

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2016 год, вариант 3

1. Известно, что $\operatorname{tg}(2\alpha + \beta) + 6 \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta = 0$ и $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Найдите $\operatorname{ctg} \beta$.

 $\mathbb{Z}/\mathbb{I}$ или $\mathbb{I}$

2. Решите неравенство

$$4x^2 + x + 9 > 2|4x - 2\sqrt{x} + 3| + 4x\sqrt{x}.$$

 $(\infty + \frac{1}{6}) \cap (\mathbb{I} \setminus 0]$

3. В числе $2*0*1*6*02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

9671

4. Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|3x| + |4y| + |48 - 3x - 4y| = 48,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

96

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 - 3x + 3y + 1 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 3x^2 + 3y^2 + 3 = 0. \end{cases}$$

 $(\mathbb{I} \setminus \mathbb{Z})$

6. Равнобедренный треугольник PQT с основанием PQ вписан в окружность Ω . Хорды AB и CD , параллельные прямой PQ , пересекают сторону QT в точках L и M соответственно, и при этом $QL = LM = MT$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника PQT , если $AB = 2\sqrt{14}$, $CD = 2\sqrt{11}$, а центр O окружности Ω расположен между прямыми AB и CD .

 $8\mathbb{I} \setminus \frac{\mathbb{P}}{9\mathbb{I}}$