **3.4.20.** а) Ограничена $E(y)=\left[\frac{1}{2};1\right]$; б) ограничена $E(y)=(0;1]$. **3.4.21.** а) Возрастает на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\pi+2\pi k\right]$, убывает на $\left[\pi+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; б) возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;2\pi k\right]$ и на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\pi+2\pi k\right]$, убывает на $\left[2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ и на $\left[\pi+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **3.4.22.** а) $x_{max}=-0{,}5$; б) $x_{max}=-1$, $x_{max}=1$, $x_{min}=0$. **3.4.23.** а) $x_{min}=0$, $x_{min}=2$, $x_{max}=1$; б) $x_{max}=-1$, $x_{min}=0$. **3.4.25.** а) Рис. 115; б) рис. 116. **3.4.26.** а) Рис. 117; б) рис. 118. **3.4.27.** а) Рис. 119; б) рис. 120. **3.4.28.** а) Рис. 121; б) рис. 122. **3.4.29.** а) Рис. 123; б) рис. 124. **3.4.30.** а) Рис. 125; б) рис. 126. **3.4.31.** а) Рис. 127; б) рис. 128. **3.4.32.** а) Рис. 129; б) рис. 130. **3.4.33.** а) Рис. 131; б) рис. 132. **3.4.34.** а) Рис. 133; б) рис. 134. **3.4.35.** а) Рис. 135; б) рис. 136. **3.4.36.** а) $E(y)=[-1;5]$, возрастает на [0; 1], убывает на $\left[-1;-\frac{2}{3}\right]$, $y_{max}=1$, $y_{max}=5$, $y_{min}=-1$, рис. 137; б) $E(y)=[-7;1]$, возрастает на $[-2;-1{,}5]$, убывает на $[0;2]$, $y_{max}=1$, $y_{min}=-1$, $y_{min}=-7$, рис. 138. **3.4.37.** а) $E(y)=[-10;10]$, возрастает на $[-2;3]$, $y_{min}=-10$, $y_{max}=10$, рис. 139; б) $E(y)=[-5;5]$, убывает на $\left[-1;\frac{2}{3}\right]$, $y_{max}=5$, $y_{min}=-5$, рис. 140. **3.4.38.** а) $E(y)=\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$, возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$ и на $\left[-\frac{5\pi}{2}-2\pi k;-\frac{3\pi}{2}-2\pi k\right]$, $k\in N_0$; убывает на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, на $\left[-\frac{3\pi}{2}-2\pi k;-\frac{\pi}{2}-2\pi k\right]$ и на $\left[\frac{3\pi}{2}+2\pi k;\frac{5\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in N_0$, $y_{max}=\frac{3}{2}$; $y_{min}=-\frac{1}{2}$, рис. 141; б) $E(y)=[0;2]$, возрастает на $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, на $\left[\frac{3\pi}{4}+\pi k;\frac{5\pi}{4}+\pi k\right]$

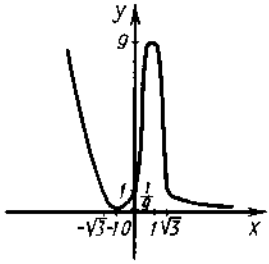


Рис. 125

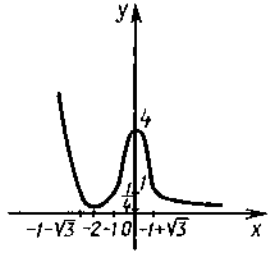


Рис. 126

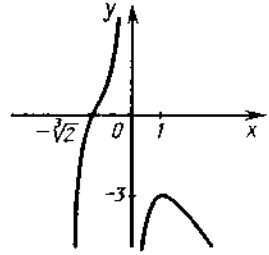


Рис. 127

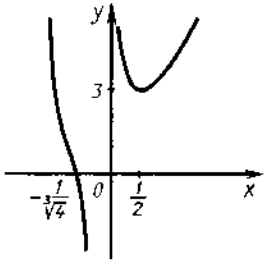


Рис. 128

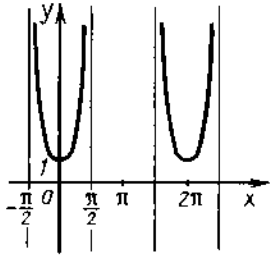


Рис. 129

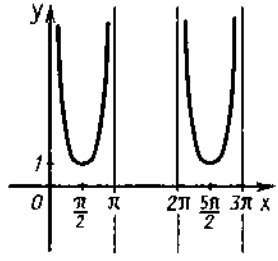


Рис. 130

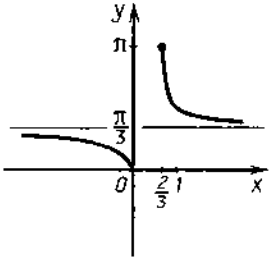


Рис. 131

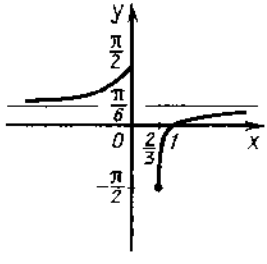


Рис. 132

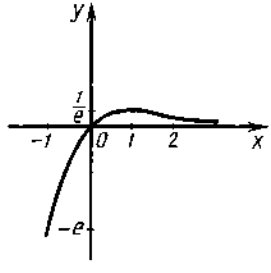


Рис. 133

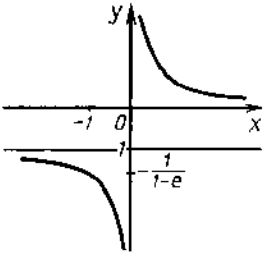


Рис. 134

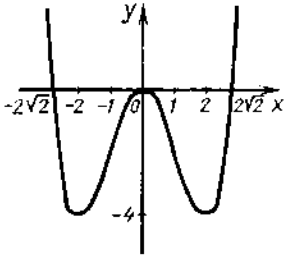


Рис. 135

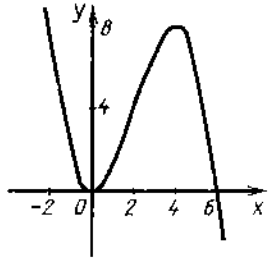


Рис. 136

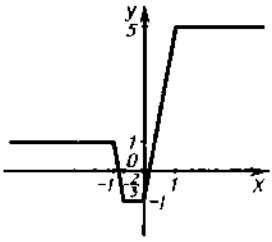


Рис. 137

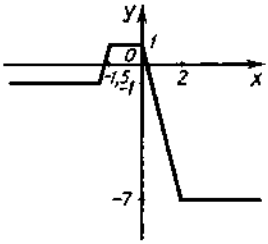


Рис. 138

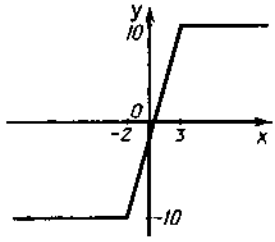


Рис. 139

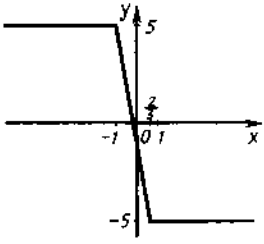


Рис. 140

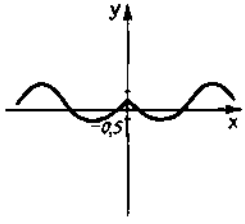


Рис. 141

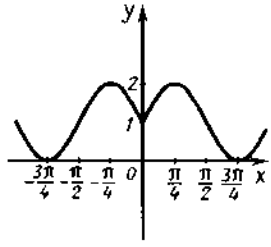


Рис. 142

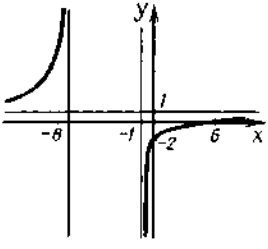


Рис. 143

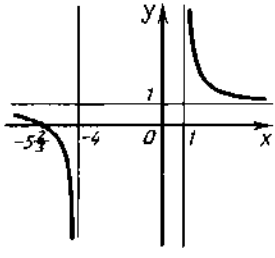


Рис. 144

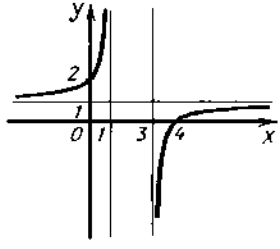


Рис. 145

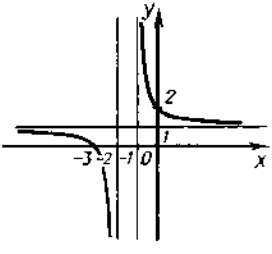


Рис. 146

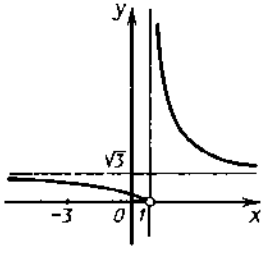


Рис. 147

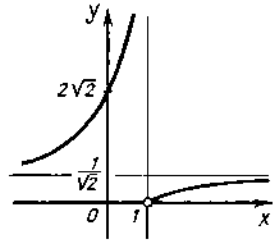


Рис. 148

и на $\left[-\frac{3\pi}{4}-\pi k;-\frac{\pi}{4}-\pi k\right]$, $k\in N_0$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$, на $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$ и на $\left[-\frac{5\pi}{4}-\pi k;-\frac{3\pi}{4}-\pi k\right]$, $k\in N_0$, $y_{\max}=2$, $y_{\min}=0$, рис. 142. **3.4.39.** а) $E(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, возрастает на $(-\infty;-8)$ и на $(-1;+\infty)$, рис. 143; б) $E(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-4)$ и на $(1;+\infty)$, рис. 144. **3.4.40.** а) $E(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, возрастает на $(-\infty;1)$ и на $(3;+\infty)$, рис. 145; б) $E(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-2)$ и на $(-1;+\infty)$, рис. 146. **3.4.41.** а) $E(y)=\left(0;\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$, убывает на $(-\infty;1)$ и на $(1;+\infty)$, рис. 147; б) $E(y)=\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$, возрастает на $(-\infty;1)$ и на $(1;+\infty)$, рис. 148. **3.4.42.** а) $E(y)=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; б) $E(y)=(-\infty;2)\cup(1;+\infty)$. **3.4.43.** а) $E(y)=\left(-1;\frac{1}{e^2}\right)\cup(1;+\infty)$; б) $E(y)=\left(-1;\frac{1}{e^2}\right]\cup(1;+\infty)$. **3.4.44.** а) $E(y)=[-15;1]$; б) $E(y)=\left[5\frac{1}{3};5\frac{23}{48}\right]$. **3.4.45.** а) $E(y)=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^3;\frac{\sqrt{2}}{2}e^3\right]$; б) $E(y)=\left[e^{-\frac{1}{2}};\frac{\sqrt{33}}{2}e^{\frac{1}{2}}\right]$. **3.4.46.** а) $E(y)=[-9;+\infty)$, при $a\in(-\infty;-9)$ корней нет, при $a=-9$ один корень, при $a\in(-9;+\infty)$ два корня, рис. 149; б) $E(y)=(-\infty;9]$, при $a\in(-\infty;9)$ два корня, при $a=9$ один корень, при $a\in(9;+\infty)$ корней нет, рис. 150. **3.4.47.** а) 5; 6; 7; 8; 9; 10; б) 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13. **3.4.48.** а) (0; 0); б) $\left(0;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$. **3.4.49.** а) $f\left(-\frac{7}{16};\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$ — наименьшее; $f\left(\frac{7}{16};\frac{7}{4}\right)=6\frac{1}{8}$ — наибольшее; б) $f\left(-\frac{77}{36};\frac{7}{6}\right)=-4\frac{1}{12}$ — наименьшее; $f\left(\frac{77}{36};\frac{11}{6}\right)=10\frac{1}{2}$ — наибольшее. **3.4.50.** а) $(1;3)\cup(3;5)$; б) $(-5;-3)\cup(-3;-1)$. **3.4.51.** а) При $a\in(-\infty;-24)$ корней нет, при $a=-24$ один корень, при $a\in(-24;+\infty)$ два корня; б) при $a\in(-\infty;-11)$ корней нет, при $a=-11$ один корень, при $a\in(-11;+\infty)$ два корня.

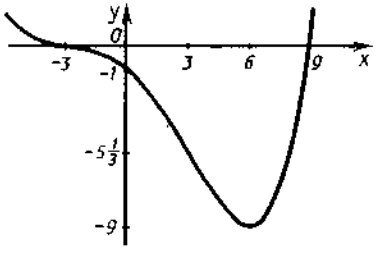


Рис. 149

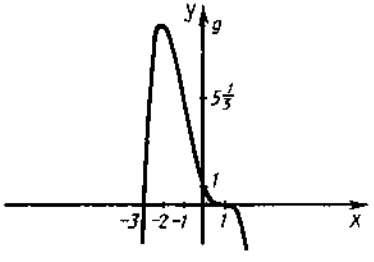


Рис. 150

3.4.52. а) При $a \in (-\infty;-2e)\cup\{0\}$ корней нет, при $a \in \{-2e\} \cup \left(\frac{6}{e^3};+\infty\right)$ один корень, при $a \in (-2e;0)\cup\left\{\frac{6}{e^3}\right\}$ два корня, при $a \in \left(0;\frac{6}{e^3}\right)$ три корня; б) при $a \in (-\infty;-6e)\cup\{2e\}$ один корень, при $a \in \{-6e\}\cup(0;2e)$ два корня, при $a \in (-6e;0)$ три корня, при $a \in (2e;+\infty)$ корней нет. **3.4.53.** а) При $|a| > \frac{2}{3e}$ корней нет, при $|a| = \frac{2}{3e}$ один корень, при $a = 0$ два корня, при $0 < |a| < \frac{2}{3e}$ три корня; б) при $|a| > \frac{3}{2e}$ один корень, при $|a| = \frac{3}{2e}$ два корня, при $|a| < \frac{3}{2e}$ три корня. **3.4.55.** а) $(-\infty;+\infty)$; б) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. **3.4.56.** а) При $|a| > 2$ один корень, при $|a| = 2$ два корня, при $|a| < 2$ три корня; б) при $a \in (-\infty;0)$ корней нет, при $a \in \{0\}\cup(1;+\infty)$ два корня, при $a=1$ три корня, при $a \in (0;1)$ четыре корня.

3.5

3.5.01. а) (1; 2) ∪ (4; 5); б) (0; 1) ∪ (2; 3). **3.5.02.** а) -3; $(1;+\infty)$; б) -2; $(6;+\infty)$. **3.5.03.** а) $(-\infty;4)$; б) $[0;+\infty)$. **3.5.04.** а) $(-\infty;-1)$; б) $(-\infty;-7)$. **3.5.05.** а) $(-\infty;-6)$; б) $(-\infty;2)$. **3.5.06.** а) $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$; б) $[0;28]$. **3.5.07.** а) $\left(-\infty;-3-\sqrt{3}\right)\cup$ $\cup\left(\sqrt{3}-1;\ +\infty\right)$; б) $\left(-\infty;-2-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right)$. **3.5.08.** а) $\left[-1;\frac{2}{3}\right]$; б) $\left(-\infty;-\frac{7}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. **3.5.09.** а) $(4;16]$; б) 9. **3.5.10.** а) 48 — наибольшее, -16 — наименьшее; б) 160 — наибольшее, -115 — наименьшее. **3.5.11.** а) 8 — наибольшее, 4 — наименьшее; б) 2 — наибольшее, -4 — наименьшее. **3.5.12.** а) $\frac{1}{e}$ — наибольшее, 0 — наименьшее; б) e^3 — наибольшее, 0 — наименьшее. **3.5.13.** а) -2 — наибольшее, $-2{,}5$ — наименьшее; б) -2 — наибольшее, $-2\frac{4}{15}$ — наименьшее. **3.5.14.** а) 1 — наибольшее, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ — наименьшее; б) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ — наибольшее, $\frac{3\sqrt{14}}{14}$ — наименьшее. **3.5.15.** а) 1,5 — наибольшее, $-0{,}5$ — наименьшее; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ — наибольшее, 1 — наименьшее. **3.5.16.** а) $\sqrt[3]{9}$ — наибольшее, 0 — наименьшее; б) $\sqrt[3]{9}$ — наибольшее, 0 — наименьшее. **3.5.17.** а) $y_{\max} = \frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$; б) $y_{\min} = -16$. **3.5.18.** а) $y_{\max} = \frac{1}{2}$; б) $y_{\max} = \frac{4}{3}$. **3.5.19.** а) $y_{\max} = -\frac{1}{3}\ln 4 - \frac{5}{8}$, $y_{\min} = \frac{1}{3}\ln 4 + \frac{5}{8}$; б) $y_{\min} = \frac{5}{8} + \frac{2}{3}\ln 2$, $y_{\max} = -\frac{5}{8} - \frac{2}{3}\ln 2$. **3.5.20.** а) $y_{\min} = 2\ln 16 - 9$, возрастает на $\left[\log_2\frac{1}{3};+\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty;\log_2\frac{1}{3}\right]$; б) $y_{\min} = 9\ln 3 - 4$, возрастает на

$\left[\log_3\frac{1}{2};+\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty;\log_3\frac{1}{2}\right]$. **3.5.21.** а) $y_{max}=\ln\frac{1}{2}+\frac{9}{2}$, $y_{min}=\ln\frac{9}{2}+\frac{1}{18}$, возрастает на $\left[\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right]$, убывает на $\left(-\infty;\frac{1}{6}\right]$ и на $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right)$; б) $y_{max}=\ln\frac{9}{2}-\frac{1}{18}$, возрастает на $\left(-\infty;-\frac{1}{6}\right]$, убывает на $\left[-\frac{1}{6};\frac{4}{3}\right)$. **3.5.22.** а) $y_{max}=\frac{1}{3}e^{\frac{8}{3}}$, $y_{min}=2e^{-\frac{1}{4}}$, возрастает на $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ и на $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$, убывает на $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$; б) $y_{max}=\frac{1}{3}e^{\frac{3}{4}}$, $y_{min}=2e^{-\frac{5}{4}}$, возрастает на $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right]$ и на $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$, убывает на $\left[-\frac{4}{3};-\frac{1}{2}\right]$. **3.5.23.** а) $y_{max}=\frac{1}{3e}$, возрастает на $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$, убывает на $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$; б) $y_{min}=-\frac{1}{2}e^{-3}$, возрастает на $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$. **3.5.24.** а) $y_{min}=-\frac{1}{3}e^2$, возрастает на $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$; б) $y_{max}=\frac{1}{5}e^{-1}$, возрастает на $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right]$, убывает на $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$. **3.5.25.** а) $y_{min}=e$, возрастает на $[e;+\infty)$, убывает на $(0;1)$ и на $(1;e]$; б) $y_{min}=\frac{e^2}{4}$, возрастает на $(0;1)$ и на $\left[e^2;+\infty\right)$, убывает на $\left(1;e^2\right]$. **3.5.26.** а) $y_{min}=2e$, возрастает на $\left[\sqrt{e};+\infty\right)$, убывает на $(0;1)$ и на $\left(1;\sqrt{e}\right]$; б) $y_{max}=-e$, возрастает на $\left(0;\frac{1}{e}\right]$, убывает на $\left[\frac{1}{e};1\right)$ и на $(1;+\infty)$. **3.5.27.** а) Точка минимума при $a=1$ и при $a=-2$, точка максимума при $a=2$; б) точка минимума при $a=-1$ и при $a=1$, точка максимума при $a=2$. **3.5.28.** а) При $b=\frac{2}{3}$ $a\in(-\infty;1)$, при $b\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ $a=3b-1$; б) при $b=-\frac{1}{3}$ $a\in(1;+\infty)$, при $b\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$ $a=3b+2$. **3.5.30.** а) $y=-0{,}04x$, $y=-x$; б) $y=\frac{x}{25}$, $y=x$. **3.5.31.** а) $y=-3x-6$; б) $y=-3x+5$. **3.5.32.** а) $y=2x-2$, $y=2x+2$; б) $y=2(x+2)$, $y=2(x-2)$. **3.5.33.** а) -148; б) -72. **3.5.34.** а) 5; б) 7. **3.5.36.** а) Под углом 0° в точках $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;0\right)$, $k\in Z$, под углом 60° в точках $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;0\right)$, $k\in Z$, под углом 120° в точках $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;0\right)$, $k\in Z$; б) под углом 0° в точках $(\pi+2\pi k;0)$, $k\in Z$, под углом 60° в точках $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;0\right)$, $k\in Z$, под углом 120° в точках $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;0\right)$, $k\in Z$. **3.5.37.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **3.5.38.** а) $y=8x+4$; б) $a=3$, $b=2$. **3.5.39.** а) $y=-x+2{,}5$; б) $y=2x+1$. **3.5.41.** а) $\left(\frac{1}{2};1\right)$; б) $\left(-\frac{3}{2};3\right)$. **3.5.42.** а) (2; 4), (1; 10), (3; −2);

б) (−2; 17), (1; 5), (2; 1). **3.5.43.** а) $y = 5x - 6$, $y = 5x - 21$; б) $y = -5x - 11$, $y = -5x - 31$. **3.5.44.** а) $y = -\frac{9}{4}x + 3$; б) $y = -2x + 4$, $y = -6x + 12$. **3.5.45.** а) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $y = -\frac{1}{2}x + 1$. **3.5.46.** а) (3; −15); 10,5; 21; б) (−3; 11); 8; 8. **3.5.47.** а) $y = -2$; б) $y = \frac{1}{e^3}$. **3.5.48.** а) $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$; б) $\left(-1;\frac{76}{15}\right), (3;-8)$. **3.5.49.** а) $y = x^3 - 3x^2 + 3$, $y = x^3 - 3x^2 + 35$; б) $y = x^3 + 2x^2 - 7$, $y = x^3 + 2x^2 + \frac{67}{27}$. **3.5.50.** а) $y = x + 1$, $y = -3x - 3$; б) $y = x$, $y = -3x$. **3.5.51.** а) $y = -x + \frac{29}{6}$, $y = -x + \frac{14}{3}$; б) $y = -x - \frac{29}{6}$, $y = -x - \frac{14}{3}$. **3.5.52.** а) $x_{max} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x_{min} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; 135°; б) $x_{max} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$, $x_{min} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; 45. **3.5.53.** а) (0;0) — точка минимума, $\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}-\ln\frac{3}{4}\right)$; б) $\frac{\pi}{6}$. **3.5.54.** а) −3; б) $-\frac{3}{2}$. **3.5.55.** а) $4r$; б) $\sqrt{3}r$. **3.5.56.** а) $\frac{4}{3}r$; б) 3. **3.5.57.** а) (1; 2); б) (2; 8). **3.5.58.** а) (1; −1); б) (−2; −1). **3.5.59.** а) $\left(1+\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2}\right)$, $\left(1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}\right)$; б) $\left(1+\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}\right)$, $\left(1-\sqrt{3};\ 1-\sqrt{3}\right)$. **3.5.60.** а) На расстоянии 0,08 м от заряда $81\cdot10^{-6}$ Кл; б) на расстоянии $\frac{9}{52}$ м от заряда $81\cdot10^{-6}$ Кл. **3.5.61.** а) 9 км; б) 8 км. **3.5.62.** а) $y = -2x + 6$; б) $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + 6$. **3.5.63.** а) 4 см³; б) 6 см. **3.5.64.** а) $\left(\frac{1}{2};\sqrt{\ln 6}\right)$; б) $\left(\frac{1}{2};\sqrt{\ln 2}\right)$. **3.5.65.** а) $\sqrt{e}$; б) 3; 4. **3.5.66.** а) $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{5}{2}\right)$; б) $[-4\ ;\ -3\ ]$. **3.5.67.** а) $2\pi k$, $-2\operatorname{arctg}0{,}6 + 2\pi k$, $k \in Z$; б) $0; -\frac{7}{3}$.

3.6

3.6.01. а) $\frac{2}{7}$; б) 0. **3.6.02.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$. **3.6.03.** а) $\frac{9}{4}$; б) $\sqrt{15} - 2$. **3.6.04.** а) 2,5; б) $\frac{e^2}{2}$. **3.6.05.** а) $e - 1$; б) 0. **3.6.06.** а) 1,5; б) $\log_3 2 - \frac{1}{2\ln 3}$. **3.6.07.** а) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}$; б) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.6.08.** а) 6; б) 6. **3.6.09.** а) $f(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{3}x - \frac{1}{3}$; б) $f(x) = -\frac{2}{3x\sqrt{x}} - 2\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}x + 2\sin\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **3.6.10.** а) $f(x) = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\sqrt{5}x + 1$; б) $f(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}2x + \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\cos 3 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}2$. **3.6.13.** а) $F(x) = \begin{cases} x^2, & \text{при } x < 0, \\ 1 - \cos x, & \text{при } x \ge 0; \end{cases}$ рис. 151; б) $F(x) = \begin{cases} \sin x + 1, & \text{при } x < 0, \\ x + 1, & \text{при } x \ge 0; \end{cases}$ рис. 152. **3.6.14.** а) $F(x) = \frac{1}{4}x(4 - x)^3$;

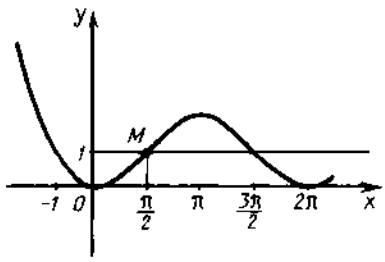


Рис. 151

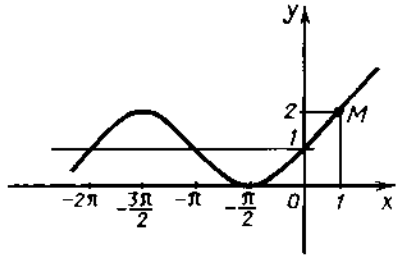


Рис. 152

б) $F(x)=\frac{1}{4}x(x+4)^4$. **3.6.15.** а) $A=\frac{1}{\pi}$, $B=2$; б) $A=-\frac{3}{\pi}$, $B=1{,}5$. **3.6.16.** а) $x=\frac{2}{3}$; б) $y\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. **3.6.17.** а) $y\in(-\infty;-2)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; б) $x\in(-\infty;0)\cup\{2\}$. **3.6.18.** а) $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{6}$; б) $0,\frac{\pi}{2},2\pi$. **3.6.19.** а) $y=-\frac{1}{4}$; б) $y=-x+\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **3.6.20.** а) $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}-1\right)$. **3.6.21.** а) $F(x)=x^3-3x^2+4$, $x\in(-\infty;-1]\cup\{2\}$; б) $F(x)=x^3+3x^2-4$, $x\in\{-2\}\cup[1;+\infty)$. **3.6.22.** а) $F(x)=\frac{1}{(1-2x)^2}-1$, где $x>0{,}5$; б) $F(x)=1-\frac{1}{(2x-1)^4}$, где $x>0{,}5$. **3.6.23.** а) $y=Cx^2$; б) $y=Cx^5$. **3.6.24.** а) $y=Ce^{\sin x}$; б) $y=Ce^{-\cos x}$. **3.6.25.** а) $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$; б) $y=-\frac{1}{x}$. **3.6.26.** а) $y=x+\frac{\pi}{2}$; б) $y=x+\frac{\pi}{2}$. **3.6.27.** а) $F(x)=5-x-\log_4 x$, $(4;0)$; б) $F(x)=x+\ln x-1$, $(1;0)$. **3.6.28.** а) $y=2e^x$; б) $y=\frac{1}{x}$. **3.6.29.** а) 2; б) 5. **3.6.30.** а) 12,5; б) $y=12\frac{2}{3}$. **3.6.31.** а) 1,25; б) 1,25. **3.6.32.** а) $\frac{1}{2}e^2-e+2\ln 2-2$; б) $0{,}5e^2-5e+12{,}5$. **3.6.33.** а) 25,5; б) 25,5. **3.6.34.** а) 36; б) 36. **3.6.35.** а) 4,5; б) 4,5. **3.6.36.** а) $29\frac{1}{3}$; б) 54. **3.6.37.** а) $47\frac{1}{3}$; б) $14\frac{2}{3}$. **3.6.38.** а) $35\frac{5}{6}$; б) $11\frac{5}{6}$. **3.6.39.** а) 64; б) 64. **3.6.40.** а) $3\frac{2}{3}$; б) $3\frac{2}{3}$. **3.6.41.** а) ≈12,26; б) ≈12,26. **3.6.42.** а) ≈ 14,86; б) ≈6,76. **3.6.43.** а) 4; б) 12. **3.6.44.** а) (6;12), (−6; 60); б) (5; 5), (−5; −55). **3.6.45.** а) $7\frac{1}{9}$; б) 4,5. **3.6.46.** а) 2,25; б) 2,25. **3.6.47.** а) ≈7,8; б) ≈22,4. **3.6.48.** а) 6,75; б) 13,5. **3.6.49.** а) $14\frac{1}{3};10\frac{2}{3}$; б) 20; 4,5. **3.6.50.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{6}$. **3.6.51.** а) $21\frac{1}{3}$; б) $21\frac{1}{3}$. **3.6.52.** а) $2\frac{2}{3}$; б) $2\frac{2}{3}$. **3.6.53.** а) $4\frac{1}{6}$; б) 3. **3.6.54.** а) $a=1$, $S=\frac{10-6\sqrt{2}}{3}$; б) $a=4$, $S=1{,}75$. **3.6.55.** а) $a=-1$; б) $a=1$.

ЛИТЕРАТУРА

Алгебра и начала анализа: 10—11 кл./ Под ред. А. Н. Колмогорова.— М.: Просвещение, 1990—1997.

Алимов Ш. А. и др. Алгебра и начала анализа: 10—11 кл.— М.: Просвещение, 1993—1997.

Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: 10—11 кл.— М.: Просвещение, 1991—1992.

Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ: 10 кл.— М.: Просвещение, 1989, 1993.

Виленкин Н. Я. и др. Алгебра и математический анализ: 11 кл.— М.: Просвещение, 1990, 1993.

Создание системы оценки качества знаний обучающихся/ Под ред. Некрасова С. Д.— Краснодар: КЭЦРО, 1994.

Математика: Временный государственный образовательный стандарт. Проект.— М.: РАО, 1993.

Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы. Выпуск 1. Выпуск 2. Библиотека журнала «Математика в школе». — М.: Школа-Пресс, 1994.

Говоров В. М. и др. Сборник конкурсных задач по математике.— М.: Наука, 1983.

Ларичев П. А. Сборник задач по алгебре: В 2 ч.— М.: Просвещение, 1965.

Лидский В. Б., Овсянников Л. Б., Тулайков А. И. и др. Задачи по элементарной математике. — М.: Наука, 1973.

Моденов П. С., Новоселов С. И. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы.— М.: Изд-во МГУ, 1966.

Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы / Под ред. М. И. Сканави.— Минск: Вышэйшая школа, 1990.

Сивашинский И. Х. Элементарные функции и их графики.— М.: Наука, 1968.

Сивашинский И. Х. Задачи по математике для внеклассных занятий.— М.: Просвещение, 1968.

Цыпкин В. Г., Пинский А. И. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы.— М.: Наука, 1983.

Шахно Б. У. Сборник задач по математике повышенной трудности.— Минск: Вышэйшая школа, 1969.

Алексеев А. С. и др. Дидактические материалы по математике для 12 класса вечерней (сменной) общеобразовательной школы: Пособие для учителя.— М.: Просвещение, 1990.

Парно И. В. Интегралы в 10 классе средней школы: Пособие для учителей.— М.: Просвещение, 1970.

Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С. Алгебра и элементарные функции. — М.: Просвещение, 1970.— Ч. 1.

Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С. Алгебра и элементарные функции.— М.: Просвещение, 1970.— Ч. 2.

Абрамов А. М. и др. Алгебра и начала анализа в 9—10 классах: Пособие для учителей.— М.: Просвещение, 1982.

Марошникова М. М. и др. Контроль знаний по математике с применением ЭВМ.— М.: Высшая школа, 1990.

Стратилатов П. В. Тригонометрия. Дополнительный материал к курсу геометрии 9—10 классов.— М.: Просвещение, 1972.

Башмаков М. И. и др. Задачи по математике: Алгебра и анализ.— М.: Наука, 1982.— Вып. 22.— (Библиотечка «КВАНТ»).

Содержание

Предисловие 3
Раздел 1
1.1. Числа и тождественные преобразования 6
1.2. Уравнения и системы уравнений 13
1.3. Неравенства и системы неравенств 21
1.4. Функции, их свойства и графики 28
1.5. Производная и ее применение 32
1.6. Первообразная и интеграл 37
Раздел 2
2.1. Числа и тождественные преобразования 44
2.2. Уравнения и системы уравнений 54
2.3. Неравенства и системы неравенств 62
2.4. Функции, их свойства и графики 67
2.5. Производная и ее применение 73
2.6. Первообразная и интеграл 81
Раздел 3
3.1. Числа и тождественные преобразования 87
3.2. Уравнения и системы уравнений 97
3.3. Неравенства и системы неравенств 106
3.4. Функции, их свойства и графики 114
3.5. Производная и ее применение 120
3.6. Первообразная и интеграл 130

Примерные тексты экзаменационных работ по математике 138
Ответы 141
Литература 188

Учебное издание

Семенко Екатерина Алексеевна
Некрасов Сергей Дмитриевич
Титов Георгий Николаевич и др.

Задания для подготовки к выпускному экзамену по алгебре и началам анализа

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младший редактор *Н. В. Сидельковская*
Художник *В. В. Костин*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Компьютерная верстка: *О. С. Иванова*
Технический редактор *Г. В. Субочева*
Корректоры *Л. С. Вайтман, О. В. Ивашкина, О. Н. Леонова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93–953000. Изд. лиц № 010001 от 10.10.96. Сдано в набор 21.10.96. Подписано к печати 30.10.97. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офс. №1. Гарнитура Школьная. Печать офсет. Усл. печ. л. 12. Усл. кр.-отт. 12,25. Уч.-изд. л. 9,42. Тираж 15 000 экз. Заказ 316.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Государственного комитета Российской Федерации по печати. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.